Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

АЛГЕБРА 3: векторные пространства и линейные отображения

Векторные пространства

Напомним, что абелева (другой термин "коммутативная") группа – это группа, где соблюдается соотношение коммутативности

$$f \cdot g = g \cdot f$$

Операцию группового умножения в абелевых группах часто обозначают знаком $+$ и называют сложением; единичный элемент в таком случае обозначают 0 и называют нулем.

Определение 3.1. **Линейное**, или **векторное**, пространство V над полем k – это абелева группа, наделенная операцией $k \times V \mapsto V$ ("умножение вектора на элементы поля"), которая согласована со сложением в следующем смысле:

а. Для любых $\lambda \in k$, $u, v \in V$, имеем $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in k$, $u \in V$, имеем $(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

б. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in k$, $u \in V$, имеем $\lambda_1(\lambda_2 u) = (\lambda_1 \lambda_2)u$ (ассоциативность умножения).

в. Для любого $v \in V$, имеем $1v = v$, где $1 \in k$ - единица.

Элементы векторного пространства называются векторами, групповая операция – сложением векторов.

Задача 3.1. Дано поле k. Докажите, что k является векторным пространством над собой.

Задача 3.2. Докажите, что группа k^* обратимых элементов в k по умножению действует на любом линейном пространстве над k.

Замечание. Эта группа называется мультипликативной группой поля k.

Задача 3.3. Докажите, что группа параллельных переносов плоскости имеет структуру векторного пространства над $\mathbb{R}$.

Задача 3.4. Дано векторное пространство V над k. Докажите, что $0_k(v) = 0_V$, для любого $v \in V$. Здесь 0_k есть ноль в поле k, а 0_V - единичный элемент в V.

Задача 3.5. Дано поле K, и в нем подполе k. Докажите, что K является векторным пространством над k.

Задача 3.6. Дано поле k.

а. Обозначим через k^n множество n-ок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ элементов из k. Определите на k^n естественное сложение и действие k^* и докажите, что это будет линейное пространство.

б. Дано множество S. Обозначим через $k[S]$ множество таких наборов элементов

$$\langle a_{s_1}, a_{s_2}, \dots \rangle$$

из k, по одному для каждого элемента $s_i \in S$, что все a_s кроме конечного числа равны нулю. Введите на $k[S]$ структуру линейного пространства над k

Векторное пространство $k[S]$ называется векторным пространством, **порожденным** множеством S. Множество S естественным образом вкладывается в $k[S]$ – каждому элементу $s \in S$ сопоставляется такой набор $[s] \in k[S]$, что все $a_{s'}$ равны нулю, кроме a_s, которое равно 1.

Определение 3.2. Пусть A, B – два множества, на которых задано действие группы G. Говорится, что отображение $\kappa: A \to B$ **совместимо с действием** G если $\kappa(g(a)) = g(\kappa(a))$.

Напомним, что гомоморфизм абелевых групп есть отображение, которое сохраняет групповую операцию

$$f: G_1 \to G_2, \quad f(g + g') = f(g) + f(g') \tag{3.1}$$

Определение 3.3. Гомоморфизм векторных пространств над k есть отображение, которое сохраняет сложение векторов (см. (3.1)) и совместимо с действием k^*.

Иначе говоря, гомоморфизм векторных пространств есть отображение $f: V_1 \to V_2$, которое удовлетворяет условиям $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм и автоморфизм векторных пространств определяются так же, как для групп (колец, полей, и вообще всех алгебраических структур). В случае векторных пространств, вместо "гомоморфизм" часто говорят "линейный оператор" или "линейное отображение".

Напомним, что тождественное отображение из векторного пространства V в себя обозначается Id_V. Очевидно, Id_V – автоморфизм.

Задача 3.7. Докажите, что линейное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ биективно тогда и толко тогда, когда оно **обратимо**, т.е. существует такое линейное отображение $\psi: V_2 \to V_1$, что

$$\psi \circ \varphi = \mathsf{Id}_{V_1}, \varphi \circ \psi = \mathsf{Id}_{V_2}. \tag{3.2}$$

Достаточно ли выполнения только одного из этих условий?

