Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Алгебра 12: полупростые и нильпотентные операторы

Артиновы алгебры над алгебраически замкнутым полем

Пусть R – артиново кольцо над полем k. Напомним, что в листке 9 мы построили каноническое разложение $R \cong \oplus_i e_i R_i$, где e_i – неразложимые ортогональные идемпотенты, а $e_i R$ – артиново кольцо, в котором нет нееденичных идемпотентов, причем это разложение единственно.

Задача 12.1 (!). Предположим, что R не имеет нееденичных идемпотентов, а k алгебраически замкнуто. Докажите, что если R полупросто, то $R = k$.

Задача 12.2 (!). Предположим, что R не имеет нееденичных идемпотентов, а k алгебраически замкнуто. Докажите, что $R = k \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ – нильрадикал.

Указание. Докажите, что $R/\mathfrak{n}$ полупросто, и примените предыдущую задачу.

Задача 12.3 (!). Пусть R – артиново кольцо над алгебраически замкнутым полем k. Докажите, что $R = R_{ss} \oplus \mathfrak{n}$, где R_{ss} – полупростое артиново подкольцо в R. Докажите, что $R_{ss} \subset R$ определяется однозначно.

Задача 12.4 (*). Верно ли это, если k не алгебраически замкнуто?

В дальнейшем, нам понадобится следующее утверждение.

Задача 12.5 (!). Пусть R полупростое артиново кольцо над полем k, а $R \longrightarrow R'$ – сюрьективный гомоморфизм k-алгебр. Докажите, что R' – тоже полупростое артиново кольцо.

Указание. Похожая задача была листке Алгебра 9.

Определение 12.1. Пусть R – алгебра над полем k. **Представлением** алгебры R называется гомоморфизм алгебр из R в $\operatorname{End}(V)$, где V – линейное пространство над k.

Задача 12.6. Пусть R – алгебра над полем k. Рассмотрим отображение $R \longrightarrow \operatorname{End}(R)$, заданное формулой $r \mapsto (v \longrightarrow rv)$. Докажите, что это представление.

Задача 12.7. Пусть R – алгебра над k, изоморфная конечному расширению k, а V – конечномерное представление R. Докажите, что $V \cong R^n$, то есть V изоморфно (как представление R) сумме нескольких копий R.

Задача 12.8. Пусть V – конечномерное представление алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$. Докажите, что V изоморфно $\mathbb{H}^n$.

Задача 12.9. Пусть G – группа, k – поле. **Групповой алгеброй** G над k (обозначается $k[G]$) линейное линейное пространство, свободно порожденное линейными комбинациями вида $\sum \lambda_i g_i$ ($\lambda_i \in k$, $g_i \in G$), с умножением, которое задается по формуле

$$(\sum \lambda_i g_i)(\sum \lambda'_j g'_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda'_j g_i g'_j.$$

Докажите, что это действительно алгебра. Докажите, что любое представление группы G однозначно продолжается до представления групповой алгебры.

Задача 12.10 (!). Пусть G_1, G_2 – группы, а $k[G_1 \times G_2]$ – групповая алгебра их произведения. Докажите, что $k[G_1 \times G_2] \cong k[G_1] \otimes k[G_2]$.

Задача 12.11 (!). Пусть $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ – произведение n копий $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Докажите, что $k[G] \cong k^{\oplus_{2^n}}$ (прямая сумма 2^n копий k).

Указание. Докажите, что $k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \cong k \oplus k$, а затем воспользуйтесь соотношением $k[G_1 \times G_2] \cong k[G_1] \otimes k[G_2]$.

Задача 12.12 (*). Рассмотрим группу Клейна (подгруппу порядка 8 в кватернионах, состоящую из $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$). Докажите, что ее групповая алгебра над $\mathbb{R}$ изоморфна $\mathbb{H} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Задача 12.13 (*). Пусть G – конечная абелева группа, а k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Докажите, что $k[G]$ – полупростое артиново кольцо над k. Выведите из этого, что $k[G]$ – прямая сумма $|G|$ копий k.

Указание. Воспользуйтесь критерием, приведенным в листке 9: артиново кольцо R над полем нулевой характеристики полупросто тогда и только тогда, когда след задает на R невырожденную форму.

Задача 12.14 (*). Пусть G – конечная абелева группа, k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, а $\rho: \ G \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ – представление G над k. Докажите, что V разлагается в прямую сумму одномерных G-инвариантных подпространств.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и задачей 12.5.

