Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

АЛГЕБРА 5: Алгебры над полем

Алгебры над полем

Зафиксируем поле k.

Напомним, что отображение $(V_1 \times V_2) \xrightarrow{\mu} V_2$ векторных пространств называется **билинейным**, если для любых $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, отображения

$$\mu(v_1, \cdot): \ V_2 \longrightarrow V_3, \ \mu(\cdot, v_2): \ V_1 \longrightarrow V_3$$

(один аргумент фиксируется, другой пробегает пространство V_2, V_1 соответственно) линейные. Еще говорят, что билинейное отображение есть "отображение, линейное по каждому аргументу". Для билинейных операций используется значок тензорного произведения (см. листок Алгебра 3): в вышеприведенном примере, мы пишем

$$\mu: \ V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_3.$$

Определение 5.1. Пусть A - векторное пространство над полем k, а $\mu: \ A \otimes A \longrightarrow A$ билинейная операция ("умножение"). (A, μ) называется **алгеброй над** k, если μ ассоциативно:

$$\mu(a_1, \mu(a_2, a_3)) = \mu(\mu(a_1, a_2), a_3)).$$

Произведение в алгебре обыкновенно записывается как $a \cdot b$. Если в алгебре задан элемент 1 такой, что $\mu(1, a) = \mu(a, 1) = a$ для всех $a \in A$, этот элемент называется **единичным**, а алгебра называется **алгебра с единицей**. **Гомоморфизм** $r: \ A \longrightarrow A'$ алгебр – это линейное отображение, которое сохраняет произведение, а **изоморфизм** алгебр – это обратимый гомоморфизм. **Подалгебра** алгебры есть линейное подпространство, замкнутое относительно умножения.

Задача 5.1. Пусть дана такая алгебра с единицей, что для любых a, b имеем $\mu(a, b) = \mu(b, a)$. Докажите, что это (коммутативное) кольцо.

Задача 5.2. Приведите пример алгебры без единицы.

Задача 5.3. Докажите, что единица единственна.

Задача 5.4 (*). Приведите пример некоммутативной алгебры без единицы.

Задача 5.5. Пусть V – векторное пространство, а $\mathrm{End}(V)$ – пространство линейных гомоморфизмов из V в V, с операцией композиции. Докажите, что $\mathrm{End}(V)$ – это алгебра.

Определение 5.2. В такой ситуации алгебра $\mathrm{End}(V)$ называется **матричной алгеброй**, и обозначается $\mathrm{Mat}(V)$.

Задача 5.6. Коммутативна ли алгебра $\mathrm{Mat}(V)$?

Задача 5.7. Пусть дан изоморфизм матричных алгебр $\mathrm{Mat}(V) \cong \mathrm{Mat}(V')$.

а. Предположим, что V, V' конечномерны Докажите, что V, V' изоморфны. Найдите множество всех изоморфизмов $a: V \longrightarrow V'$, которые совместимы с заданным изоморфизмом $\mathrm{Mat}(V) \cong \mathrm{Mat}(V')$.

б. **(*)** Докажите, что $V \cong V'$ для любых (возможно, бесконечномерных) V, V'. Используйте лемму Цорна. [1]

в. **(**)** Можно ли в (б) обойтись без аксиомы выбора?

Задача 5.8 (!). Дана алгебра A с единицей. Докажите, что A можно реализовать как подалгебру в $\mathrm{Mat}\,V$ для некоторого векторного пространства V (возможно, бесконечномерного).

Указание. Возьмите $V = A$.

Определение 5.3. Алгебра A с единицей над полем называется **телом**, если $A\backslash 0$ – группа по умножению. Иначе говоря, алгебра A называется телом, если все ненулевые элементы A обратимы.

Задача 5.9. Пусть $\mathbb{H}$ - четырехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, с базисом $1, I, J, K$. Докажите, что на $\mathbb{H}$ существует и единственна такая структура алгебры, что

1. $1 \cdot a = a$ для любого $a \in \mathbb{H}$,
2. $I^2 = J^2 = K^2 = -1$,
3. $I \cdot J = -J \cdot I = K$.

Определение 5.4. Алгебра $\mathbb{H}$ называется **алгеброй кватернионов**.

Задача 5.10 (!). Рассмотрим отображение “комплексного сопряжения” $z \longrightarrow \overline{z}$, заданное на $\mathbb{H}$ по формуле

$$a + bI + cJ + dK \longrightarrow a - bI - cJ - dK.$$

Докажите, что $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_2 \overline{z}_1$.