Задача 3.8. Если векторные пространства V, V' изоморфны, то пишут $V \cong V'$. Докажите, что

а. Если $V \cong V'$, а $V' \cong V''$, то $V \cong V''$.

б. Если $V \cong V'$, то $V' \cong V$.

в. Всегда $V \cong V$.

Задача 3.9. Докажите, что множество гомоморфизмов из V_1 в V_2 образует линейное пространство (его часто обозначают $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$).

Задача 3.10. Докажите, что множество автоморфизмов V образуют группу (эту группу часто обозначают $GL(V)$). Коммутативна ли эта группа?

Определение 3.4. Подгруппа $V' \subset V$ векторного пространства V называется **векторное подпространством** или **линейным подпространством** V, если она сохраняется действием k^* (иначе говоря, для любых $\lambda \in k$, $v, v' \in V'$ имеем $\lambda(v) \in V'$, $v + v' \in V'$).

Линейное подпространство само очевидно является векторным пространством над тем же полем.

Задача 3.11. Дано множество S. Докажите, что множество всех отображений $\mathrm{Map}(S, k)$ из S в k – линейное пространство.

Задача 3.12 (*). Пусть дано векторное пространство W и множество S. Докажите, что любое отображение $S \to W$ единственным образом продолжается до линейного отображения $k[S] \to W$. Будет ли это верно, если в определении $k[S]$ разрешить наборы элементов поля, из которых бесконечное число не равно нулю?

Задача 3.13. Пусть $k[t]$ – множество полиномов $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$ с коэффициентами в поле k. Докажите, что это линейное пространство.

Задача 3.14. Рассмотрим множество $\mathrm{Map}(k, k)$ всех отображений из поля k в k. Для каждого полинома $P = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$ и каждого $\lambda \in k$ положим $\Psi_P(\lambda) = P(\lambda)$. Получаем отображение $\Psi : \ k[t] \to \mathrm{Map}(k, k)$, $P \mapsto \Phi_P$. Докажите, что это гомоморфизм.

Задача 3.15 (*). Пусть k – конечное поле. Докажите, что $\Psi : \ k[t] \to \mathrm{Map}(k, k)$ – не мономорфизм. Докажите, что это эпиморфизм.

Задача 3.16 (*). Пусть k – бесконечное поле. Докажите, что $\Psi : \ k[t] \to \mathrm{Map}(k, k)$ – мономорфизм.

Задача 3.17 (*). Докажите, что это не эпиморфизм.

Пусть дано множество A и бинарное отношение $\sim$ на элементах A (т.е. для некоторых пар $a, b \in A$ объявлено, что $a \sim b$). Говорят, что $\sim$ это **отношение эквивалентности**, если выполнены следующие условия:

а. Для любого элемента $a \in A$ верно $a \sim a$.

б. Если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$ (транзитивность).

в. Если $a \sim b$, то $b \sim a$ (симметричность).

Если задано отношение эквивалентности $\sim$, то **класс эквивалентности** элемента $a \in A$ – это множество всех таких элементов $a' \in A$, что $a' \sim a$. Легко проверить, что если $a \sim a'$, то класс эквивалентности a такой же, как у a'; поэтому можно говорить просто про класс эквивалентности, не указывая в нем конкретный элемент a. Пример отношения эквивалентости – отношение $a = b \mod n$ на множестве целых чисел. Задачу 3.8 на этом языке можно переформулировать так: "$V \cong V'$ есть отношение эквивалентности".

Замечание. Отношение эквивалентности встречается также при рассмотрении последовательностей Коши в листке Геометрия 1, хотя там этого термина мы явным образом не вводили.

Задача 3.18. Пусть V – векторное пространство, $V' \subset V$ – подпространство. Рассмотрим такое отношение эквивалентности на V: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $a + v = b$ для какого-то $v \in V'$. Докажите, что множество классов эквивалентности образует линейное пространство.

