Лекция 4.

Кольца дискретного нормирования. Дивизоры. Целые замыкания, нормальные кольца. Лемма Хартогса. Нормализация и ветвление. Накрытия Галуа колец дискретного нормирования, группы разложения и инерции.

Кольца дискретного нормирования.

В прошлый раз мы определили понятие *размерности* для аффинных схем, а также ввели некоторые общие классы схем и колец: неприводимые, приведенные и целые схемы, нетеровы кольца. Сегодня мы начнем с того, что опишем один конкретных класс очень хороших колец размерности 1.

Определение 4.1. *Нормированием* (дискретным) поля K называется такое сюръективное отображение $v : K^* \to \mathbb{Z}$, что $v(ab) = v(a) + v(b)$ и $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$.

Если v – нормирование поля K, то подмножество $O_v \subset K$ таких элементов $a \in K$, что $v(a) \geq 0$, есть очевидным образом подкольцо. Кольца, которые можно получить такой процедурой, называются *кольцами дискретного нормирования.* Очевидно, что кольцо дискретного нормирования A это область целостности, а поле K – это поле частных $\operatorname{Frac}(A)$ кольца A. Очевидно также, что нормирование v достаточно задавать на A – оно продолжится на все K по формуле $v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$. Но если начать с любой области целостности A и нормирования v, то ниоткуда не следует, что *все* элементы $a \in K$ поля частных K, для которых $v(a) \geq 0$, лежат в кольце $A \subset K$. Это – сильное дополнительное условие, которое и выделяет кольца дискретного нормирования.

Упражнение 4.1. *Пусть A – кольцо дискретного нормирования. Докажите, что подмножество $\mathfrak{m}$ элементов $a \in A$ с $v(a) \geq 1$ это идеал, причем максимальный, а A – локальное кольцо (воспользуйтесь тем, что кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ локально тогда и только тогда, когда любой $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ обратим).*

Упражнение 4.2. *Докажите, что любой элемент $a \in A$ с $v(a) = 1$ – такой элемент называется* униформизующим *– порождает максимальный идеал $\mathfrak{m} \in A$.*

Упражнение 4.3. *В кольце дискретного нормирования есть однозначное разложение на простые множители (такое кольцо по невнятным историческим причинам по-русски называется* факториальным*; по-английски оно называется куда более внятным термином unique factorization domain – сокращенно UDF).*

Предложение 4.2. *Следующие свойства целостного кольца A эквивалентны:*

(i) *A – кольцо дискретного нормирования,*

(ii) *A – локальное кольцо, любой идеал в A главный, причем A не поле,*

(iii) *A – нетерово локальное кольцо, не поле, а максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ – главный.*

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) Пусть $I \subset A$ – идеал, и пусть $n = \min\{v(a) \mid a \in I\}$. Выберем $a \in I$, для которого $v(a) = n$. Тогда для любого другого $b \in I$ имеем $v(ba^{-1}) \geq 0$, а потому $ba^{-1} \in A$, т.е. $b \in (a)$. Следовательно, $I = (a) \subset I$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) очевидно.

Наконец, докажем (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть $\mathfrak{m} = (a)$ для какого-то a. Если $b \in \mathfrak{m}^n$, но b не лежит в $\mathfrak{m}^{n+1}$, то $b = a^n c$, причем c не лежит в $\mathfrak{m}$. Поскольку A локально, c обратим. Легко видеть теперь, что если положить $v(v) = n$, то получится нормирование, которое задает A. Единственная проблема это доказать, что такое n существует для любого $b \in A$ – иными словами, что $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n = 0$. Действительно, пусть $b \in \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{m}^n$. Тогда $ba^{-n} \in K$ на самом деле лежит в A, и $(ba^{-n}) \subset A$ – возрастающая цепочка идеалов. В силу нетеровости, для какого-то n имеем $(ba^{-n}) = (ba^{-n-1})$, откуда $ba^{-n-1} = ba^{-n}c$, $c \in A$. Тем самым или $c = a^{-1}$ – что невозможно по определению – или $b = 0$. $\square$

