Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Алгебра 9: Артиновы кольца и идемпотенты

Определение 9.1. Пусть дана коммутативная R алгебра с единицей над полем k. Говорят, что R **артиново кольцо над полем** k, если R конечномерна как векторное пространство.

Задача 9.1. Пусть дан линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$. Рассмотрим подалгебру в $\operatorname{End} V$, порожденную k и A. Докажите, что это артиново кольцо над k.

Определение 9.2. Элемент $r \in R$ в алгебре (или кольце) R называется **нильпотентным**, если $r^k = 0$, для какого-то $k \in \mathbb{N}$.

Задача 9.2. Пусть r, r' – нильпотентные элементы в артиновом кольце над полем. Докажите, что любая линейная комбинация r, r' нильпотентна.

Задача 9.3. Пусть r, r' – нильпотентные элементы в алгебре $\operatorname{Mat}(V)$. Всегда ли $r + r'$ нильпотентен?

Замечание. Нильпотентный элемент в алгебре матриц называется **нильпотентным оператором**.

Задача 9.4. Пусть дан нильпотентный оператор $A \in \operatorname{End} V$. Докажите, что в V есть такая цепочка подпространств $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_k = 0$, что $A(V_i) = V_{i+1}$

Задача 9.5 (!). Пусть дан нильпотентный оператор $A \in \operatorname{End} V$. Докажите, что в некотором базисе A выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(т.е. как верхнетреугольная матрица с нулями на диагонали). Докажите, что любая матрица такого вида нильпотентна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.6 (!). Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – нильпотентный оператор. Докажите, что $\mathsf{tr}(A) = \det(A) = 0$, а $\mathsf{Chpoly}_A(t) = t^{\dim V}$.

Определение 9.3. Пусть R – кольцо. Подмножество $\mathfrak{m} \subset R$ называется **идеалом**, если следующие свойства выполняются.

(i) $\mathfrak{m}$ замкнуто относительно сложения (т.е. сумма элементов из $\mathfrak{m}$ принадлежит $\mathfrak{m}$)

(ii) Для любого $m \in \mathfrak{m}$, $a \in R$, произведение am лежит в R.

Задача 9.7. Пусть дан гомоморфизм колец $R \longrightarrow R'$. Докажите, что ядро этого гомоморфизма – идеал.

Задача 9.8. Пусть дан сюръективный гомоморфизм $f : R_1 \to R_2$ алгебр над полем k, причем R_1 – поле. Докажите, что либо $R_2 = 0$, либо f – изоморфизм.

Задача 9.9. Дан идеал $\mathfrak{m} \subset R$. Рассмотрим фактор $R/\mathfrak{m}$, то есть множество смежных классов вида $r + \mathfrak{m}$. Постройте на $R/\mathfrak{m}$ естественную структуру кольца.

Определение 9.4. Кольцо $R/\mathfrak{m}$ называется **факторкольцом** кольца R. Идеал называется **простым**, если соотвествующее факторкольцо ненулевое и не имеет делителей нуля, и **максимальным**, если оно, кроме того, поле.

Задача 9.10. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Задача 9.11 (*). Опишите все максимальные идеалы в кольце полиномов $k[t]$.

Задача 9.12. Рассмотрим множество всех нильпотентных элементов в кольце R. Докажите, что это идеал.

Определение 9.5. Этот идеал называется **нильрадикалом** кольца R.

Задача 9.13 (!). Рассмотрим фактор кольца $R/\mathfrak{n}$ по его нильрадикалу. Докажите, что в $R/\mathfrak{n}$ нет ненулевых нильпотентов.

Задача 9.14. Пусть дан идеал в артиновом кольце, не совпадающий со всем кольцом. Докажите, что он содержится в максимальном.

Задача 9.15 (*). Пусть дан идеал в кольце (не обязательно артиновом), не совпадающий со всем кольцом. Докажите, что он содержится в максимальном.

Указание. Используйте лемму Цорна.

Определение 9.6. Артиново кольцо R называется **полупростым**, если в нем нет ненулевых нильпотентов.

Определение 9.7. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ – алгебры над полем. Возьмем прямую сумму $\oplus R_i$, с естественным (почленным) умножением и сложением. Получившаяся алгебра называется **прямой суммой** R_i, обозначается $\oplus R_i$.

Задача 9.16. Докажите, что прямая сумма полупростых артиновых колец полупроста.