Определение 3.5. Это пространство называется **факторпространством** и обозначается V/V'.

Задача 3.19. Рассмотрим естественное отображение $V \to V/V'$, которое элемент переводит в его класс эквивалентности. Докажите, что это гомоморфизм и эпиморфизм.

Задача 3.20. Пусть $\varphi: V_1 \to V_2$ – линейное отображение, а $V_0 \subset V_1$ – подмножество всех элементов, которые переходят в ноль.

а. Докажите, что V_0 – линейное подпространство в V_1.

б. Докажите, что образ φ – иными словами, подмножество всех элементов $v \in V_2$ вида $\varphi(v')$, $v' \in V_1$ – линейное подпространство в V_2.

Определение 3.6. В этих предположениях, V_0 называется **ядром** φ.

Задача 3.21. Пусть $\varphi: V_1 \to V_2$ — линейный оператор. Докажите, что образ φ изоморфен факторпространству V_1/V_0, где V_0 — ядро φ.

Линейная оболочка, базис, размерность

Задача 3.22. Пусть V – векторное пространство над полем k, $x_1, \ldots, x_n$ – вектора в V. **Линейной комбинацией** векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется любой вектор вида $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_n$, где λ_1 – произвольные элементы из k. Докажите, что линейные комбинации векторов $x_1, \ldots, x_n$ образуют линейное подпространство в V.

Определение 3.7. Это подпространство называется **линейной оболочкой** $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Также говорят, что $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ – подпространство, **порожденное** векторами $x_1 \ldots, x_n$.

Задача 3.23. Постройте эпимоморфизм из k^n в $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Указание. Отобразите n-ку $(0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in k^n$ (единица на l-м месте) в x_l.

Определение 3.8. Вектора $x_1, \ldots, x_n$, называются **линейно независимыми**, если для любой линейной комбинации $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_n$, где хотя бы одно $\lambda_i \neq 0$, мы имеем $v \neq 0$

Задача 3.24. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – вектора векторного пространства V, а φ – эпиморфизм, построенный в задаче 3.23. Докажите, что φ инъективно тогда и только тогда, когда вектора $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы.

Определение 3.9. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – такие линейно независимые вектора в векторном пространстве V, что $V = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Тогда набор $x_1, \ldots, x_n$ называется **базисом** V.

Задача 3.25. Постройте базис в k^n.

Задача 3.26. Докажите, что векторное пространство с базисом $x_1, \ldots, x_n$ изоморфно k^n.

Задача 3.27. Пусть v – ненулевой вектор в $V \cong k^n$, $\langle v \rangle$ – порожденное им подпространство, а $V/\langle v \rangle$ – факторпространство. Докажите, что $V/\langle v \rangle$ изоморфно k^{n-1}.

Указание. Рассмотрите подпространство $V_l \subset V \cong k^n$, порожденное n-ками вида

$$\langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1}, 0, \lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n \rangle$$

(на l-м месте стоит 0). Это пространство очевидно изоморфно k^{n-1}. Докажите, что для какого-то $l = 1, 2, \ldots, n$ естественная проекция $V_l \to V/\langle v \rangle$ – изоморфизм.

Задача 3.28. Пусть $x_1, \ldots, x_l$ – линейно независимые вектора в $V \cong k^n$. Докажите, что $V/\langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle$ изоморфно k^{n-l}

Указание. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 3.29. Пусть $V_1 \subset V_2$ – подпространство в $V_2 \cong k^n$. Предположим, что $V_1 \cong k^m$. Докажите, что $m \leqslant n$.

Задача 3.30. Пусть $x_1, \ldots, x_l$ – базис в $V \cong k^n$. Докажите, что $l = n$.

Задача 3.31 (!). Пусть векторные пространства k^l и k^m изоморфны. Докажите, что $l = m$.

Определение 3.10. Векторное пространство V над k называется **конечномерным**, если оно изоморфно k^n. Число n в таком случае называется **размерностью** V. Это записывается так: $\dim V = n$. Как видно из предыдущей задачи, n определено однозначно.

