Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

АЛГЕБРА 6: Алгебра Грассмана и определитель

Алгебра Грассмана

Определение 6.1. Алгебра A называется **градуированной**, если A представлена в виде $A = \oplus A^i$, где i пробегает $\mathbb{Z}$, и произведение действует так: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$. Вместо $\oplus_i A^i$ часто пишут $A^\bullet$, подразумевая все индексы сразу. Некоторые из подпространств A^i могут быть равны нулю. Единица алгебры (если она есть) всегда лежит в A^0.

Задача 6.1. Укажите естественную градуировку на $T(V)$.

Определение 6.2. Подпространство $W \subset A^\bullet$ градуированной алгебры называется **градуированным**, или **однородным**, если W есть прямая сумма компонент вида $W^i \subset A^i$.

Задача 6.2 (!). Пусть $W \subset T(V)$ – градуированное подпространство, Докажите, что алгебра, заданная пространством соотношений W – градуированная.

Задача 6.3. Пусть V векторное пространство, $\langle x_i \rangle$ – его базис. Рассмотрим подпространство $W \subset V \otimes V$, порожденное векторами вида $x \otimes y - y \otimes x$. Докажите, что алгебра полиномов $k[x_1, \dots, x_n]$ порождена образующими V и соотношениями W. Опишите естественную градуировку, унаследованную с $T(V)$.

Определение 6.3. Полученная алгебра называется **симметрическая алгебра пространства** V, и обозначается через $\mathsf{Sym}^\bullet(V)$.

Задача 6.4. Пусть $\dim V > 1$. Существует ли инъективный гомоморфизм алгебр $\mathsf{Sym}^\bullet(V) \longrightarrow T(V)$.

Определение 6.4. Пусть V – векторное пространство, а $W \subset V \otimes V$ – градуированное подпространство, порожденное векторами вида $x \otimes y + y \otimes x$ и векторами вида $x \otimes x$. Градуированная алгебра, заданная пространством образующих V и пространством соотношений W, называется **алгеброй Грассмана**, и обозначается как $\Lambda^\bullet(V)$. Пространство $\Lambda^i(V)$ называется **i-й внешней степенью** пространства V, а умножение в алгебре Грассмана – **внешним умножением**. Внешнее умножение обыкновенно записывают как $\wedge$.

Замечание. Про элементы грассмановой алгебры можно думать как про "антикоммутативные полиномы" на V.

Замечание. Грассманова алгебра - частный случай алгебры Клиффорда, определенной в листке Алгебра 5.

Задача 6.5. Докажите, что $\Lambda^1 V$ изоморфно V.

Задача 6.6. Пусть V конечномерно. Докажите, что $\Lambda^2(V)^*$ изоморфно пространству билинейных кососимметричных форм на V.

Задача 6.7. Рассмотрим подалгебру $\Lambda^{2\bullet}(V) \subset \Lambda^\bullet(V)$, состоящую из линейных комбинаций векторов четной градуировки. Докажите, что эта подалгебра коммутативна.

Определение 6.5. Вектор $\Lambda^\bullet(V)$ называется **четным**, если он лежит в четной компоненте градуировки, и **нечетным**, если он лежит в нечетной компоненте. Для четного либо нечетного x, определяется число $\tilde{x}$, которое называется **четностью** x. Оно равно нулю для x с четной градуировкой, и 1 для x с нечетной градуировкой.

Задача 6.8 (!). Докажите, что $xy = (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} yx$.

Задача 6.9 (*). Найдите все элементы $\eta \in \Lambda^2(V)$ такие, что $\eta^2 = 0$.

Задача 6.10 (!). Пусть $x_1, x_2, \dots$ – базис в $V \cong \Lambda^1 V$. Обозначим через $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \cdots$ произведение этих векторов в $\Lambda^\bullet(V)$. Докажите, что вектора вида $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \cdots$, причем $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$, задают базис в $\Lambda^\bullet(V)$.

Задача 6.11 (!). Пусть V – d-мерное векторное пространство. Найдите $\dim \Lambda^i(V)$. Докажите, что $\Lambda^d V$ одномерно.

Определение 6.6. Пространство $\Lambda^d V$ называется **пространством детерминантных векторов в** V.

