Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Алгебра 8: Линейная алгебра: характеристический полином

Характеристический полином

Определение 8.1. Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор на векторном пространстве V. Пусть задан такой вектор $v \in V$, что $A(v) = \lambda v$. Тогда v называется **собственным вектором**, а λ – **собственным значением** оператора A.

Задача 8.1. Пусть V – двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное невырожденной билинейной симметрической формой g, а $A \in \operatorname{End} V$ – ортогональный автоморфизм, который не равен $\pm Id$. Докажите, что если g положительно или отрицательно определена (такие нормы называются **знакоопределенными**), то A не имеет собственных векторов. Докажите, что если g не знакоопределена, то у A есть два линейно независимых собственных вектора. Какие собственные значения могут быть у A в таком случае?

Задача 8.2. Рассмотрим множество дробей вида $\frac{P(t)}{Q(t)}$, где P, Q – многочлены над k, и $Q \neq 0$. Рассмотрим отношение эквивалентности, порожденное $\frac{P(t)}{Q(t)} \sim \frac{P'(t)}{Q'(t)}$, если

$$P(t) = Z(t)P'(t), \qquad Q(t) = Z(t)Q'(t)$$

Определим сложение и умножение на классах эквивалентности обычным способом:

$$\frac{P(t)}{Q(t)} + \frac{P'(t)}{Q'(t)} = \frac{P(t)Q'(t) + P'(t)Q(t)}{Q(t)Q'(t)}, \qquad \frac{P(t)}{Q(t)}\frac{P'(t)}{Q'(t)} = \frac{P(t)P'(t))}{Q(t)Q'(t)}$$

Докажите, что получится поле.

Определение 8.2. Это поле называется **полем рациональных функций от одного переменного**, или просто **полем рациональных функций**, и обозначается $k(t)$.

Задача 8.3. Докажите, что это поле не алгебраично над k.

Задача 8.4. Пусть дано n-мерное векторное пространство V над k, а $K \supset k$ – другое поле. Рассмотрим тензорное произведение $K \otimes_k V$, снабженное естественным действием мультипликативной группы K^*. Докажите, что это будет линейное пространство. Докажите, что это линейное пространство конечномерно над K, если V конечномерно над k. Найдите размерность $K \otimes_k V$ над K, если известна размерность V над k.

Пусть даны векторное пространство V над k и линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$ в нем. Тензорно домножая V над $k(t)$ над k, мы получим векторное пространство $V \otimes_k k(t)$. Действие A естественно продолжается до линейного оператора на $V \otimes k(t)$. Злоупотребляя обозначениями, мы будем обозначать соответствующий линейный оператор $A \in \operatorname{End}_{k(t)}(V \otimes_k k(t))$ через A.

Задача 8.5 (!). Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор на n-мерном векторном пространстве V над k, а $\det(t \cdot Id - A) \in k(t)$ – определитель оператора $t \cdot Id - A$, действующего на $V \otimes_k k(t)$. Докажите, что это полином над k степени n, со старшим коэффициентом 1.

Определение 8.3. Этот полином называется **характеристическим полиномом оператора** A и обозначается $\mathsf{Chpoly}_A(t)$.

Задача 8.6 (!). Пусть λ – корень характеристического полинома A. Докажите, что он является собственным значением A. Докажите, что все собственные значения A являются корнями $\mathsf{Chpoly}_A(t)$.

Указание. Оператор $\lambda Id - A$ имеет ядро тогда и только тогда, когда λ - корень $\mathsf{Chpoly}_A(t)$.

Задача 8.7. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – собственные векторы с попарно различными собственными значениями. Докажите, что они линейно независимы.

Задача 8.8. Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор на n-мерном векторном пространстве. Предположим, что у характеристического полинома n корней, причем все разные. Докажите, что A **диагонализуем**, иначе говоря, представляется диагональной матрицей в некотором базисе.

Задача 8.9 (*). Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество всех линейных операторов над V как векторное пространство с естественной топологией на нем. Докажите, что диагонализуемые операторы плотны в $\operatorname{End} V$. Докажите, что недиагонализуемые операторы нигде не плотны.

Задача 8.10 (!). Докажите, что $\mathsf{Chpoly}_A(t) = \mathsf{Chpoly}_{BAB^{-1}}(t)$ для любого обратимого линейного оператора B.

Определение 8.4. Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор на n-мерном векторном пространстве, а $\mathsf{Chpoly}_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \dots$ – его характеристический полином. Коэффициент a_{n-1} называется **следом** A и обозначается $\operatorname{tr} A$.

