Алгебра 10: нормальные подгруппы и представления

10.1. Нормальные подгруппы

Определение 10.1. Пусть G – группа, а x, y – ее элементы. Обозначим через x^y элемент вида yxy^{-1}. Подгруппа $G_1 \subset G$ называется **нормальной**, если для любых $x \in G_1$, $y \in G$ имеем $x^y \in G_1$.

Задача 10.1. **Центром** группы G (обозначается $Z(G)$) называется множество всех элементов $x \in G$, коммутирующих со всеми элементами G. Докажите, что $Z(G) \subset G$ - нормальная подгруппа.

Задача 10.2. Пусть $G_1 \subset G$ – подгруппа. **Левыми смежными классами** по подгруппе G_1 называются подмножества вида $G_1 \cdot x \subset G$, где x пробегает все G. **Правыми смежными классами** называются подмножества вида $x \cdot G_1 \subset G$. Докажите, что правые (левые) смежные классы либо пересекаются, либо совпадают. Докажите, что правые смежные классы являются левыми (и наоборот) тогда и только тогда, когда G_1 – нормальная подгруппа.

Задача 10.3. Пусть $G_1 \subset G$ – нормальная подгруппа, а S_1, S_2 – смежные классы по ней. Выберем $x \in S_1$, $y \in S_2$. Докажите, что смежный класс произведения xy не зависит от выбора x, y в S_1, S_2. Докажите, что таким образом определенное произведение задает структуру группы на множестве G_2 смежных классов по G_1.

Определение 10.2. В такой ситуации говорят, что G_2 – **факторгруппа** G **по** G_1 (это записывается $G_2 = G/G_1$), а G – **расширение** G_2 **с помощью** G_1. Расширение групп записывается так: $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow G_2 \longrightarrow 1$.

Задача 10.4. Пусть $G \xrightarrow{\varphi} G'$ – гомоморфизм групп. Докажите, что ядро φ (т.е. подмножество элементов, которые переходят в $1_{G'}$) – нормальная подгруппа в G.

Задача 10.5. Пусть $G \xrightarrow{\varphi} G'$ – сюрьективный гомоморфизм групп. Докажите, что $G' \cong G/\ker\varphi$, где $\ker\varphi$ – ядро φ.

Задача 10.6. Рассмотрим множество $\operatorname{Aut}(G)$ автоморфизмов группы G, с операцией композиции. Докажите, что это группа. Докажите, что сопоставление $\varphi_y(x) \mapsto x^y$ задает гомоморфизм $G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G)$.

Определение 10.3. Пусть G, G' – группы, причем задан гомоморфизм

$$G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G').$$

В такой ситуации говорят, что G **действует на** G' **автоморфизмами**. Автоморфизмы вида $x \xrightarrow{\varphi_y} x^y$ называются **внутренними**.

Задача 10.7. Найдите группу $\operatorname{Aut}(G)$ для $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p простое).

Задача 10.8 (*). Найдите группу $\operatorname{Aut}(G)$ для $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n любое).

Задача 10.9. Пусть задан гомоморфизм $G_2 \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Aut}(G_1)$. Определим на множестве пар (g_1, g_2) следующую операцию: $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1\varphi(g_2, h_1), g_2h_2)$. Докажите, что получится группа.

Определение 10.4. Эта группа называется **скрученным произведением** G_1 **и** G_2 и обозначается $G_1 \rtimes G_2$.

Задача 10.10. В условиях предыдущей задачи докажите, что $(G_1, 1)$ задает нормальную подгруппу в G, а фактор по этой подгруппе изоморфен G_2.

Задача 10.11. Опишите группу S_3 как скрученное произведение двух нетривиальных абелевых групп.

Задача 10.12 (!). Опишите диэдральную группу как скрученное произведение двух нетривиальных абелевых групп.

Задача 10.13 (*). Групппй Клейна называется группа кватернионов вида $\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K$, с естественной операцией умножения. Можно ли получить группу Клейна как скрученное произведение двух абелевых групп?

Задача 10.14 (*). Пусть $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} G_2 \longrightarrow 1$ – расширение групп. Предположим, что задан такой гомоморфизм $G \xrightarrow{\psi} G_1$, такой, что $\psi \circ \varphi$ – тождественный автоморфизм G_2 (в такой ситуации говорится, что φ **допускает сечение**). Докажите, что G можно получить как скрученное произведение $G_1 \rtimes G_2$.