Задача 9.17. Пусть v – элемент конечномерной алгебры R над k. Рассмотрим подпространство R, порожденное $1, v, v^2, v^3, \ldots$ (для всех степеней v). Пусть оно n-мерно. Докажите, что $P(v) = 0$ для некоторого полинома $P = t^{n+1} + a_n t^n + \ldots$ с коэффициентами из k. Докажите, что такой полином единственен.

Определение 9.8. Этот полином называется **минимальным полиномом** элемента v и обозначается $\mathsf{Minpoly}(v)$.

Задача 9.18. Пусть $v \in R$ – элемент артинового кольца над k, а $P(t)$ – его минимальный полином. Рассмотрим подалгебру R_v, порожденную v и k. Докажите, что R_v изоморфно кольцу $k[t]/P$ остатков по модулю P.

Определение 9.9. Пусть $v \in R$ – такой элемент алгебры R, что $v^2 = v$. Тогда v называется **идемпотентом**.

Задача 9.19. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Докажите, что $1 - e$ тоже идемпотент. Докажите, что произведение идемпотентов – идемпотент.

Задача 9.20. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Рассмотрим пространство $eR \subset R$ (образ умножения на e). Докажите, что eR – подалгебра в R, e – единичный элемент в eR, и $R = eR \oplus (1-e)R$.

Задача 9.21 (!). Пусть $R = k(t)/P$, где P – полином, который разлагается в произведение попарно взаимно простых полиномов, $P = P_1P_2 \dots P_n$. Докажите, что в R есть m идемпотентов $e_1, \dots, e_n \subset R$, причем $e_iR \cong k[t]/P_i$.

Указание. Найдите многочлены $Q(t)$, $Q'(t)$, такие, что $QP_1 + Q'P_1P_3 \dots P_n = 1$. Напишем $e = Q'P_1P_3 \dots P_n$. Докажите, что $e^2 = e(\mod P)$, и $eP_1(t) = 0(\mod P)$. Выведите из этого, что $k[z]/P_1(z) \cong eR$, причем изоморфизм задается соответствием $z \mapsto et$.

Задача 9.22. Пусть R – полупростое артиново кольцо без неединичных идемпотентов. Докажите, что это поле.

Указание. Пусть R – не поле. Рассмотрите подалгебру $k(x) \subset R$, порожденную необратимым элементом $x \in R$, и примените к ней утверждение предыдущей задачи.

Определение 9.10. Говорят, что два идемпотента $e_1, e_2 \in R$ в коммутативной алгебре R **ортогональны**, если $e_1e_2 = 0$.

Задача 9.23. Пусть $e_1, e_2, e_3 \in R$ – идемпотенты в артиновом кольце R над полем k, причем $e_1 = e_2 + e_3$, а e_2 и e_3 ортогональны. Докажите, что $e_2, e_3 \in e_1R$ и $e_1R = e_2R \oplus e_3R$.

Задача 9.24. Пусть $\mathsf{char}\, k \neq 2$. Предположим, что e_1, e_2, e_3 – идемпотенты в артиновом кольце R над k, и $e_1 = e_2 + e_3$. Докажите, что e_2 и e_3 ортогональны.

Определение 9.11. Пусть R – артиново кольцо над полем k, Идемпотент e в R называется **неразложимым**, если нельзя найти такие ненулевые ортогональные идемпотенты e_2, e_3, что $e_1 = e_2 + e_3$.

Задача 9.25 (!). Пусть R полупростое артиново кольцо, а e – неразложимый идемпотент. Докажите, что eR – поле.

Задача 9.26 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, Докажите, что 1 разлагается в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов: $1 = \sum e_i$. Докажите, что это разложение единственно.

Указание. Для существования, возьмите какой-нибудь идемпотент $e \in R$, разложите $R = eR \oplus (1-e)R$, и воспользуйтесь индукцией. Для единственности, перемножьте два возможных разложения 1.

Задача 9.27 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, Докажите, что R изоморфно прямой сумме полей.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.28 (!). Пусть $R_1 \xrightarrow{\psi} R_2$ – сюръективный гомоморфизм артиновых колец, причем R_1 полупросто и тем самым разложено в прямую сумму полей по какому-то множеству индексов I, $R_1 = \oplus_{i\in I} K_i$. Докажите, что $R_2 = \oplus_{i\in I'} K_i$, где I' – некоторое подмножество I, а ψ – естественная проекция (т.е. ψ действует тождественно на K_i, $i \in I'$, и равно нулю на K_i, $i \notin I'$).

Указание. Разложите $1 \in R_1$ в сумму неразложимых идемпотентов e_i, $i \in I$, докажите, что $f : e_i R \to f(e_i) R_2$ сюръективен для всех $i \in I$, и примените задачу 9.8.