Задача 8.11 (!). Пусть A задан матрицей A^i_j. Докажите, что $\operatorname{tr} A = \sum A^i_i$ (сумме всех чисел на диагонали матрицы).

Задача 8.12 (*). Докажите, что $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, для любых линейных операторов A, B.

Замечание. Если B обратим, это следует из 8.10.

Задача 8.13. Пусть V - конечномерное линейное пространство. Рассмотрим гомоморфизм $V \otimes V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, V)$, переводящий $v \otimes \lambda \in V \otimes V^*$ в $v' \longrightarrow \lambda(v') \otimes v \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Докажите, что это изоморфизм.

Задача 8.14 (*). Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве, а $A \otimes A^*$ – индуцированный A оператор на $V \otimes V^*$. Рассмотрим тензор $\mathsf{Id} \in V \otimes V^*$, соответствующий тождественному оператору при изоморфизме $\operatorname{Hom}(V, V) \cong V \otimes V^*$, и естественное спаривание $V \otimes V^* \xrightarrow{\mu} k$. Докажите, что $\operatorname{tr} A = \mu(A \otimes A^*(\mathsf{Id}))$.

Верхнетреугольные матрицы

Задача 8.15. Пусть $V' \subset V$ – k-мерное подпространство в векторном пространстве, а $A \in \operatorname{End} V$ – оператор, сохраняющий V' (то есть переводящий V' в себя). Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в V таким образом, что $e_1, \dots, e_k \in V'$. Докажите, что A в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \end{pmatrix}.$$

(нижний левый прямоугольник $k \times (n-k)$ заполнен нулями, остальные коэффициенты произвольные).

Определение 8.5. Пусть дано n-мерное векторное пространство V. Последовательность подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ называется **флагом** (или **полным флагом**), если $\dim V_i = i$. Базис $e_1, \dots, e_n$ называется **согласованным с флагом**, если $e_i \in V_i$. Мы говорим, что линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$ **сохраняет флаг** $\{V_i\}$, если $A(V_i) \subset V_i$.

Задача 8.16 (!). Пусть $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ – флаг в V, $e_1, \dots, e_n$ – согласованный с ним базис, а $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор. Докажите, что A сохраняет некоторый флаг $\{V_i\}$ тогда и только тогда, когда A представляется верхнетреугольной матрицей в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Задача 8.17 (!). Пусть V – векторное пространство над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что $A \in \operatorname{End} V$ сохраняет флаг $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ (а следовательно, представляется верхнетреугольной матрицей в каком-то базисе).

Указание. Возьмите в качестве V_1 любой собственный вектор, а затем примените индукцию.

Задача 8.18 (*). Пусть задан обратимый линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$ на n-мерном пространстве, у которого есть n попарно различных собственных значений. Рассмотрим подалгебру R_A в $\operatorname{End} V$, порожденную A. Докажите, что $\dim R_A = n$.

Указание. Воспользуйтесь определителем Вандермонда.

Задача 8.19 (*). Пусть задано два коммутирующих линейных оператора. Докажите, что они представляются верхнетреугольными матрицами в одном и том же базисе $e_1, \dots, e_n$.

Задача 8.20 (*). Пусть задано l штук попарно коммутирующих линейных операторов. Докажите, что они представляются верхнетреугольными матрицами в одном и том же базисе $e_1, \dots, e_n$.

Симметрические и кососимметрические матрицы

Определение 8.6. Матрица называется **симметричной**, если она равна своей транспонированной: $A = A^\perp$. Матрица называется **кососимметричной**, или **антисимметричной**, если $A = -A^\perp$.

Определение 8.7. Пусть V – векторное пространство, снабженное невырожденной билинейной симметрической формой g, а $A \in \operatorname{End} V$ – линейный оператор. Оператор A называется **симметрическим**, если для любых $x, y \in V$ имеем $g(Ax, y) = g(x, Ay)$, и **кососимметрическим**, если имеем $g(Ax, y) = -g(x, Ay)$.

Определение 8.8. Пусть V – векторное пространство, снабженное невырожденной билинейной симметрической формой g. Напомним, что базис $e_1, \dots, e_n \in V$ называется **ортонормированным**, если разные e_i попарно ортогональны, а $g(e_i, e_i) = 1$.

Задача 8.21. Пусть V – векторное пространство, снабженное билинейной симметрической невырожденной формой g, а $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис. Рассмотрим линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$. Докажите, что A симметрический тогда и только тогда, когда его матрица симметричная, и кососимметрический тогда и только тогда, когда его матрица анти-симметричная.