Задача 3.32. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_l$ – такие линейно независимые вектора в линейном пространстве V, что $V' := V/\langle x_1, x_2, \ldots, x_l \rangle$ – ненулевое пространство. Пусть $x_{l+1} \in V$ – такой вектор, что его образ при естественной проекции в V' ненулевой. Докажите, что $x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}$ линейно независимы.

Задача 3.33 (!). Пусть V – линейное пространство, которое не конечномерно. Тогда существует бесконечная последовательность линейно независимых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots \in V$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.34 (!). Пусть $V \subset V'$ – подпространство конечномерного пространства. Докажите, что V конечномерно. Выведите из этого, что $\dim V \leqslant \dim V'$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.35. Пусть $V = V'/V''$ – факторпространство конечномерного пространства. Докажите, что V' конечномерно. Докажите, что $\dim V \leqslant \dim V'$. Выведите из этого, что $\dim V' = \dim V + \dim V''$.

Указание. Действуйте от противного: выберите в V бесконечную последовательность линейно независимых векторов, и поднимите эти вектора в V'.

Задача 3.36. Пусть $f : V \to V'$ – гомоморфизм векторных пространств одинаковой размерности n. Предположим, что f вложение, либо наложение. Докажите, что f – изоморфизм.

Линейные формы, билинейные формы

Определение 3.11. Пусть V – линейное пространство над k. **Линейной формой**, или **линейным функционалом** на V называется гомоморфизм линейных пространств из V в k. Пространство линейных форм на V обозначается V^*.

Задача 3.37. Дано конечномерное линейное пространство V. Докажите, что $\dim V = \dim V^*$.

Задача 3.38. Пусть k – поле, S – любое множество. Верно ли, что $(k[S])^* \cong \operatorname{Map}(S, k)$?

Задача 3.39 (!). Рассмотрим естественное отображение $V \overset{ev}{\to} V^{**}$, $v \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(v))$, вектор $v \in V$ переводит в форму $\lambda \mapsto \lambda(v)$ на V^*. Пусть V конечномерно. Докажите, что $V \overset{ev}{\to} V^{**}$ – изоморфизм.

Указание. Докажите, что это вложение, и воспользуйтесь задачей 3.36.

Задача 3.40 (**). Дано бесконечномерное линейное пространство V. Докажите, что $V \overset{ev}{\to} V^{**}$ – не изоморфизм.

Определение 3.12. Пусть U, V, W – линейные пространства над полем k. Отображение $U \times V \overset{\mu}{\to} W$, $u, v \mapsto \mu(u, v)$ называется **билинейным**, если для каждого u отображения $\mu(u, \cdot): V \to W$ и $\mu(\cdot, u): U \to W$ линейные.

Задача 3.41. Докажите, что сумма билинейных отображений билинейна. Докажите, что это задает структуру векторного пространства на множестве билинейных отображений $U \times V \to W$.

Пространство билинейных отображений обозначается $\operatorname{Hom}(U \otimes V, W)$. Причина этого в следующем:

Задача 3.42 (*). Даны векторные пространства U и V. Рассмотрим множество $U \times V$ и порожденное им пространство $k[U \times V]$. Элемент $k[U \times V]$, соответствующий паре $\langle u, v\rangle \in U \times$, будем обозначать через $u \otimes v$. Рассмотрим подпространство в нем, порожденное векторами вида $au \otimes v - a(u \otimes v)$, $u \otimes av - a(u \otimes v)$, $(u_1 + u_2) \otimes v - u_1 \otimes v - u_2 \otimes v$, $u \otimes (v_1 + v_2) - u \otimes v_1 - u \otimes v_2$, и обозначим факторпространство через $U \otimes V$. Докажите, что для любого W пространство $\operatorname{Hom}(U \otimes V, W)$ изоморфно множеству билинейных отображений из $U \times V$ в W.

Пространство $U \otimes V$ называется **тензорным произведением** пространств U и V.