Замечание 4.3. Крулль, который ввел кольца нормирования, на самом деле дал более общее определение – подкольцо $A \subset K$ поля K есть кольцо нормирования если для любого $x \in K$ или x, или x^{-1} (или оба) лежат в A. Можно доказать, что в такой ситуации $A \subset K$ всегда выделяется некоторым нормированием v, но со значениями не обязательно в $\mathbb{Z}$, а в какой-то линейно упорядоченной абелевой группе (говорят *недискретным*). Существует вполне нетривиальная теория общих колец нормирования и вполне нетривиальные примеры – в том числе такие кольца нормирования A, что максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ главный. Но поскольку в силу Предложения 4.2 недискретные нормирования дают ненетеровы кольца, в алгебраической геометрии эта теория не нужна.

Упражнение 4.4. *Максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ кольца A главный тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ – одномерное векторное пространство над полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$.*

Упражнение 4.5. *Каждый конечно порожденный модуль M над кольцом дискретного нормирования A есть сумма свободного модуля и модулей вида $A/\mathfrak{m}^n$, $n \geq 1$.*

Заметим, что на самом деле, на последнем шаге доказательства Леммы 4.2 условие $\mathfrak{m} = (a)$ не нужно – максимальный идеал в *любом* локальном нетеровом целом кольце удовлетворяет $\cap \mathfrak{m}^n = 0$. Но мы докажем это позже, когда будем строить теорию размерности. Заметим также, что в силу пункта (ii) Леммы 4.2, в кольце дискретного нормирования только два простых идеала – $\mathfrak{m}$ и 0. Поэтому оно одномерно. В частности, условие (iii) той же Леммы можно переписать так: $\operatorname{dim} A = \operatorname{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Впоследствии мы увидим, что и в старших размерностях это условие выделяет разумный класс локальных колец.

Дивизоры, нормальные кольца, лемма Хартогса.

Геометрически, кольца размерности один соответствуют подмногообразиям коразмерности 1 – если $\operatorname{dim} A_{\mathfrak{p}} = 1$, то есть $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$, то геометрически, простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ есть общая точка неприводимого подмногообразия коразмерности 1 в $X = \operatorname{Spec} A$. Такие подмногообразия называются *дивизорами*. Кольца дискретного нормирования отвечают тем дивизорам, которые можно задать одним уравнением (причем не только теоретико-множественно, а без кратностей). Соответствующее нормирование v тогда сопоставляет функции $a \in A$ порядок ее нуля в общей точке дивизора $Y \subset X = \operatorname{Spec} A$.

Любой ли дивизор на аффинной схеме X можно, хотя бы локально, задать одним уравнением? Если забыть про кратности, то да, и это сразу следует из примарного разложения – вот соответствующее утверждение про локализации.

Упражнение 4.6. *Пусть A – локальное целостное кольцо размерности 1; тогда для любого ненулевого $a \in A$, множество $\operatorname{Ass}(A/(a))$ состоит только из максимального идеала кольца A.*

Но если требовать, чтобы $a \in A$ задавало *подсхему* Y, т.е. чтобы a имело в общей точке Y ноль первого порядка, то ответ да, если $X = \mathbb{A}^n$ – аффинное пространство (мы это строго докажем чуть позже), а в общем случае конечно же нет. Пример, который полезно иметь в виду, такой: $A = k[t^2, t^3] \subset k[t]$ – это подкольцо, порожденное t^2 и t^3. Тогда $(t^2, t^3) \subset A$ – максимальный идеал с полем вычетов k, но $\operatorname{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$ (и это обстоятельство сохраняется при переходе к локализации $A_{\mathfrak{m}}$). Легко видеть, что $A = k[x, y]/(x^2 - y^3)$, т.е. $X = \operatorname{Spec} A$ – кривая на плоскости; и точка $0 \in X$ "особая" для этой кривой (в смысле геометрической интуиции – другого у нас пока нет).

