Лекция 6.

Регулярные кольца. Дифференцирования и касательные векторы. Модуль кэлеровых дифференциалов. Регулярность и дифференциалы. Ветвление, дифференциалы и дифферента. Теорема Коэна о поле представителей.

Регулярные кольца.

В прошлый раз мы построили теорию размерности локальных колец – в частности, доказали, что локальное нетерово кольцо A конечномерно, и что минимальное число элементов максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$, которые порождают $\mathfrak{m}$-примарный идеал $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$, равно размерности $\operatorname{dim} A$. В частности, сам максимальный идеал $\mathfrak{m}$ нельзя породить меньше, чем $\operatorname{dim} A$ элементами. Из Леммы Накаямы немедленно следует, что элементы $a_1, \dots, a_d \in \mathfrak{m}$ порождают $\mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда их образы в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ порождают $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ – как A-модуль, или, поскольку $\mathfrak{m}$ действует на нем тривиально, как $A/\mathfrak{m}$-модуль. Тем самым,

$$\operatorname{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \operatorname{dim} A,$$

где k – поле вычетов $k = A/\mathfrak{m}$.

Определение 6.1. Нетерово локальное кольцо называется *регулярным*, если имеет место равенство: $\operatorname{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \operatorname{dim} A$.

Первый вопрос, который вызывает это определение, такой: насколько свойство регулярности действительно локально? Точнее, пусть A – регулярное локальное кольцо, и пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал, отличный от максимального; верно ли, что локализация $A_{\mathfrak{p}}$ – тоже регулярное локальное кольцо? Средствами обычной коммутативной алгебры этот вопрос не решается, и довольно долго это была трудная открытая проблема. Потом, в 50х годах, Серр придумал гомологическую характеризацию регулярности, из которой в две строчки следует, что регулярность действительно локальное свойство. Мы этим займемся в следующем семестре; пока что просто дадим формулировку без доказательства.

Факт 6.2 (Серр). *Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал в регулярном локальном кольце; тогда локализация $A_{\mathfrak{p}}$ – тоже регулярное локальное кольцо.*

В частности, свойство реглуярности можно непротиворечивым образом распространить на любые, не обязательно локальные кольца: нетерово кольцо A называется регулярным, если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$, локализация $A_{\mathfrak{p}}$ – регулярное локальное кольцо. Геометрически, регулярные кольца соответствуют неособым алгебраическим многообразиям.

Определение 6.3. Точка $x \in X$ нетеровой аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$ называется *неособой*, если локализация $A_{\mathfrak{p}}$ в соответствующем простом идеале – регулярное локальная кольцо. Схема называется *регулярной*, или *неособой*, если все ее точки неособые.

Алгебраически, регулярные кольца очень похожи на кольца многочленов. В частности, верно следующее.

Лемма 6.4. *Пусть A – нетерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *A регулярно,*

(ii) *пополнение $\widehat{A}$ по $\mathfrak{m}$-адической топологии регулярно,*

(iii) *присоединенный градуированный фактор* $\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ *по* $\mathfrak{m}$*-адической топологии – кольцо многочленов над* $k = A/\mathfrak{m}$ *от* d *образующих, градуированное степенью многочлена.*

Доказательство. По определению, $\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A = \mathsf{gr}_\mathfrak{m} \widehat{A}$; поэтому достаточно доказать, что (i)⇔(iii). При этом $\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A$ по определению порождено своей первой градуирочной компонентой, так что если мы положим $d = \mathsf{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, выберем базис $x_1, \dots, x_d$ в этом векторном пространстве и рассмотрим естественное отображение $\varphi : k[x_1, \dots, x_d] \to \mathsf{gr}_\mathfrak{m} A$, то φ сюръективно, и (iii) верно тогда и только тогда, когда φ – изоморфизм.

Поскольку φ сюръективно, полином Гильберта $\chi(\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A)$ не больше полинома Гильберта кольца многочленов:

$$\chi(\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A)(n) \leq \chi(k[x_1, \dots, x_d])(n) = \binom{n+d}{n}.$$

Более того, если φ переводит в 0 какой-то многочлен $P \in k[x_1, \dots, x_d]$ степени l, то он переводит в 0 и весь главный идеал (P), а потому

$$\chi(\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A)(n) \leq \binom{n+d}{n} - \binom{n+d-l}{n-l},$$

и легко видеть, что правая часть – многочлен от n степени $d-1$. Тем самым, $\mathsf{deg}\,\chi(\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A) \leq d$, и равенство достигается только если φ биективно. Чтобы завершить доказательство, достаточно вспомнить, что по теории размерности $\mathsf{deg}\,\chi(\mathsf{gr}_\mathfrak{m} A) = d(A) = \mathsf{dim}\, A$. □

Упражнение 6.1. *Выведите из Леммы* 6.4*, что регулярное локальное кольцо не имеет делителей нуля.*

Верно также и следующее свойство.