Задача 12.15 (*). Пусть G – конечная абелева группа, а $\mathbb{R}[G]$ – ее групповое кольцо над $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mathbb{R}[G]$ изоморфно прямой сумме нескольких копий $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Задача 12.16 (*). Пусть G – конечная абелева группа, а $\rho: \ G \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ – представление G над $\mathbb{R}$. Докажите, что V разлагается в прямую сумму одномерных и двумерных G-инвариантных подпространств.

Задача 12.17 (!). Пусть G – конечная абелева группа, а $\rho: \ G \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ – ее трехмерное представление над $\mathbb{R}$. Докажите, что в V найдется G-инвариантная прямая.

Полупростые операторы

Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве. Легко видеть, что подалгебра $\langle 1, A, A^2, A^3, \dots \langle \subset \operatorname{End}(V)$, порожденная A, коммутативна.

Определение 12.2. Оператор $A \in \operatorname{End}(V)$ называется **полупростым**, если порожденная им подалгебра в $\operatorname{End}(V)$ полупроста.

Задача 12.18. Докажите, что линейный оператор над алгебраически замкнутым полем полупрост тогда и только тогда, когда он диагонализуем.

Задача 12.19 (!). Пусть $k \subset \overline{k}$ – два поля, причем $\overline{k}$ алгебраически замкнуто, и пусть V – конечномерное векторное пространство над k. Рассмотрим $V \otimes_k \overline{k}$ как векторное пространство над $\overline{k}$. Докажите, что $\operatorname{End}(V) \otimes_k \overline{k}$ естественно изоморфно $\operatorname{End}_{\overline{k}}(V \otimes_k \overline{k})$. Это задает естественное вложение $\operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{End}_{\overline{k}}(V \otimes_k \overline{k})$. Докажите, что линейный оператор $A \in \operatorname{End}(V)$ полупрост тогда и только тогда, когда доответствующий линейный оператор в $V \otimes_k \overline{k}$ диагонализуем.

Задача 12.20. Пусть V – двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, наделенное положительно определенной билинейной симметричной формой, а $A \in \operatorname{End}(V)$ – ортогональный оператор. Докажите, что он полупрост.

Задача 12.21 (*). Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ произвольной конечной размерности, наделенное положительно определенной билинейной симметричной формой, а $A \in \operatorname{End}(V)$ – ортогональный оператор. Докажите, что он полупрост.

Задача 12.22 (*). Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, наделенное невырожденной билинейной симметричной формой, не обязательно положительно определенной, а $A \in \operatorname{End}(V)$ – ортогональный оператор. Всегда ли он полупрост?

Определение 12.3. Элемент артинового кольца над k называется **полупростым**, если он порождает полупростую подалгебру в R.

Задача 12.23. Пусть R – артиново кольцо над k, а $r \in R$ – полупростой элемент. Докажите, что при любом представлении $R \longrightarrow \operatorname{End}(V)$, r переходит в полупростой эндоморфизм V.

Указание. Воспользуйтесь задачей 12.5.

Задача 12.24 (!). Пусть V – конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем, а $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор. Докажите, что A разлагается в сумму полупростого и нильпотентного оператора, $A = A_{ss} + A_n$, которые коммутируют. Докажите, что это разложение единственно, и A_{ss}, A_n полиномиально выражаются через A.

Указание. Воспользуйтесь 12.3.

Задача 12.25 (*). Верно ли это, если основное поле k не алгебраически замкнуто?

Задача 12.26 (!). Пусть A – верхнетреугольная матрица, A_δ – ее диагональная часть. Докажите, что A и A_δ коммутируют.

Задача 12.27 (**). Пусть (V, g) – векторное пространство, снабженное билинейной кососимметричной формой, пусть A – антисимметрический оператор, а $A = A_{ss} + A_n$ – его разложение в полупростую и нильпотентную часть. Докажите, что A_{ss}, A_n антисимметричны.

Задача 12.28 (*). Может ли антисимметричный оператор над $\mathbb{C}$ быть нильпотентным?