Наоборот, пусть дана какая-то функция $f \in A$ на аффинной схеме $X = \operatorname{Spec} A$. Геометрически очевидно, что если взять множество нулей f, и разложить его на неприводимые компоненты, забыв про кратности – алгебраически, взять ассоциированные простые идеалы модуля $A/(f)$ – то по крайней мере для $X = \mathbb{A}^n$ все это компоненты будут дивизорами. Как это строго доказать, и верно ли это для других X? В общем случае ответ тоже нет.

Удивительным образом оказывается, однако, что есть чисто алгебраический способ и охарактеризовать, и строить те кольца, где ответ на оба вопроса положительный – все дивизоры соответствуют кольцам нормирования, т.е. локально задаются одним уравнением, и наоборот, все компоненты множества нулей функции имеют коразмерность один.

Определение 4.4. Элемент $x \in B$ алгебры B над кольцом A называется *целым* над A, если порожденная им подалгебра $A\langle x \rangle \subset B$ – конечно порожденный A-модуль. Алгебра B/A целая, если все ее элементы целые.

Упражнение 4.7. *Элемент x целый тогда и только тогда, когда $P(x) = 0$ для какого-то многочлена с коэффициентами из A и старшим коэффициентом* 1.

Упражнение 4.8. *Пусть B – алгебра над A; тогда все элементы B, целые над A, образуют подалгебру.*

Упражнение 4.9. *Пусть B цело над A, а C цело над B; тогда C цело над A.*

Определение 4.5. *Целым замыканием*, или *нормализацией*, кольца A в кольце $B \supset A$ называется подкольцо всех элементов B, целых над A. Целостное кольцо называется *целозамкнутым в* B, если оно равно своему целому замыканию, и просто *целозамкнутым*, или *нормальным*, если оно целозамкнуто в своем поле частных.

Упражнение 4.10. *Пусть B – алгебра над A, а $S \subset A$ – мультипликативная система. Тогда если B целая над A, то $B[S^{-1}]$ целая алгебра над $A[S^{-1}$, а если $A' \subset B$ – целое замыкание A в B, то $A'[S^{-1}]$ – целое замыкание $A[S^{-1}]$ в $B[S^{-1}]$.*

Упражнение 4.11. *Докажите, что факториальное кольцо целозамкнуто (рассмотрите уравнение с единичным старшим коэффициентом для какого-то x, и подсчитайте, сколько раз входит в разные члены уравнения каждый простой сомножитель x).*

Главная теорема про связь целозамкнутости и дивизоров такая.

Лемма 4.6. *Пусть A – нетерово целостное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$, и пусть A целозамкнуто. Тогда если существует главный идеал $(a) \subset A$, который $\mathfrak{m}$-примарен, то A – кольцо дискретного нормирования.*

Доказательство. То, что $(a) \subset A$ $\mathfrak{m}$-примарен значит, что $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(A/\mathfrak{m})$, т.е. что $\mathfrak{m} = \operatorname{Ann}(b, A/(a))$ для какого-то $b \in A$. Чтобы доказать, что A – кольцо дискретного нормирования, нам надо найти унформизующую – такой элемент $c \in \mathfrak{m}$, который порождает все $\mathfrak{m}$.

Мы утверждаем, что годится $c = ab^{-1}$. Действительно, рассмотрим операцию *деления* на c, т.е. отображение $c^{-1} : K \to K$, где K – поле частных A. Тогда по определению b, для любого $f \in \mathfrak{m}$ произведение bf делится на a, т.е. c^{-1} переводит $\mathfrak{m} \subset K$ внутрь $A \subset K$. Тогда или $c^{-1}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$, или $c^{-1}(\mathfrak{m}) = A$. Но по условию кольцо A нетерово, а потому $\mathfrak{m}$ – конечно порожденный A-модуль. Поэтому в первом случае, по теореме Гамильтона-Кэли c^{-1} удовлетворяет какому-то полиномиальному уравнению $P(c^{-1}) = 0$ с единичным старшим членом, а потому в силу целозамкнутости $c^{-1} \in A$. Тогда $b = ac^{-1} \in (a)$, что противоречит выбору b. Тем самым, имеем второй случай – $c^{-1}(\mathfrak{m})$ должно быть все A. Поэтому $c \in \mathfrak{m}$, ведь это тот единственный элемент из K, который переходит в 1; и любое $f \in \mathfrak{m}$ равно $f = c \cdot fc^{-1} \in (c)$. □