Задача 5.11. Докажите, что $z\overline{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, если $z = a + bI + cJ + dK$.

Задача 5.12 (!). Докажите, что $\mathbb{H}$ – тело.

Указание. Воспользуйтесь тем же аргументом, который использовался для доказательства обратимости комплексных чисел.

---

[1] Имеется в виду следующее утверждение. Пусть в V задана система подмножеств S, удовлетворяющая следующим свойствам.

а) Для любого $V_\alpha \in S$, не равного всему V, в S есть подмножество $V_{\alpha'}$, которое содержит V_α и ему не равно.

б) Пусть дан набор $S' \subset S$ из некоторых подмножеств V, лежащих в S, таких, что любые $V_\alpha, V_{\alpha'} \in S'$ лежат одно в другом: либо $V_\alpha \subset V_{\alpha'}$, либо $V_{\alpha'} \subset V_\alpha$. Тогда объединение всех $V_{\alpha_i} \in S'$ тоже лежит в S

Тогда V содержится в S. Лемма Цорна следует из аксиомы выбора.

Задача 5.13. Пусть в условии задачи 5.9 равенство $I^2 = J^2 = K^2 = -1$ заменили на $I^2 = -1$, $J^2 = K^2 = 1$, а второе равенство записали в виде $I \cdot J \cdot K = -1$ Докажите, что опять получится структура алгебры на $\mathbb{R}^4$ (эта алгебра называется **алгеброй пара-кватернионов**). Будет ли она телом?

Задача 5.14 (*). Докажите, что алгебра пара-кватернионов изоморфна $\operatorname{Mat}(\mathbb{R}^2)$.

Задача 5.15. Докажите, что конечномерная алгебра A с единицей является телом тогда и только тогда, когда в ней нет делителей нуля.

Алгебры, заданные образующими и соотношениями

Пусть задано векторное пространство V над k. Полилинейная форма φ на V – это отображение $V \times V \times V \times \ldots \longrightarrow k$, линейное по каждому аргументу. Мы записываем это в виде

$$\varphi: \ V \otimes V \otimes V \otimes \ldots \longrightarrow k.$$

Если φ, ψ – полилинейные i-форма и j-форма, отображение

$$\varphi \otimes \psi: \ \underbrace{V \times V \times V \times \ldots}_{i+j} \longrightarrow k,$$

заданное в виде

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, v_2, \ldots, v_{i+j}) = \varphi(v_1, \ldots, v_i)\varphi(v_{i+1}, \ldots, v_{i+j})$$

очевидно, тоже полилинейно. Таким образом задается произведение на пространстве полилинейных форм.

Задача 5.16. Докажите, что прямая сумма $\oplus_i \mathcal{M}^i V$ пространств $\mathcal{M}^i V$ i-линейных форм образует алгебру, относительно произведения, определенного выше.

Задача 5.17. Пусть V конечномерно. Докажите, что любой элемент алгебры полилинейных форм представим в виде линейной комбинации произведений элементов из V^* (в такой ситуации говорят, что алгебра **порождена** V^*).

Определение 5.5. Пусть V, W – векторные пространства над k. Рассмотрим пространство $U = \langle V \times W \rangle$, свободно порожденное парами векторов $v, w \in V, W$. Вектора U, соответствующие паре v, w, мы будем обозначать за $v \otimes w$. Отфакторизуем U по подпространству, порожденному следующими элементами:

$$\begin{array}{lll} (\lambda v) \otimes w - \lambda(v \otimes w), & v \otimes (\lambda w) - \lambda(v \otimes w), & \lambda \in k \\ (v + v') \otimes w - v \otimes w - v' \otimes w, & v \otimes (w + w') - v \otimes w - v \otimes w'. & \end{array}$$

Полученное факторпространство называется **тензорным произведением** V **и** W, и обозначается $V \otimes W$.

Задача 5.18 (!). Докажите, что $(V \otimes W)^*$ естественно изоморфно пространству билинейных форм на (V, W).

Задача 5.19. Найдите размерность $V \otimes W$, если $\dim V = n$, $\dim W = m$. Докажите, что $V \otimes W^*$ естественно изоморфно пространству гомоморфизмов из W в V.

