

Введение в теорию моделей и алгебраические приложения

Катя Америк

Теория моделей – это ветвь математической логики, но мы будем интересоваться в основном тем, как с “логической” точки зрения можно доказывать содержательные утверждения из алгебры, алгебраической геометрии и т.п.. Так, знаменитый классический пример – это теорема Акса об инъективном отображении, утверждающая, что инъективное полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n$ в себя сюръективно. Хотя собственно результат скорее относится к алгебраической геометрии, доказательство Акса основано на фундаментальной для теории моделей “теореме компактности”, а также на полноте теории алгебраически замкнутых полей заданной характеристики. Мы начнем с того, что, кратко и не слишком формально обсудив основные определения и простейшие факты (о языках, структурах, формулах, выполнимости, определимых множествах), докажем теорему компактности с помощью конструкции ультрапроизведений, обсудим полноту теории алгебраически замкнутых полей заданной характеристики и в качестве иллюстрации получим теорему Акса.

Потом мы изучим элиминацию кванторов для алгебраически замкнутых и вещественно замкнутых полей (на языке алгебраической геометрии первое означает, что образ конструктивного множества конструктивен, и называется теоремой Шевалле; второе – это аналогичная теорема Тарского – Зайденберга) и разные следствия этого в алгебре и геометрии. Познакомимся с понятием о-минимальности, кое-какими следствиями для вещественной алгебраической геометрии, обозрим (принимая многое за черные ящики) доказательства “гипотезы Манина-Мамфорда” (точнее, теоремы Рэйно - у этой гипотезы много разных доказательств, первое из которых принадлежит Рэйно) и, может быть, некоторых частных случаев гипотезы Андре – Оорта по Пила – Занниеру: оно использует определимые множества в о-минимальных структурах.

Наконец, планируется сделать первые шаги в теории стабильности (понятие типа, ранга Морли, омега-стабильной теории и т.п.) и как-то проиллюстрировать все это геометрически.

Достаточно знания алгебры в объеме 1 и 2 курсов. Знакомство с алгебраической геометрией полезно, но требуется лишь местами. Большая часть курса элементарна.