Факт 6.5. *Регулярное кольцо факториально (а следовательно, и нормально).*

К сожалению, доказательство тоже требует гомологической техники, а потому откладывается.

Несмотря на все эти свойства, произвольное регулярное локальное кольцо все же, вообще говоря, довольно далеко от и кольца многочленов, и от его локализаций. Ситуация становится лучше, если перейти к пополнению. Пусть дано регулярное локальное кольцо A с полем вычетов k; подполе $K \subset A$ будем называть *полем коэффициентов*, если естественная проекция $A \to k$ индуцирует изоморфизм $K \cong k$.

Лемма 6.6. *Пусть A – полное регулярное локальное кольцо, которое содержит поле коэффициентов $k \subset A$. Тогда A изоморфно кольцу степенных рядов $k[[x_1, \dots, x_d]]$ от $d = \mathsf{dim}\, A$ переменных.*

Доказательство. Выберем какие-нибудь элементы $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$, порождающие максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$, и рассмотрим соответствующее отображение $k[x_1, \dots, x_d] \to A$. В силу полноты, его можно продолжить до отображения $\varphi : k[[x_1, \dots, x_d]] \to A$. Сравнивая полиномы Гильберта как в доказательстве Леммы 6.4, немедленно видим, что φ есть изоморфизм. □

Например, пусть A – конечно-порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем k (геометрическая ситуация). Тогда с одной стороны, A содержит k, а с другой стороны, для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$ поле вычетов $A/\mathfrak{m}$ есть, по теореме Гильберта о базисе, конечное расширение k, а следовательно, совпадает с k. Поэтому пополнение $\widehat{A}$ по $\mathfrak{m}$-адической топологии автоматически содержит поле коэффициентов. Поэтому если A – регулярная конечно-порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем k, то ее пополнение $\widehat{A}$ в любом максимальном идеале $\mathfrak{m} \subset A$ есть кольцо формальных степенных рядов от $\operatorname{dim} A$ переменных. Геометрически, это значит, что неособое алгебраическое многообразие *в формальной окрестности любой своей замкнутой точки* изоморфно аффинному пространству.

На самом деле, И.С. Коэн доказал, что любое полное кольцо, которое содержит какое-то поле, содержит также и поле коэффициентов. В конце этой лекции, мы докажем это для полей характеристики 0.

Касательные векторы и дифференцирования.

Пусть A – нетерово кольцо, и пусть $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал, отвечающий некоторой замкнутой точке $x \in \operatorname{Spec} A$. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, конечномерное векторное пространство над $k = A/\mathfrak{m}$, интересно и само по себе, вне связи с регулярностью A.

Определение 6.7. Векторное пространство $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ над k, двойственное к $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, называется *касательным пространством по Зарисскому* аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$ в точке $x \in X$.

Геометрический смысл этого определения такой. Напомним, что касательное пространство $T_m M$ какого-то C^∞-многообразия M в точке m обычно определяют, рассматривая все гладкие отображения $\varphi : \mathbb{R} \to M$ из прямой $\mathbb{R}$ в M, переводящие $0 \in \mathbb{R}$ в $m \in M$, и отождествляя те из них, которые имеют в 0 одинаковую производную (в локальных координатах). Класс эквивалентности таких φ понимается как касательный вектор к M в $m \in M$. В алгебраической геометрии, за счет нильпотентов, мы можем избавиться от необходимости что-то дополнительно отождествлять. А именно, пусть A – конечно-порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем k. Вместо того, чтобы рассматривать прямую $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[t]$, рассмотрим спектр *алгебры дуальных чисел* $k\langle\varepsilon\rangle = k[\varepsilon]/\varepsilon^2$. Тогда *касательным вектором* к $X = \operatorname{Spec} A$ называется отображение k-схем $\varphi : \operatorname{Spec} k\langle\varepsilon\rangle \to \operatorname{Spec} A$. На алгебраическом языке, φ это отображение k-алгебр $A \to k\langle\varepsilon\rangle$. Иными словами, имеем отображение $\varphi_0 : A \to k$, т.е. точку $x \in X$, а также дополнительное данное: подъем φ_0 до отображения φ (которое и задает касательный вектор в точке $x \in X$).