Задача 5.20 (!). Докажите, что $U \otimes (V \otimes W)$ канонически изоморфно $(U \otimes V) \otimes W$.

Замечание. Это утверждение позволяет опускать скобки при записи: мы пишем $U \otimes V \otimes W$, подразумевая любую расстановку скобок (они все эквивалентны).

Замечание. Тензорное произведение V с собой i раз обозначается через $V^{\otimes i}$. Построенный выше изоморфизм ассоциативности позволяет снабдить $\bigoplus_i V^{\otimes i}$ ассоциативным умножением

$$V^{\otimes i} \times V^{\otimes j} \longrightarrow V^{\otimes j+j}$$

Определение 5.6. Свободная (или **тензорная**) алгебра, порожденная V – это алгебра $\bigoplus_i V^{\otimes i}$ с операцией умножения, заданной выше. Эта алгебра обозначается $T(V)$. Нулевая компонента $T(V)$ естественно отождествляется с основным полем k. В частности, $T(V)$ - алгебра с единицей.

Задача 5.21 (!). Пусть V – конечномерное векторное пространство. Докажите, что $T(V)$ изоморфна алгебре полилинейных форм на V^*.

Задача 5.22 (*). Пусть задано линейное отображение из V в некоторую алгебру A. Докажите, что оно однозначно продолжается до гомоморфизма алгебр $T(V) \longrightarrow A$.

Задача 5.23 (!). Пусть $\langle x_i \rangle$ – базис в V. Докажите, что базис в $T(V)$ задается всеми мономами вида $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots$.

Задача 5.24 (!). Пусть задано пространство V над k (“пространство образующих”). Пусть также задано подпространство $W \subset T(V)$ (“пространство соотношений”). Рассмотрим факторпространство $T(V)$ по подпространству $T(V)WT(V)$, порожденному векторами вида vwv', где $w \in W$. Пусть оно ненулевое. Докажите, что на этом факторпространстве существует естественная структура алгебры с единицей.

Определение 5.7. В условиях предыдущей задачи, пусть x_i – базис в V, а w_i - базис в W. Каждое соотношение $w_i = 0$ можно записать в виде некоммутативного полинома вида

$$\sum_I \alpha_{i_1,\dots,i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots = 0$$

где I пробегает какой-то набор мультииндексов, а $\alpha_{i_1,\dots,i_n}$ – коэффициенты из поля k. Алгебра $T(V)/T(V)WT(V)$ называется **алгеброй, заданной образующими v_i и соотношениями** w_i.

Задача 5.25. Докажите, что любую алгебру с единицей A можно задать образующими и соотношениями. Докажите, что если A конечномерна, то это можно сделать так, что пространство образующих V и пространство соотношений W тоже конечномерны.

Указание. Возьмите $A = V$.

Определение 5.8. Алгебра называется **конечно порожденной,** если ее можно задать образующими и соотношениями, как выше, причем пространство образующих V конечномерно. Алгебра называется **конечно представимой**, если ее можно задать в таком виде, причем пространство соотношений W тоже конечномерно.

Задача 5.26. Приведите пример алгебры, которая не конечно представима.

Задача 5.27 (*). Всякая ли конечно порожденная алгебра конечно представима?

Задача 5.28. Докажите, что алгебра $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}^2)$ конечно представима.

Задача 5.29. Задайте алгебру полиномов Лорана $k[t, t^{-1}]$ образующими и соотношениями.

Определение 5.9. Пусть V – векторное пространство с билинейной симметричной формой $g: \ V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим алгебру $Cl(V)$, порожденную V, и заданную соотношениями вида

$$v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 = g(v_1, v_2) \cdot 1,$$

где v_1, v_2 пробегает V. Эта алгебра называется **алгеброй Клиффорда** над основным полем k.

Задача 5.30. Представьте комплексные числа в виде алгебры Клиффорда над $\mathbb{R}$.

Задача 5.31. Найдите все алгебры Клиффорда над $\mathbb{R}$ для $\dim V = 1, 2$.

Задача 5.32 (!). Представьте кватернионы и пара-кватернионы в виде алгебры Клиффорда над $\mathbb{R}$.

Задача 5.33 (*). Пусть размерность V равна n. Чему равна размерность $Cl(V)$ как векторного пространства?

Задача 5.34 (**). Представьте алгебру матриц $\mathrm{Mat}(\mathbb{R}^{2^n})$ в виде алгебры Клиффорда.