Предложение 4.7. *Пусть A – нетерова целозамкнутая область целостности. Тогда для любого $a \in A$, любой простой делитель $\mathfrak{p} \subset A$ идеала (a) – иными словами, любой $\mathfrak{p} \in$* $\mathrm{Ass}(A/(a))$ *– имеет высоту* 1, *а локализация $A_\mathfrak{p}$ есть кольцо дискретного нормирования. Кроме того,*

$$A = \cap_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1} A_\mathfrak{p}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для любого простого делителя $\mathfrak{p}$ идеала $(a) \subset A$, $A_\mathfrak{p}$ – локальное кольцо, а $(a) \subset A_\mathfrak{p}$ – $\mathfrak{p}$-примарный идеал. По Лемме, $A_\mathfrak{p}$ – кольцо дискретного нормирования (и в частности, имеет размерность 1). Наконец, пусть какое-то a/b лежит в $A_\mathfrak{p}$ для всех простых $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1. Тогда по доказанному, это значит что $a/b \in A_\mathfrak{p}$ для всех простых делителей идеала $(b) \subset A$; более того, поскольку все эти $A_\mathfrak{p}$ есть кольца нормирования, примарное разложение (b) имеет вид

$$(b) = \cap_i \mathfrak{p}_i^{n_i},$$

все $\mathfrak{p}_i$ высоты 1, и a лежит во всех $\mathfrak{p}_i^{n_i}$. Следовательно, $a \in (b)$. □

Обратное утверждение тоже верно.

Предложение 4.8. *Пусть A – нетерово целостное кольцо, причем для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ высоты* 1 *кольцо $A_\mathfrak{p}$ есть кольцо дискретного нормирования, и выполнено* (4.1). *Тогда A целозамкнуто.*

Доказательство. Пусть $x \in K$ удовлетворяет уравнению $P(x) = 0$ с коэффициентами из $A \subset K$ старшим коэффициентом 1. Надо доказать, что $x \in A$. В силу (4.1), достаточно доказать, что $x \in A_\mathfrak{p}$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1. Но это следует из того, что кольцо нормирования факториально, а следовательно, целозамкнуто. □

Условие "все локальные кольца в коразмерности 1 суть кольца дискретного нормирования" называют условием регулярности в коразмерности 1 (и иногда обозначают R_1); когда мы определим регулярные, или же гладкие кольца, мы увидим, что это именно частный случай размерности 1 общего явления. Геометрически смысл условия в том, что все особые точки многообразия лежат в коразмерности ≥ 2. Условие (4.1) известно как "условие Серра S_2" (по причинам, которые мы изучим в следующем семестре); его геометрический смысл такой. Элементы поля частных K можно понимать как рациональные – или же мероморфные – функции на $X = \operatorname{Spec} A$. Они определены в общей точке X, но продолжаются не всюду – могут иметь полюса и т.д. Тогда если $x \in A_\mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p} \subset A$ высоты 1, то соответствующая функция определена на дополнении к подмножеству коразмерности ≥ 2, и условие (4.1) гласит: функция, определенная на дополнении к подмножеству коразмерности ≥ 2, продолжается всюду. В комплексном анализе, соответствующее утверждение – в качестве X берется шар в $\mathbb{C}^n$ – известно как Лемма Хартогса. Алгебраическая версия проще – кольцо полиномов факториально, потому целозамкнуто, и стало быть (4.1) выполнено для $\mathbb{A}^n$. Но нетривиально, что условие выполнено не только для $\mathbb{A}^n$, а и для большого количества других многообразий, порой весьма плохих.

Можно сформулировать следующий эмпирический принцип работы с нормальными схемами (т.е. спектрами нормальных колец): если мы хотим построить что-то на X – например, функцию – то сначала надо построить ее "в коразмерности 1", где это бывает просто, потому что кольца дискретного нормирования очень хорошие, а потом она продолжится всюду автоматически, по Лемме Хартогса. Процедура эта похожа на жульничество – вместо того, чтобы честно разбираться, что происходит в каждой точке, мы ограничиваемся точками коразмерности 1. Удивительно, до чего это жульничество на практике оказывается продуктивно.