Задача 6.12 (!). Пусть V – d-мерное векторное пространство, $x_1, x_2, \dots, x_d$ – его базис, а $\det := x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \cdots \wedge x_d$ – детерминантный вектор в $\Lambda^d V$. Для данной подстановки $I = (i_1, i_2, \dots, i_d)$ рассмотрим вектор $I(\det) := x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge x_{i_3} \cdots \wedge x_{i_d}$. Докажите, что $I(\det) = \pm \det$. Докажите, что это соответствие задает гомоморфизм из группы S_n подстановок в $\{\pm 1\}$. Докажите, что этот гомоморфизм отображает произведение нечетного числа транспозиций в -1, а произведение четного числа транспозиций – в 1.

Определение 6.7. Построенный выше гомоморфизм $S_n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ называется **знаком** подстановки. По историческим причинам, тут принято использовать аддитивную запись. Говорят, что подстановка **четная**, если ее знак равен 0, и **нечетная**, если ее знак равен 1.

Задача 6.13. Пусть подстановка разложена в произведение циклов:

$$I = (i_{1,1}, i_{2,1} \dots i_{k_1,1})(i_{1,2}, i_{2,2} \dots i_{k_2,2}) \dots$$

длин k_1, k_2 и так далее. Докажите, что I четная только и только тогда, когда среди всех k_i число четных четно.

Отныне и до конца этого раздела, мы предполагаем, что базовое поле k имеет характеристику 0.

Определение 6.8. Пусть $\eta \in V^{\otimes i}$ – вектор в i-й тензорной степени пространства V. Рассмотрим естественное действие S_i на $V^{\otimes i}$. Определим $\mathsf{Alt}(\eta)$ как

$$\mathsf{Alt}(\eta) := \frac{1}{i!} \sum_{I \in S_i} (-1)^{\sigma(I)} I(\eta).$$

Эта операция называется **альтернированием**. Говорят, что вектор $\eta \in V^{\otimes i}$ **тотально кососимметричен**, если $\eta = \mathsf{Alt}(\eta)$.

Задача 6.14. Пусть $\eta = \frac{1}{i!}\sum_{I\in S_i} I(\eta)$. Докажите, что $I(\eta)=\eta$ для любой подстановки $I\in S_i$.

Задача 6.15 (!). Пусть дан тотально кососимметричный вектор $\eta \in V^{\otimes i}$. Докажите, что $I(\eta) = (-1)^{\sigma(I)}\eta$ для любой подстановки $I \in S_i$.

Задача 6.16 (!). Докажите, что $\mathsf{Alt}(\mathsf{Alt}(\eta)) = \mathsf{Alt}(\eta)$ для любой η.

Задача 6.17. Рассмотрим тензор $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} \in V^{\otimes i}$. Докажите, что

$$\mathsf{Alt}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}) = -\mathsf{Alt}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_l}x_{i_l-1}\dots x_{i_k})$$

(во втором выражении x_{i_l} переставлен местами с x_{i_l-1}).

Задача 6.18. Докажите, что отображение $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k} \longrightarrow \mathsf{Alt}(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k})$ зануляется на всех тензорах вида awb, где w лежит в пространстве соотношений $\Lambda^\bullet(V)$. Выведите из этого, что определено естественное отображение $\Lambda^i(V) \longrightarrow R^i$ из $\Lambda^i(V)$ в пространство тотально кососимметричных тензоров.

Задача 6.19 (!). Докажите, что построенное выше естественное отображение $\Lambda^i(V) \longrightarrow R^i$ взаимно однозначно.

Задача 6.20 (!). Мы отождествили $\Lambda^i(V)$ и пространство тотально кососимметричных тензоров. Это задает мультипликативную структуру на кососимметричных тензорах. Докажите, что она устроена следующим образом – берется два тотально кососимметричных тензора $\alpha, \beta \in T(V)$, перемножаются в $T(V)$, затем к ним применяется Alt.

Задача 6.21. Пусть даны алгебры A и B над полем k. Определим мультипликативную структуру на $A\otimes B$ следующим образом: $a\otimes b\cdot a'\otimes b' = aa'\otimes bb'$. Докажите, что такое умножение задает на $A\otimes B$ структуру алгебры.

Определение 6.9. Тензорное произведение алгебр A и B – это пространство $A\otimes B$ с мультипликативной структурой, определенной выше. Если алгебры наделены градуировкой, градуировка задается на тензорном произведении по формуле $(A\otimes B)^n = \oplus_{i+j=n} A^i\otimes B^j$.