Лемма 6.8. *Пусть A – конечно-порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем k, и пусть $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал, отвечающий точке $x \in X = \operatorname{Spec} A$. Тогда множество $T_x X$ касательных векторов к X в точке x естественно изоморфно касательному пространству по Зарисскому $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$.*

Доказательство. Это почти тавтология. По определению, $T_x X$ это множество всех отображений k-алгебр $\varphi : A \to k\langle\varepsilon\rangle$, которые $\mathfrak{m} \subset A$ переводят в $\varepsilon \cdot k \subset k\langle\varepsilon\rangle$. По мультипликативности, каждое такое φ должно переводить $\mathfrak{m}^2 \subset A$ в $\varepsilon^2 \cdot k\langle\varepsilon\rangle \subset k\langle\varepsilon\rangle$, а это пространство по определению равно нулю; поэтому φ можно с тем же успехом считать отображением $A/\mathfrak{m}^2 \to k\langle\varepsilon\rangle$. В частности, каждое такое φ индуцирует k-линейное отображение $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k = \varepsilon \cdot k \subset k\langle\varepsilon\rangle$, т.е. элемент касательного пространства по Зарисскому $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Таким образом, имеем естественное отображение $T_x X \to (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$.

Чтобы доказать, что это отображение биективно, используем то, что A по условию есть k-алгебра. Тогда имеем вложение $k = k \cdot 1 \subset A$, и получаем каноническое расщепление $A/\mathfrak{m}^2 = k \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ в прямую сумму k-векторных пространств. Теперь легко видеть, что если дано k-линейное отображение $\eta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$, то отвечающее ему $\varphi \in T_x X$ должно иметь вид $\varphi(a \oplus b) = a + \varepsilon\eta(b)$. $\square$

Векторным полем на C^∞-многообразии M называется набор касательных векторов $\xi \in T_mM$, по одному для каждой точки $m \in M$, которые гладко зависят от точки. Кроме того, векторные поля можно определять алгебраически.

Определение 6.9. *Дифференцированием* коммутативного кольца A со значениями в произвольном A-модуле M называется отображение $D : A \to M$, которое удовлетворяет *правилу Лейбница*:

$$D(ab) = aD(b) + bD(a),$$

где a и b – любые элементы кольца A.

Упражнение 6.2. *Пусть $B \subset A$ – подкольцо. Докажите, что дифференцирование $D : A \to M$ B-линейно тогда и только тогда, когда $D(b) = 0$ для любого $b \in B \subset A$.*

Тогда известно, что, при некоторых технических условиях на многообразие M, векторные поля на M взаимно-однозначно соответствуют дифференцированиям кольца гладких функций $C^\infty(M)$.

В алгебраической геометрии, естественный аналог "гладкой зависимости от точки" такой: вместо того, чтобы рассматривать набор отображений $\varphi_x : A \to k\langle\varepsilon\rangle$, по одному для каждой точки $x \in X = \operatorname{Spec} A$, мы объединяем правые части в алгебру дуальных чисел $A\langle\varepsilon\rangle = A \otimes_k k\langle\varepsilon\rangle$, и рассматриваем одно общее отображение $\varphi : A \to A\langle\varepsilon\rangle$, причем такое, что композиция

$$A \xrightarrow{\varphi} A\langle\varepsilon\rangle \longrightarrow A \tag{6.1}$$

есть тождественное отображение. Иными словами, φ есть сечение естественной проекции $X \times_k \operatorname{Spec} k\langle\varepsilon\rangle \to X$. В каждой замкнутой точке x такое φ задает отображение $\varphi_x : A \to A\langle\varepsilon\rangle \to (A/\mathfrak{m}_x)\langle\varepsilon\rangle$, и в силу условия (6.1), φ_x есть касательный вектор, приложенный именно в точке x. Алгебраическое определение через дифференцирования при этом получается автоматически.