Нормализация и ветвление.

Подведем некоторый итог: на этой и на прошлой лекции мы, среди прочего, выделили несколько классов аффинных схем, каждый лучше предыдущего. Схема может быть приведенной; приведенная схема может быть целой; целая схема может быть нормальной. Если дана какая-то конкретная аффинная схема X, ее можно последовательно улучшать:

$$\begin{aligned}&\text{Схема } X \Rightarrow\\&\text{Ее редукция } Y = X_{red} \Rightarrow\\&\text{Неприводимые компоненты } Y_i \Rightarrow\\&\text{Их нормализации } \widetilde{Y}_i\end{aligned}$$

(Когда говорят просто нормализация целой аффиной схемы $X = \operatorname{Spec} A$, имеют в виду нормализацию в собственном поле частных – переход к целому замыканию A в $\operatorname{Frac}(A)$). Как мы видели, разложение на неприводимые компоненты хорошо работает только при условии нетеровости, которое поэтому в алгебраической геометрии всегда накладывают.

К сожалению, взятие целого замыкание может нетеровость разрушать.

С наивной точки зрения это очень странно – было бы естественно ожидать даже большего: что если кольцо B целое над подкольцом $A \subset B$, то B конечно порождено кам A-модуль (поскольку каждое подкольцо $A\langle x\rangle$, порожденное одним элементом, по определению конечно порождено как A-модуль). Но это в общем случае неверно. Контрпример построил Акидзуки в 30х годах, и это по-видимому первый серьезный контрпример в коммутативной алгебре. Затем, в 50х годах, Нагата построил пример нетерова кольца с ненетеровых целым замыканием (такое кольцо должно иметь размерность по крайней мере 3).

К счастью, нормализация конечна по крайней мере для тех колец, которые появляются в "классической" алгебраической геометрии – для конечномерных алгебр над полем.

Прежде чем доказывать это, мы докажем другой результат, который, наоборот, изучает нормализацию целозамкнутого кольца, но в алгебраическом расширении его поля частных.

Лемма 4.9. *Пусть $A \subset K$ – нетерова целозамкнутая область целостности в своем поле частных, и пусть $L \supset K$ – сепарабельное (=неразветвленное) алгебраическое расширение поля K. Тогда целое замыкание $B \subset L$ кольце A в L конечно как A-модуль.*

Доказательство. Можно считать – заменив при необходимости L на большее поле – что L это расширение Галуа поля K степени n с группой Галуа $G = \{g_i, 1 \leq i \leq n\}$. Группа G очевидно переводит целые элементы целые, т.е. сохраняет $B \subset L$. Поскольку L – алгебраическое расширение K, оно целое над K, и $B \otimes_A K = L$. Стало быть, можно выбрать такой базис y_i, $1 \leq i \leq n$, векторного пространства L над K, что все y_i на самом деле лежат в $B \subset L$.

Пусть теперь $z \in B$ – любой элемент. Запишем его как $z = \sum c_i y_i$, $c_i \in K$. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что все коэффициенты c_i лежат в $A \subset K$. Но мы знаем, что для любого $g_j \in G$, $g_j(z) = \sum c_i g_j(y_i)$ лежит в $B \subset L$. При этом все $g_j(y_i)$ тоже лежат в B.

Умножая справа на матрицу главных миноров матрицы $g_j(y_i)$, заключаем, что $C_i = c_i D \in B$, где $D = \mathsf{det}(g_j(y_i))$ – детерминант матрицы $g_j(y_i)$. Этот детерминант, вообще говоря, лежит в B, но его квадрат $d = D^2$ очевидно инвариантен относительно группы G, а потому $d \in K \cap B = A$.