Задача 8.22. Пусть V – конечномерное векторное пространство, снабженное билинейной невырожденной формой g. Докажите, что любая билинейная форма получается как $g(Ax, y)$ для какого-то линейного оператора A, и такой оператор единственный.

Замечание. В условиях предыдущей задачи, положим, что g симметрическая. Очевидно, форма $g(Ax, y)$ симметрическая тогда и только тогда, когда A симметрический, и кососимметрическая, тогда и только тогда, когда A кососимметрический.

Задача 8.23. Пусть V – конечномерное векторное пространство. Пространство билинейных форм естественно изоморфно $V^* \otimes V^*$, а пространство $\operatorname{End} V$ естественно изоморфно $V \otimes V^*$. Форма g устанавливает изоморфизм между V и V^*. Это дает изоморфизм между $V^* \otimes V^*$ и $V \otimes V^*$, т.е. между билинейными формами и линейными операторами. Докажите, что этот изоморфизм совпадает с построенным в задаче 8.22.

Задача 8.24 (!). Пусть V - конечномерное векторное пространство, снабженное невырожденной билинейной симметрической формой g, а A – симметрический оператор. Предположим, что A сохраняет подпространство $V' \subset V$. Докажите, что A сохраняет ортогональное дополнение к V'.

Определение 8.9. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $V \otimes \mathbb{C}$ его тензорное произведение с $\mathbb{C}$. Поскольку $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$, имеет место изоморфизм $V \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus \sqrt{-1}\,V$. Это значит, что любого вектора $v \in V \otimes \mathbb{C}$ можно рассмотреть **вещественную** и **мнимую** часть $\operatorname{Re} v$, $\operatorname{Im} v$.

Задача 8.25. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное билинейной симметрической формой g. Рассмотрим комплексное векторное пространство $V \otimes \mathbb{C}$, и продолжим g на $V \otimes \mathbb{C}$ по линейности до билинейной комплекснозначной формы. Для любого вектора $v \in V \otimes \mathbb{C}$ обозначим через $\overline{v}$ вектор $\operatorname{Re}(v) - \sqrt{-1}\,\operatorname{Im}(v)$ (такой вектор называется **комплексно сопряженным к** v). Докажите, что $g(v, \overline{v}) = g(\operatorname{Re}(v), \operatorname{Re}(v)) + g(\operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(v))$.

Задача 8.26 (!). Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ размерности n, снабженное положительно определенной билинейной симметрической формой g (такое пространство называется **евклидовым**), пусть A – симметрический оператор, а $P(t)$ – его характеристический полином. Докажите, что у $P(t)$ ровно n вещественных корней.

Указание. Рассмотрим действие A на $V \otimes \mathbb{C}$, и пусть v – собственный вектор, соответствующий невещественному собственному значению. Докажите, что $g(v, \overline{v}) = 0$. Воспользуйтесь задачей 8.25.

Задача 8.27 (!). Пусть V – евклидово пространство, а $A \in V$ – симметрический оператор. Докажите, что у V есть ортогональный базис из собственных векторов A. Другими словами, A диагонализуем в некотором ортонормированном базисе.

Указание. Воспользуйтесь задачами 8.26 и 8.24.

Задача 8.28 (*). Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное невырожденной, но не обязательно положительно определенной билинейной симметрической формой. Любой ли симметрический оператор диагонализуем?

Задача 8.29 (*). Пусть V – евклидово пространство, а $A \in V$ – кососимметрический оператор. Обозначим через ω кососимметричную форму $g(A\cdot, \cdot)$. Пусть v – собственный вектор оператора A^2 (с ненулевым собственным значением). Докажите, что ω невырождена на линейной оболочке $\langle v, A(v) \rangle$.

Задача 8.30 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что в некотором ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_{2m}, e_{2m+1}, \ldots, e_n$ ω записывается в виде

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i e^{i+1} \wedge e^{i+2}.$$

Задача 8.31 (*). Пусть A – кососимметрический оператор, заданный в евклидовом пространстве, а $\det A$ – его определитель. Рассмотрим $\det A$ как полином от матричных коэффициентов A (в некотором базисе). Докажите, что в нечетномерном пространстве V, этот определитель равен тождественно нулю. Докажите, что $\det A$ – полный квадрат другого полинома от матричных коэффициентов. Этот полином называется **пфаффиан** A.

Указание. Пусть $2m = \dim V$. Запишем билинейную форму ω как выше. Докажите, что ω^m (взятая как элемент грассмановой алгебры $\Lambda^*(V^*)$) пропорциональна $e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{2m}$ с полиномиальным коэффициентом Q, причем $Q^2 = \det A$.