Задача 6.22 (!). Пусть V_1, V_2 – векторные пространства. Докажите, что $\mathsf{Sym}^\bullet(V)$ изоморфна (как алгебра) $\mathsf{Sym}^\bullet(V_1)\otimes \mathsf{Sym}^\bullet(V_1)$. Докажите, что $\Lambda^\bullet(V_1\oplus V_2)$ и $\Lambda^\bullet(V_1)\otimes\Lambda^\bullet(V_2)$ изоморфны, как векторные пространства. Будет ли этот изоморфизм изоморфизмом алгебр?

Задача 6.23. Докажите, что $\dim \Lambda^\bullet(V) = 2^{\dim V}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.24 (*). Рассмотрим отображение

$$V\otimes \Lambda^i(V) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{i+1}(V),$$

заданное формулой $x\otimes\eta \mapsto x\wedge\eta$. Зафиксировав η, получаем линейный оператор $L_\eta : V \longrightarrow \Lambda^{i+1}(V)$. Докажите, что для $\eta\neq 0$ имеет место неравенство $\dim\ker L_\eta \leqslant i$.

Задача 6.25 (*). Пусть в предыдущей задаче имело место равенство $\dim\ker L_\eta = i$. Докажите, что в этом случае η представляется в виде $\eta = x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_i$ для каких-то векторов $x_1,\dots,x_i\in V$.

Задача 6.26 (*). Пусть $P\in \mathsf{Sym}^i(V^*)$ – симметрическая i-форма на V. Предположим, что $P(v,v,v,\dots)=0$ для всех $v\in V$. Может ли P быть ненулевой?

Определитель

Задача 6.27. Пусть дано одномерное векторное пространство V над k. Докажите, что $\operatorname{End} V$ естественно изоморфно k.

Задача 6.28 (!). Пусть заданы линейное пространство V и линейный оператор $A \in \operatorname{End}(V)$. Докажите, что действие A на $V \cong \Lambda^1 V$ продолжается единственным образом до сохраняющего градуировку гомоморфизма из $\Lambda^\bullet V$ в себя.

Определение 6.10. Пусть заданы d-мерное векторное пространство V над k и линейный оператор $A \in \operatorname{End}(V)$. Рассмотрим индуцированный A эндоморфизм пространства детерминантных векторов

$$\det A \in \operatorname{End}(\Lambda^d(V))$$

Поскольку $\Lambda^d(V)$ одномерно, пространство $\operatorname{End}(\Lambda^d(V))$ канонически отождествлено с k. Это позволяет рассматривать $\det A$ как число, т.е. элемент k. Это число называется **определителем**, или **детерминантом** линейного оператора A.

Задача 6.29 (!). Пусть $x_1, \dots, x_d$ – набор из d векторов в векторном пространстве V. Докажите, что их произведение $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots$ в $\Lambda^\bullet(V)$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.

Задача 6.30. Пусть оператор $A \in \operatorname{End}(V)$ имеет ненулевое ядро (такой оператор называется **вырожденным**). Докажите, что $\det A = 0$.

Задача 6.31. Пусть оператор $A \in \operatorname{End}(V)$ обратим (такой оператор называется **невырожденным**). Докажите, что $\det A \neq 0$.

Задача 6.32 (!). Докажите, что det задает гомоморфизм из группы $GL(V)$ обратимых матриц в k^*, мультипликативную группу всех ненулевых элементов k.

Задача 6.33 (!). Пусть даны два векторных пространства V и V', а A, A' – их эндоморфизмы. Тогда $A \oplus A'$ задает эндоморфизм $V \oplus V'$. Докажите, что $\det(A \oplus A') = \det A \det A'$.

Задача 6.34. Пусть дано конечномерное векторное пространство V, снабженное положительно определенной билинейной симметричной формой g. Напомним, что эндоморфизм $A \in \operatorname{End} V$ называется **ортогональным**, если он сохраняет g, т.е. для любых $x, y \in V$ имеем $g(Ax, Ay) = g(x, y)$. Докажите, что ортогональный оператор всегда обратим. Пусть задан ортогональный оператор в $\mathbb{R}^2$. Какие значения может принимать $\det A$?

Задача 6.35 (*). Пусть V векторное пространство, снабженное

а. невырожденной билинейной симметричной формой g

б. невырожденной билинейной кососимметричной формой g

в. **(**)** невырожденной билинейной формой (то есть изоморфизмом $g: V \longrightarrow V^*$).

Пусть $A \in \operatorname{End}(V)$ – линейный оператор, сохраняющий g. В каждом из этих случаев докажите, что A обратим, и найдите все значения, которые может принимать $\det A$.