Теорема Гамильтона-Кэли

Пусть k – любое поле, $k(t)$ – поле рациональных функций над k, V – n-мерное векторное пространство над k, а $B(t) \in \operatorname{End}(V)[t]$ – полином с коэффициентами в $\operatorname{End}(V)$. Напомним, что в такой ситуации $\det(B(t))$ – полином от t (см. листок 8). Рассмотрим $B(t)$ как $k(t)$-линейный эндоморфизм $V \otimes k(t)$ Рассмотрим эндоморфизм $\Lambda^{n-1}(V \otimes k(t))$ индуцированный $B(t)$, и пусть $\check{B}(t)$ – сопряженный к нему относительно естественного спаривания

$$\Lambda^{n-1}(V \otimes k(t)) \otimes V \otimes k(t) \longrightarrow \det V \otimes k(t)$$

эндоморфизм $V \otimes k(t)$. В листке 7 доказывается, что $B(t)\check{B}(t) = \check{B}(t)B(t) = \det(B(t))\,\mathsf{Id}_V$.

Задача 12.29. В этой ситуации, докажите, что $\check{B}(t)$ это $\operatorname{End}(V)$-значный полином: $\check{B}(t) \in \operatorname{End}(V)[t]$.

Указание. Выразите $\check{B}(t)$ через миноры $B(t)$.

Задача 12.30. Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$. Применив это рассуждение к $B = t - A$, докажите, что $(t-A)(t \check{-} A) = \mathsf{Chpoly}_A(t)$. Докажите, что коэффициенты многочлена $(t \check{-} A) \in \operatorname{End}(V)[t]$ коммутируют с A.

Задача 12.31. Пусть $R \subset \operatorname{End}(V)$ – некоторое подмножество. Обозначим через $Z(R)$ множество всех операторов $A' \in \operatorname{End}(V)$, коммутирующих со всеми операторами $r \in R$ (это множество называется **централизатором** R). Докажите, что $Z(R)$ – подалгебра в $\operatorname{End}(V)$.

Задача 12.32. Пусть $R \in \operatorname{End}(V)$ – некоторая подалгебра, $A_1 \in Z(A)$ – элемент централизатора R, $R[t]$ – алгебра R-значных полиномов, а $R[t] \xrightarrow{\varphi} R'$ – гомоморфизм алгебр. Обозначим через $R[A_1]$ подалгебру $\operatorname{End}(V)$, порожденную R и A_1. Докажите, что существует такой гомоморфизм $\varphi_0 : \ R[A_1] \longrightarrow R'$, что $\varphi_0\big|_R = \varphi\big|_R$ и $\varphi_0(A_1) = \varphi(t)$. Докажите, что эти условия однозначно определяют φ_0.

Задача 12.33. Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор, Применив предыдущую задачу, постройте гомоморфизм $Z(A)[t] \xrightarrow{\Psi} Z(A)$, переводящий t в A, и тождественный на $Z(A)$.

Задача 12.34 (!). (Теорема Гамильтона-Кэли) Рассмотрим соотношение $(t-A)(t \check{-} A) = \mathsf{Chpoly}_A(t)$ в $Z(A)[t]$. Применим к правой и левой частям уравнения гомоморфизм Ψ, построенный выше. Докажите, что получится следующее соотношение в алгебре $\operatorname{End}(V)$:

$$\mathsf{Chpoly}_A(A) = 0.$$

Задача 12.35 (*). Пусть $A, B \in \operatorname{End} V$ – линейные операторы. Рассмотрите функцию от двух переменных $Q(t_1, t_2) = \det(t_1 A + t_2 B)$, где $t_1 A + t_2 B$ рассматривается как линейный оператор на $V \otimes_k k(t_1, t_2)$, а $k(t_1, t_2) = k(t_1)(t_2)$ – поле рациональных функций над $k(t_1)$. Докажите, что $Q(t_1, t_2)$ – полином с коэффициентами в k. Докажите, что в кольце $\operatorname{End} V$ имеет место соотношение $Q(-B, A) = 0$.

Задача 12.36 (!). Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор, действующий на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем k. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – корни характеристического полинома оператора A. Рассмотрим пространство V_{λ_i} всех $v \in V$ таких, что $(A - \lambda_i)^{m_i}(v) = 0$, где m_i – кратность корня λ_i полинома $\mathsf{Chpoly}_A(t)$. Докажите, что $V = \oplus V_{\lambda_i}$, где λ_i пробегает все корни характеристического полинома A.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Гамильтона-Кэли

Замечание. Пространство V_{λ_i} называется **корневым пространством** для оператора A.