Задача 3.43 (*). Размерность U, V, W равна a, b, c. Определите размерность $\operatorname{Hom}(U \otimes V, W)$.

Определение 3.13. Пусть V - векторное пространство над k. Билинейная форма на V есть билинейное отображение $V \times V \overset{\mu}{\to} k$. Билинейная симметрическая форма есть форма, удовлетворяющая соотношению $\mu(x, y) = \mu(y, x)$. Билинейная кососимметрическая форма есть форма, удовлетворяющая соотношению $\mu(x, y) = -\mu(y, x)$. Обозначим пространство билинейных симметрических форм за S^2V^*, билинейных кососимметрических форм за $\Lambda^2 V^*$, а всех билинейных форм за $(V \otimes V)^*$.

Определение 3.14. Мы говорим, что характеристика поля k не равна 2, если число $2 = 1 + 1$ обратимо в k.

Замечание. В поле из двух элементов это очевидно неверно.

Вплоть до конца этого раздела, мы предполагаем, что характеристика базового поля k не равна 2.

Определение 3.15. Если U, V – векторные пространства, то произведение $U \times V$ множеств U и V тоже наделено естественной структурой векторного пространства. Это произведение, рассмотренное как векторное пространство, называется **прямая сумма U и V** и обозначается $U \oplus V$.

Задача 3.44. В векторном пространстве W заданы такие подпространства U, V, что пересечение их состоит из одного элемента $0 \in V$, а линейная оболочка равна равна всему W. Докажите, что W изоморфно $U \oplus V$.

Замечание. В таком случае, также пишут, что $W = U \oplus V$.

Задача 3.45. Рассмотрим отображение симметризации из всех билинейных форм в симметрические $\mathsf{Sym}(\mu)(x,y) = \frac{1}{2}(\mu(x,y) + \mu(y,x))$ и отображение альтернирования $\mathsf{Alt}(\mu)(x,y) = \frac{1}{2}(\mu(x,y) - \mu(y,x))$. Докажите, что эти отображения задают линейные операторы

$$(V \otimes V)^* \stackrel{\mathsf{Sym}}{\to} S^2V^*, \quad (V \otimes V)^* \stackrel{\mathsf{Alt}}{\to} \Lambda^2V^*$$

Докажите, что сумма

$$\mathsf{Sym} \oplus \mathsf{Alt}: \ (V \otimes V)^* \to S^2V^* \oplus \Lambda^2V^*$$

задает изоморфизм.

Задача 3.46 (*). Пусть $\dim V = n$. Определите размерность S^2V^* и Λ^2V^*.

Задача 3.47. Пусть μ – билинейная симметрическая форма. Докажите соотношение $\mu(u + v, u + v) = \mu(v, v) + \mu(u, u) + 2\mu(u, v)$.

Задача 3.48 (!). Пусть μ – ненулевая билинейная симметрическая форма на V. Докажите, что $\mu(x, x) \neq 0$ для какого-то $x \in V$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 3.16. Пусть V – линейное пространство с заданной на нем билинейной симметричной или кососимметричной формой $\mu: \ V \times V \to k$. Для каждого $v \in V$, μ определяет линейную форму $\mu(v, \cdot): \ V \to k$. Мы говорим, что v лежит в **радикале** μ, если эта форма равна нулю.

Задача 3.49 (*). В этих предположениях, докажите, что радикал – линейное подпространство в V.

Радикал обозначается $\mathsf{rad}\,\mu$.

Задача 3.50 (*). Докажите, что $\mu(v + r, v' + r') = \mu(v, v')$ для $r, r' \in \mathsf{rad}\,\mu$.

Замечание. Из этого следует, что μ естественно определена на факторпространстве $V/\mathsf{rad}\,\mu$.

Определение 3.17. Билинейная симметричная (или кососимметричная) форма μ называется **невырожденной**, если ее радикал равен нулю. Невырожденная билинейная кососимметричная форма называется **симплектической**.