Задача 10.15 (!). Пусть дана группа G. Рассмотрим подгруппу $[G, G] \subset G$, порожденную элементами вида $xyx^{-1}y^{-1}$. Докажите, что это нормальная подгруппа, а фактор по ней коммутативен.

Определение 10.5. $[G, G]$ называется **коммутантом** группы G.

Задача 10.16 (*). Найдите коммутант симметрической группы.

Задача 10.17 (!). . Рассмотрим группу четных подстановок A_n, $n \geqslant 5$. Докажите, что она совпадает со своим коммутантом.

Указание. Посчитайте $xyx^{-1}y^{-1}$, где x, y – циклические подстановки порядка 3.

Разрешимые группы

Определение 10.6. Группа G называется **разрешимой**, если существует последовательность $1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G$ нормальных подгрупп, причем все G_i/G_{i-1} абелевы.

Задача 10.18. Докажите, что подгруппа разрешимой группы разрешима.

Задача 10.19. Докажите, что симметрическая группа S_3 разрешима.

Задача 10.20. Докажите, что симметрическая группа S_4 разрешима.

Задача 10.21. Докажите, что группа Клейна $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ разрешима.

Задача 10.22 (!). Пусть G_0 – группа, G_1 – ее коммутант, $G_2 = [G_1, G_1]$ – коммутант коммутанта, и так далее, $G_i = [G_{i-1}, G_{i-1}]$. Докажите, что G_0 разрешима тогда и только тогда, когда на каком-то шаге мы получим $G_n = 1$.

Задача 10.23 (!). Докажите, что группа четных подстановок A_n, $n \geqslant 5$ неразрешима.

Задача 10.24 (*). Докажите, что группа движений $\mathbb{R}^3$ неразрешима.

Указание. Постройте изоморфизм между A_5 и группой движений икосаэдра, и воспользуйтесь задачей 10.17.

Задача 10.25. Пусть G – группа порядка p^n. Докажите, что центр G содержит больше одного элемента.

Указание. Рассмотрим действие G на себе автоморфизмами Порядок G равен сумме мощностей классов вида x^G, где x^G есть совокупность всех элементов вида x^y, $y \in G$. Докажите сначала, что если x не лежит в центре, то порядок x^G делится на p. Мы получаем $|G| = 1 + \sum |y_i^G|$, причем если у G нет центра, все $|y_i^G|$ делятся на p.

Задача 10.26 (!). Пусть G – группа порядка p^n. Докажите, что G разрешима.

Задача 10.27 (*). Пусть G – группа порядка p^2, p простое. Докажите, что G абелева.

Задача 10.28 (*). Приведите пример неабелевой группы порядка p^3, p – любое простое число.

Задача 10.29 (*). Рассмотрим множество S верхнетреугольных матриц $n \times n$ с единицей на диагонали над полем k. Докажите, что такие матрицы образуют подгруппу в $GL(n, k)$. Докажите, что эта группа разрешима. Найдите ее порядок для $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

10.2. Представления и инварианты

Определение 10.7. Представлением группы G в векторном пространстве V называется гомоморфизм $G \longrightarrow GL(V)$ из G в группу $GL(V)$ обратимых эндормофизмов V. Если задано представление G в V, то говорят, что G **действует на** V. **Подпредставление** V – это подпространство, которое сохраняется действием G.

Задача 10.30. Пусть G действует на векторных пространствах V, V'. Определим действие G на $V \otimes V'$ по формуле $g(v \otimes v') = g(v) \otimes g(v')$. Докажите, что это определение корректно и задает представление G на $V \otimes V'$.

Определение 10.8. Пусть G – группа, действующая на векторном пространстве V. Вектор $v \in V$ называется **инвариантным относительно действия** G, или **инвариантом** G, если $g(v) = v$ для любого $g \in V$. Пространство всех G-инвариантных векторов обозначается V^G.

Задача 10.31. Рассмотрим действие симметрической группы S_n на $V = R^n$, заданное перестановками координат. Найдите пространство инвариантов.

Задача 10.32 (*). В условиях предыдущей задачи, найдите пространство инвариантов действия S_n на $V \otimes V$.

Задача 10.33. Рассмотрим действие циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на $V = R^n$, заданное циклическими перестановками координат. Найдите пространство инвариантов.

Задача 10.34 (*). В условиях предыдущей задачи, найдите пространство инвариантов $(V \otimes V)^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ действия $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на $V \otimes V$.