Мы получили, что все произведения $c_i d$ принадлежат подкольцу $A \subset K$. На самом деле, легко видеть что d это дискриминант расширения L/K, и в частности $d \neq 0$. Поэтому можно взять d^{-1}, а z лежит в A-подмодуле $M \subset L$, порожденном $d^{-1}y_i$. Поскольку $z \in B$ было любое, мы видим что $B \subset M$, и в силу нетеровости, конечно порождено. □

Чтобы вывести отсюда, что целое замыкание конечно-порожденной алгебры A над полем k конечно порождено как A-модуль, используют следующий общий факт.

Предложение 4.10 (Лемма Нетер о нормализации.). *Пусть A – алгебра над полем k, порожденная конечным набором элементов $x_1, \dots, x_n \in A$. Тогда существуют такие алгебраически независимые элементы $y_1, \dots, y_m \in A$, что A целое над $k[y_1, \dots, y_m] \subset A$.*

Геометрический смысл этого утверждения очевиден – любое подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ можно так спроектировать на гиперплоскость, что проекция будет конечна. Доказывается оно исходя из этой геометрической интуиции – берем достаточно общую линейную проекцию (мы уже использовали аргумент такого типа при обсуждении теоремы Безу). Для простоты, мы докажем это только для бесконечного поля k (на следующей лекции, при построении теории размерности, мы приведем в частности более точное доказательство Леммы Нетер, которое дает больше и работает всегда).

Доказательство. Индукция по числу образующих $x_1, \dots, x_n \in A$ алгебры A над k. Если все образующие алгебраически независимы, теорема верна тавтологически – берем $y_i = x_i$. В противном случае, есть какое-то алгебраическое соотношение $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ степени $d \geq 1$. Пусть $P_d(x_1, \dots, x_n)$ – член степени ровно d в полиноме P. Поскольку поле k бесконечно, можно выбрать такие $c_1, \dots, c_{n-1} \in k$, что $P_d(c_1, \dots, c_{n-1}, 1) \neq 0$. Тогда если взять $y_i = x_i - c_i x_n$, $1 \leq i \leq n-1$, то

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) &= P(x_1 + c_1 y_1, \dots, x_{n-1} + c_{n-1} y_{n-1}, x_n) \\ &= P_d(c_1, \dots, c_{n-1}, 1) x_n^d + g_1 x_n^{d-1} + \dots + g_{d-1}, \end{aligned}$$

причем все g_i лежат в $A_0 = k\langle y_1, \dots, y_{n-1}\rangle \subset A$. Поэтому x_n целое над A_0. Тогда и все $x_i = y_i + c_1 x_n$ целые над A_0, т.е. достаточно доказать теорему для A_0, у которого меньше образующих. □

Следствие 4.11. *Пусть A – конечно-порожденная алгебра над полем k характеристики* 0. *Тогда целое замыкание A' алгебры A в ее поле частных конечно как A-модуль.*

Доказательство. По Лемме Нетер, поле частных K алгебры A есть конечное расширение поля вида $k(y_1, \dots, y_m)$, причем $A \subset K$ цело над $k[y_1, \dots, y_m] \subset k(y_1, \dots, y_m)$. Поскольку $\mathsf{char}\, k = 0$, это расширение сепарабельно. По Лемме 4.9, целое замыкание $k[y_1, \dots, y_m]$ в K конечно-порождено как $k[y_1, \dots, y_m]$-модуль, следовательно нетерово. Осталось заметить, что это целое замыкание содержит A и совпадает с A'; оно тем более нетерово как A-модуль, а потому конечно порождено. □

В положительной характеристике это тоже верно, но требует более тонкого доказательства – надо проанализировать и несепарабельные расширения; мы этого не делаем из соображений экономии места.

В завершение сегодняшней лекции, применим технику нормализации, чтобы изучить разветвленные расширения колец дискретного нормирования. Пусть A – кольцо дискретного нормирования с полем частных K, и пусть L – сепарабельное расширение поле K степени n (на геометрическом языке, неразветвленное накрытие $\operatorname{Spec} K \subset \operatorname{Spec} A$). Тогда есть канонический способ продолжить его до накрытия всего $\operatorname{Spec} A$ – а именно, надо взять нормализацию $B \subset L$ кольца A в поле L.