Задача 3.51. Пусть μ – невырожденная симметричная (или кососимметричная) билинейная форма на конечномерном векторном пространстве V. Определим отображение $V \to V^*$, $v \mapsto \mu(v, \cdot)$, переводящее v в форму $t \mapsto \mu(v, t)$. Докажите, что это изоморфизм.

Указание. Докажите, что это мономорфизм пространств одинаковой размерности.

Задача 3.52. Пусть μ – невырожденная симметричная (или кососимметричная) билинейная форма на конечномерном пространстве V, и $\lambda: V \to k$ – линейный функционал. Докажите, что существует такой вектор $v \in V$, что $\lambda(t) = \mu(v,t)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 3.18. Пусть V – пространство с билинейной симметричной (или кососимметричной) формой μ, $V_1 \subset V$ его линейное подпространство. Определим **ортогональное дополнение** $V_1^\perp$ как множество всех векторов $v \in V$ таких, что $\mu(v, v_1) = 0$ для всех $v_1 \in V_1$.

Задача 3.53 (!). В этих предположениях, пусть μ невырождена на V и на V_1. Предположим, что V_1 конечномерно. Тогда $V = V_1 \oplus V_1^\perp$.

Указание. То, что V_1 и $V_1^\perp$ не пересекаются, можно увидеть непосредственно. Осталось доказать, что каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы векторов из V_1 и $V_1^\perp$. Рассмотрим $\mu(v,\cdot)$ как функционал на V_1. Воспользовавшись предыдущей задачей, мы найдем $v_1 \in V_1$ такой, что форма $\mu(v - v_1, \cdot)$ равна нулю на V_1. Но это значит, что $v - v_1 \in V_1^\perp$.

Задача 3.54 (!). Выведите из этого такое утверждение. Пусть μ – билинейная симметрическая невырожденная форма на векторном пространстве V. Тогда в V есть такой базис $x_1, \ldots, x_n$, что $\mu(x_i, x_j) = 0$ для всех $i \neq j$, и $\mu(x_i, x_i) \neq 0$ для всех i.

Указание. Найдите вектор x такой, что $\mu(x,x) \neq 0$. Примените разложение $V = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$, полученное в предыдущей задаче. Воспользуйтесь индукцией.

Задача 3.55 (*). Пусть μ – билинейная симметрическая форма на V Тогда в V есть такой базис $x_1, \ldots, x_n$, что $\mu(x_i, x_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Такой базис называется **ортогональным**.

Задача 3.56 (*). Пусть μ – симплектическая форма на пространстве V. Докажите, что V четномерно. Найдите в V такой базис $x_1, ..., x_{2n}$, что

$$\mu(x_{2r-1}, x_{2r}) = -\mu(x_{2r}, x_{2r-1}) = 1$$

при $r = 1, 2, ..., n$, и $\mu(x_i, x_j) = 0$ для всех остальных пар (i, j).

Указание. Действуйте так же, как действовали в симметрическом случае.

Определение 3.19. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а μ – билинейная симметрическая форма на нем. Форма μ называется **положительно определенной**, если $\mu(x,x) > 0$ для любого ненулевого вектора x.

Задача 3.57. Пусть μ – положительно определенная билинейная форма на V. Тогда в V есть такой базис $x_1, \ldots, x_n$, что $\mu(x_i, x_j) = 0$ для всех $i \neq j$, и $\mu(x_i, x_i) = 1$ для всех i.

Определение 3.20. Такой базис называется **ортонормальным**.

Задача 3.58 (*). Пусть x, y – произвольные векторы в пространстве V, а μ – положительно определенная билинейная форма. Докажите неравенство

$$\frac{\mu(x,x) + \mu(y,y)}{2} \geqslant \mu(x,y).$$

Задача 3.59 (*). В тех же предположениях, докажите **неравенство Коши**:

$$\sqrt{\mu(x,x)\mu(y,y)} \geqslant \mu(x,y).$$

Задача 3.60 (*). Докажите **неравенство треугольника**

$$\sqrt{\mu(x,x)} + \sqrt{\mu(y,y)} \geqslant \sqrt{\mu(x+y,x+y)}.$$