Минимальный многочлен и характеристический многочлен

Определение 12.4. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор, действующий на конечномерном пространстве над k. Рассмотрим последовательность эндоморфизмов $1, A, A^2, \dots \in \mathrm{End}(V)$. Поскольку пространство $\langle 1, A, A^2, \dots \rangle$ конечномерно, начиная с какого-то i все A^i выражаются через сумму такого вида: $A^N = \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i A^i$, где $\lambda_i \in k$, $l = \dim\langle 1, A, A^2, \dots \rangle$. Запишем такое соотношение для A^l: $A^l + \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i A^i = 0$. Напомним, что полином $P(t) = t^l + \lambda_{l-1}t^{l-1} + \dots + \lambda_0$ называется **минимальным полиномом** A и обозначается $\mathsf{Minpoly}_A(t)$.

Задача 12.37 (!). Докажите, что в алгебре $\mathrm{End}(V)$ выполняется такое соотношение:

$$\mathsf{Minpoly}_A(A) = 0.$$

Докажите, что любой полином $Q(t) = t^m + \mu_{m-1}t^{l-1} + \dots + \mu_0$, для которого $Q(A) = 0$, делится на $\mathsf{Minpoly}_A(t)$.

Задача 12.38. Докажите, что характеристический полином оператора делится на его минимальный полином.

Задача 12.39. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор.

а. Докажите, что A нильпотентен тогда и только тогда, когда $\mathsf{Minpoly}_A(t) = t^n$.

б. Докажите, что A является нееденичным идемпотентом тогда и только тогда, когда $\mathsf{Minpoly}_A(t) = t^2 - t$.

Задача 12.40. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор, действующий на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем k, а $V = \oplus V_{\lambda_i}$ – разложение V в сумму корневых подпространств. Пусть $P(t)$ – минимальный полином A, а $P_i(t)$ – минимальные полиномы для ограничений A на V_{λ_i}. Докажите, что $P(t) = P_1(t)P_2(t)\dots$. Докажите, что $P_i(t) = (t - \lambda_i)^k$, где $k \leqslant \dim V_{\lambda_i}$.

Указание. То, что $P_i(t) = (t - \lambda_i)^k$, ясно, поскольку оператор $A - \lambda_i$ на V_{λ_i} нильпотентен. То, что $P(t) = P_1(t)P_2(t)\dots$ легко следует из того, что все $P_j(A)$ $j \neq i)$ обратимы на V_{λ_i}.

Замечание. Таким же свойством мультипликативности обладает, очевино, и характеристический полином.

Задача 12.41. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор в n-мерном векторном пространстве. Докажите, что $\mathsf{Minpoly}_A(t) = (t - \lambda)^n$ тогда и только тогда, когда в некотором базисе A записывается в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots & & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

Указание. Заменив A на $A - \lambda\,\mathsf{Id}_V$, можно считать, что $\mathsf{Minpoly}_A(t) = t^n$. Возьмите такой вектор $v \in V$, что $(A-\lambda)^{n-1}(v) \neq 0$. Докажите, что $v, A(v), A^2(v), \dots, A^{n-1}(v)$ образуют базис в V, и в этом базисе A записывается в виде (12.1).

Замечание. Такая матрица называется **жордановой клеткой**. Мы будем обозначать ее через $J(n,\lambda)$.

Определение 12.5. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис в векторном пространстве, а A_i^j – матрица линейного оператора A, записанная в этом базисе. Предположим, что $e_1, \dots, e_n$ разбиты в группы (блоки) $[e_1, \dots, e_{k_1}][e_{k_1+1}, \dots, e_{k_2}]\dots$, причем A переводит каждый e_i в линейную комбинацию векторов, лежащих в том же блоке. В таком случае A составлен из квадратных кусков размера $k_i - k_{i-1}$, а вне этих квадратов располагаются нули:

$$\begin{pmatrix}
* & \dots & * & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
* & \dots & * & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & * & \dots & * & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & * & \dots & * & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & *\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & *
\end{pmatrix}$$

Такая матрица называется блочно-диагональной.

Задача 12.42. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор, действующий на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что минимальный полином $\mathsf{Minpoly}_A(t)$ равен характеристическому полиному $\mathsf{Chpoly}_A(t)$. Докажите, что в некотором базисе A записывается в виде блочно-диагональной матрицы, составленной из жордановых клеток $J(n_i,\lambda_i)$, причем все λ_i разные.