Упражнение 4.12. *Кольцо B есть свободный A-модуль ранга n (используйте классификацию конечно-порожденных модулей над кольцом дискретного нормирования).*

Таким образом, имеем каноническое – и уже, вообще говоря, разветвленное – накрытие $Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$. Чтобы его изучить, обозначим через $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал, и рассмотрим кольцо $B_o = B/\mathfrak{m}B$. Геометрически, $Y_o = \operatorname{Spec} B_o$ это слой отображения $Y \to X$ над замкнутой точкой Y. Схема Y_o, вообще говоря, неприведенная (из-за ветвления). Ее редукция $\overline{Y_o}$ – конечное множество точек. Алгебраически, они отвечают простым делителям $\mathfrak{m}_i \subset B$ идеала $\mathfrak{m}B \subset B$; поскольку $B/\mathfrak{m}_i$ – конечное расширение поля $A/\mathfrak{m}A$, оно само должно быть полем, т.е. все $\mathfrak{m}_i \subset B$ – максимальные идеалы.

Упражнение 4.13. *Для каждого $\mathfrak{m}_i \subset B$ локализация $B_{\mathfrak{m}_i}$ – кольцо дискретного нормирования.*

Чтобы описать ситуацию более явно, предположим теперь, что L/K – расширение Галуа с группой Галуа G. Тогда G действует транзитивно на множестве $\{\mathfrak{m}_i\}$. Стабилизатор $G_0 \subset G$ какого-то из $\mathfrak{m}_i$ называется *подгруппой разложения*. Далее, $k_i = B/\mathfrak{m}_i$ – расширение Галуа поля $k = A/\mathfrak{m}$ с какой-то группой Галуа G_0'; поскольку G_0 действует на k_i, имеем отображение $G_0 \to G_0'$, которое, как легко проверить, сюръективно. Его ядро $I \subset G_0$ называется *подгруппой инерции* или *подгруппой ветвления*. Оказывается, что верен следующий замечательный и очень полезный в геометрии факт.

Лемма 4.12. *Пусть $\operatorname{char} k = 0$. Тогда группа инерции I – циклическая группа какого-то порядка m.*

Доказательство. По определению, группа I действует на $B_i = B_{\mathfrak{m}_i}$, причем действие на факторе $k_i = B_i/\mathfrak{m}_i$ тривиально. Поэтому I действует на одномерном векторном пространстве $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^2$ k_i-линейными авторморфизмами. Получаем отображение $I \to k_i^*$. Его образ – это некоторая группа, состоящая из корней из единицы, а следовательно, циклическая группа. Осталось доказать, что это ображение инъективно. Действительно, пусть какое-то $g \in I$ переходит при этом отображении в 0. Тогда если $a \in \mathfrak{m}_i$ – униформизующая, $g(a) = a \mod \mathfrak{m}_i^2$. Обозначим через n минимальное такое число, что $g(a) \neq a \mod \mathfrak{m}_i^n$. Тогда g действует на векторном пространстве

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n} \mathfrak{m}_i^j/\mathfrak{m}_i^{j+1}$$

нетривиальной верхнетреугольной матрицей. Но он по определению конечного порядка; а поскольку $\operatorname{char} k = 0$, нетривиальных верхнетреугольных матриц конечного порядка не бывает. □

Если характеристика положительна, ситуация куда более сложная – ядро отображения $I \to k^*$, называемое группой дикого ветвления, совершенно не обязано быть тривиально.

Верно, однако, что порядок любой верхнетреугольной матрицы делится на $p = \mathsf{char}\, p$; поэтому если известно, что степень расширения n взаимно проста с p, то дикого ветвления нет.

Упражнение 4.14 (необязательное). *Пусть $v_i \in B_i$ – нормирования, отвечающее B_i, и пусть $a \in \mathfrak{m}$ – униформизующая. Число $v_i(a)$ называется* индексом ветвления. *Докажите, что для расширения Галуа, индекс ветвления равен порядку группы инерции. Как выразить через индекс ветвления дискриминант $\mathsf{disc}(B_i/A)$?*