Задача 9.29 (*). Пусть $R = k[t]/P$, а у полинома P есть кратные корни над алгебраическим замыканием $\overline{k}$. Может ли R быть полупросто? Разберите случаи $\operatorname{\mathsf{char}} k = 0$, $\operatorname{\mathsf{char}} k \neq 0$.

Задача 9.30 (*). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, а $1 = e_1 + \cdots + e_n$ – разложение 1 в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов. Докажите, что у R есть ровно n простых идеалов. Опишите эти идеалы в терминах e_i.

Задача 9.31 (*). Пусть дано артиново кольцо R над полем k (любой характеристики). Докажите, что пересечение всех простых идеалов R – это нильрадикал R.

Определение 9.12. Пусть R – алгебра над полем k, а g – билинейная форма на R. Форма g называется **инвариантной**, если $g(x, yz) = g(xy, z)$ для любых x, y, z.

Задача 9.32. Пусть R – артиново кольцо, снабженное билинейной инвариантной формой, а $\mathfrak{m}$ – идеал в R. Докажите, что $\mathfrak{m}^\perp$ – тоже идеал.

Задача 9.33 (*). Найдите артиново кольцо, не допускающее невырожденной инвариантной билинейной формы.

Задача 9.34 (!). Пусть R – артиново кольцо над полем k. Рассмотрим билинейную форму $a, b \longrightarrow \operatorname{\mathsf{tr}}(ab)$, где $\operatorname{\mathsf{tr}}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \operatorname{End} R$, $x \overset{L_{ab}}{\mapsto} abx$. Докажите, что если форма невырождена, то R полупросто. Докажите, что если R полупросто, а $\operatorname{\mathsf{char}} k = 0$, то форма невырождена.

Указание. В одну сторону, воспользуйтесь задачей 9.6. В другую сторону, рассмотрите сначала ситуацию когда R – поле.

Задача 9.35. Пусть V, V' – векторные пространства над k, снабженные билинейными формами g, g'. Определим на $V \otimes V'$ билинейную форму $g \otimes g'$, исходя из

$$g \otimes g'(v \otimes v', w \otimes w') = g(v, w) g'(v', w')$$

Докажите, что это определение корректно, и единственным образом задает билинейную форму на $V \otimes V'$.

Задача 9.36. Пусть R, R' – коммутативные алгебры над k. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes R'$. Введем на $R \otimes R'$ мультипликативную структуру. исходя из $v \otimes v' \cdot w \otimes w = vw \otimes v'w'$. Докажите, что это корректно и единственным образом задает структуру кольца на $R \otimes R'$.

Задача 9.37. Опишите алгебру $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Задача 9.38. Опишите алгебру $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}\,] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{-1}\,]$.

Задача 9.39 (!). Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – полиномы над полем k. Обозначим $K_1 = k[t]/P(t)$ и $K_2 = k[t]/Q(t)$. Докажите, что $K_1 \otimes K_2 \cong K_1[t]/Q(t) \cong K_2[t]/P(t)$.

Задача 9.40 (*). Пусть R, R' – артиновы кольца над k, $\mathsf{char}\, k = 0$. Обозначим естественные билинейные формы $a, b \longrightarrow \mathsf{tr}(ab)$ на них через g, g'. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes R'$ с естественной структурой артиновой алгебры. Рассмотрим форму $g \otimes g'$ на $R \otimes R'$. Докажите, что $g \otimes g'$ равна форме $a, b \longrightarrow \mathsf{tr}(ab)$.

Задача 9.41 (*). Докажите, что тензорное произведение полупростых артиновых колец над полем k характеристики 0 полупросто.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.34.

Задача 9.42 (*). Найдите такие два поля K_1, K_2, алгебраических над $\mathbb{Q}$ и не равных $\mathbb{Q}$, что $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ – тоже поле.

Задача 9.43 (*). Пусть $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ – многочлен, у которого нет рациональных корней, но есть ровно r вещественных и ровно $2s$ комплексных, но не вещественных. Докажите, что

$$(\mathbb{Q}[t]/P) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \bigoplus_s \mathbb{C} \oplus \bigoplus_r \mathbb{R}.$$

Задача 9.44 (*). Пусть $P(t)$ – неприводимый многочлен над $\mathbb{Q}$, у которого нет вещественных корней, а $v \in \mathbb{Q}[t]/P$ – любой элемент, не лежащий в $Q \subset \mathbb{Q}[t]/P$. Докажите, что у минимального полинома элемента v нет вещественных корней.