Указание. Воспользовавшись мультипликативностью $\mathsf{Minpoly}$ и Chpoly при разложении V в сумму корневых подпространств, сведите задачу к случаю $V = V_{\lambda_i}$. Теперь примените 12.41.

Определение 12.6. Пусть оператор A записывается в некотором базисе в виде блочно-диагональной матрицы, составленной из жордановых клеток. Эта запись называется **жордановой нормальной формой** оператора.

Сейчас мы докажем сначала единственность жордановой нормальной формы, а потом – ее существование. Мы работаем в предположении, что основное поле алгебраически замкнуто.

Задача 12.43. Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – нильпотентный оператор, с жордановой нормальной формой, составленной из клеток $J(0,n_1), \dots, J(0,n_k)$. Докажите, что число клеток в жордановой нормальной форме A равно размерности пространства V/AV. Докажите, что $A^jV/A^{j+1}V$ – число клеток $J(0,n_i)$ с $n_j \geqslant j$. Выведите из этого, что жорданова нормальная форма нильпотентного оператора определена однозначно, с точностью до перестановки клеток.

Задача 12.44 (!). Докажите, что жорданова нормальная форма любого оператора единственна, с точностью до перестановки клеток.

Указание. Раскладывая V в сумму корневых подпространств, сведите задачу к случаю $V = V_{\lambda_i}$. Заменяя A на $A - \lambda_i$, можно ограничиться нильпотентными операторами. Теперь все следует из предыдущей задачи.

Определение 12.7. Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор. Мы говорим, что A **циклически действует** на V, если в v найдется такой элемент, что $v, Av, A^2v, A^3v, \dots$ порождает V.

Задача 12.45. Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор, который циклически действует на V. Докажите, что $\mathsf{Minpoly}_A(t) = \mathsf{Chpoly}_A(t)$.

Указание. Если A действует циклически, то степень $\mathsf{Minpoly}_A(t)$ равна $\dim V$ равна степени $\mathsf{Chpoly}_A(t)$.

Задача 12.46. Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – такой линейный оператор, что V разлагается в сумму A-инвариантных подпространств, на которых A действует циклически. Докажите, что A приводится в некотором базисе к жордановой нормальной форме.

Указание. Воспользуйтесь задачей 12.42.

Модули над кольцом и жорданова нормальная форма

Определение 12.8. Пусть R – кольцо. **Модулем** над R называется абелева группа M, наделенная операцией $R \times M \longrightarrow M$, которая согласована со сложением в следующем смысле

(i) Для любых $\lambda \in R$, $u, v \in M$, имеем $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $u \in M$, имеем $(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

(ii) Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $u \in M$, имеем $\lambda_1(\lambda_2 u) = (\lambda_1\lambda_2)u$ (ассоциативность умножения).

(iii) Для любого $v \in M$, имеем $1v = v$, где 1 обозначает единицу в R.

Замечание. Это определение почти дословно повторяет определение векторного пространства над полем. Многие понятия, которые определялись для векторных пространств (например, гомоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, ядро, образ, факторпространство) определяются без каких-либо изменений и для модулей над кольцом.

Задача 12.47. Пусть R – алгебра над полем k. Для любого модуля M над R рассмотрим M как линейное пространство над $k \subset R$. Рассмотрим операцию умножения на элементы из r как эндоморфизмы M. Докажите, что это задает гомоморфизм $R \longrightarrow \operatorname{End}_k(M)$. Докажите, что все представления получаются таким образом.

Задача 12.48. Докажите, что любая абелева группа имеет единственную структуру модуля над $\mathbb{Z}$.

Определение 12.9. Рассмотрим группы R^n как модуль над R, с действием, заданным формулой $r \cdot (x_1, \dots, x_n) = (rx_1, \dots, rx_n)$. Этот модуль называется **свободным**. Фактор R^n по подмодулю называется **конечно порожденным**. Если M можно представить как фактор свободного модуля по конечно порожденному подмодулю, то M называется **конечно представимым**.

Определение 12.10. Пусть $\varphi : M \to M'$ – гомоморфизм модулей над алгеброй R. **Коядром** φ (обозначается $\operatorname{Coker} \varphi$) называется фактор M' по образу φ.

Задача 12.49. Пусть M – модуль над R. Докажите, что M конечно порожден тогда и только тогда, когда в нем есть набор таких элементов $m_1, \dots, m_N$ элементов, что любой элемент M представим в виде их линейной комбинации, $m = r_1 m_1 + \dots + r_N m_N$, $r_1, \dots, r_N \in R$.

Задача 12.50. Пусть M – модуль над R. Докажите, что M конечно представим тогда и только тогда, когда он изоморфен коядру какого-то гомоморфизма $\varphi : R^N \to R^M$ свободных R-модулей.

Задача 12.51 (!). Пусть k поле, а M – модуль над $k[t]$, который имеет конечную размерность над k. Докажите, что M конечно порожден и конечно представим над $k[t]$.

Указание. Рассмотрите M как векторное пространство над k, выберите базис $m_1, \dots, m_M \in M$, и возьмите эти элементы в качестве образующих. Затем докажите, что ядро отображения $\varphi : M \otimes_k k[t] \to M$ порождено элементами элементами вида $m_i \otimes t - tm_i \otimes 1$.

Задача 12.52 (!). Пусть M – конечная абелева группа. Докажите, что M конечно порождена и конечно представима как модуль над $\mathbb{Z}$.

Указание. Возьмите в качестве множества образующих $m_1, \dots, m_N \in M$ все элементы M.

Задача 12.53. Пусть R – некоторое кольцо, а V – модуль над R, представленный как коядро гомоморфизма $(R)^n \xrightarrow{\varphi} (R)^m$. Запишем φ матрицей A^i_j с коэффициентами в R. Пусть B^i_j – матрица, полученная из R гауссовыми преобразованиями по строкам и по столбцам (см. листок Алгебра 7). Докажите, что V изоморфно коядру гомоморфизма, соответствующего B^i_j.

Определение 12.11. Пусть R – кольцо, а $a \in R$ – некоторый элемент. Рассмотрим aR как модуль над R. **Циклическим модулем** над R называется фактормодуль R/aR.

Задача 12.54. Пусть M – некоторый Z-модуль. Докажите, что M циклический тогда и только тогда, когда соответствующая абелева группа циклическая.

Задача 12.55. Пусть M – $k[t]$-модуль. Докажите, что M циклический тогда и только тогда, когда для некоторого $v \in M$, $v, tv, t^2v, t^3v, \dots$ порождают M.

Задача 12.56 (!). Пусть R – такое кольцо, что любую матрицу размера $n \times m$ с коэффициентами в R можно привести к диагональному виду гауссовыми преобразованиями по строкам и по столбцам. Докажите, что всякий конечно порожденный и конечно представимый модуль над R изоморфен прямой сумме циклических.

Указание. Если $(R)^n \xrightarrow{\varphi} (R)^n$ задан диагональной матрицей, с a^i_i на диагонали, то коядро этого гомоморфизма имеет вид $\oplus_i R/a^i_i R$

Задача 12.57 (!). Пусть R – евклидово кольцо (см. листок Алгебра 2). Докажите, что любую матрицу размера $n \times m$ с коэффициентами из R можно привести к диагональному виду гауссовыми преобразованиями по строкам и по столбцам. Выведите из этого, что любой конечно порожденный и конечно представимый модуль над R – прямая сумма циклических.

Указание. Эта задача была в листке Алгебра 7.

Задача 12.58 (!). Пусть G – конечная абелева группа. Докажите, что G – прямая сумма циклических групп.

Задача 12.59 (!). Пусть V – модуль над $k[t]$, конечномерный над k. Докажите, что V – прямая сумма циклических модулей.

Указание. Кольцо $k[t]$ евклидово, а V конечно порожден и конечно представим, как следует из задачи 12.51.

Задача 12.60 (!). Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$ – линейный оператор. Докажите, что V разлагается в прямую сумму A-инвариантных подпространств, на каждом из которых A действует циклически. Выведите из этого, что если поле k алгебраически замкнуто, то A приводится к жордановой нормальной форме.

Указание. Рассмотрим действие $k[t]$ на V, заданное формулой $P(t)(v) = P(A)v$. Докажите, что V будет $k[t]$-модулем. Разложите V в прямую сумму циклических подмодулей: $V = \oplus V_i$. Докажите, что все V_i A-инвариантны, и A действует на них циклически.

Задача 12.61 (*). Найдите коммутативное кольцо и модуль над ним, который не разлагается в прямую сумму циклических.