Упражнение 6.3. *Пусть $B = A\langle\varepsilon\rangle$. Докажите, что сечения естественной проекции $B \to B/\varepsilon B = A$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с дифференцированиями $D : A \to A$. Более общо, пусть $B = A \oplus M$ – прямая сумма A и какого-то A-модуля M, причем умножение на B задается формулой*

$$(a_1 \oplus m_1)(a_2 \oplus m_2) = (a_1a_2) \oplus (a_1m_2 + a_2m_2)$$

(это называется расщепленное расширение с квадратом ноль, split square-zero extension*). Установите взаимно-однозначное соответствие между сечениями проекции $B \to A = A/M$ и дифференцированиями $D : A \to M$.*

Упражнение 6.4. *Пусть A – локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. Пусть к тому A – алгебра над k. Докажите, что касательное пространство по Зарисскому $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ изоморфно пространству $\mathsf{Der}_k(A, k)$ k-линейных дифференцирований из A в A-модуль $k = A/\mathfrak{m}$.*

Упражнение 6.5. *Обобщение предыдущего упражнения. Пусть $I \subset B$ – такой идеал в кольце B, что $I^2 = 0$ (такое называется* идеал с квадратом ноль*). Пусть дано также кольцо A, гомоморфизм $f : A \to B$ и какое-то отображение $D : A \to I$. Докажите, что D дифференцирование тогда и только тогда, когда $f + D$ – гомоморфизм.*

Это упражнение показывает, откуда на практике берутся дифференцирования. Пусть даны кольца A, B, и два гомоморфизма $f_1, f_2 : A \to B$, и пусть мы знаем, что $f_1 = f_2 \mod I$ для какого-то идеала $I \subset B$. Тогда следующий естественный шаг в сравнении f_1 и f_2 – это рассмотреть их по модулю I^2. Тогда мы видим, что разница $f_1 - f_2$ будет дифференцированием из A в I/I^2. Неформально, можно скзать, что дифференцирование это "приближение первого порядка" к разности двух гомоморфизмов.

Модуль дифференциалов

Для любого кольца A, A-модуля M, элемента $a \in A$ и дифференцирования $D : A \to M$, отображение aD, $(aD)(b) = aD(b)$, тоже удовлетворяет правилу Лейбница; сумма двух дифференцирований тоже, очевидно, дифференцирование. Поэтому множество $\mathsf{Der}(A, M)$ – в частности, множество $\mathsf{Der}(A, A)$ – имеет естественную структуру A-модуля. Если дано подкольцо $B \subset A$, то эта структура модуля, очевидно, совместима с B-линейностью, так что B-линейные дифференцирования образуют подмодуль $\mathsf{Der}_B(A, M) \subset \mathsf{Der}(A, M)$.

Упражнение 6.6. *Пусть $A = k[x_1, \dots, x_d]$, k – произвольное поле. Вычислите A-модуль $\mathsf{Der}_k(A, A)$.*

К сожалению, модуль $\mathsf{Der}(A, A)$ не обладает хорошими функториальными свойствами по отношению к морфизмам колец. Например, если дан гомоморфизм $A \to B$, то нельзя определить никакого естественного отображения между $\mathsf{Der}(A, B)$ и $\mathsf{Der}(B, B)$. А если $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал, то, вообще говоря, нет никакой связи между $\mathsf{Der}(A, A)$ и касательным пространством $\mathsf{Der}(A, A/\mathfrak{m})$. И нет никакого объекта, который объединял бы в себе касательные пространства в разных точках.

Собственно, в этом нет ничего удивительного, т.к. и в обычной C^∞-геометрии векторные поля не обладают функториальными свойствами – функториальными свойствами обладает двойственный объект, дифференциальные формы.

В алгебраической ситуации, абстрактное определение дифференциальных 1-форм дается с помощью универсального свойства.

Лемма 6.10. *Пусть дано кольцо A и подкольцо $B \subset A$. Тогда существует единственная пара $\langle d, \Omega(A/B)\rangle$ из A-модуля $\Omega(A/B)$ и B-линейного дифференцирования $d : A \to \Omega(B/A)$, обладающая следующим универсальным свойством:*

- *для любого A-модуля M и B-линейного дифференцирования $D : A \to M$, существует единственное A-линейное отображение $\varphi_D : \Omega(A/B) \to M$, для которого $\varphi_D \circ d = D$.*

Доказательство. Это верно по вполне тавтологическим причинам: если определить $\Omega(A/B)$ как фактор свободного A-модуля, порожденного символами da, по одному для каждого $a \in A$, по подмодулю, натянутому на $d(ab) - ad(b) - bd(a)$, $a, b \in A$, и $d(b)$, $b \in B \subset A$, то очевидно, что $\Omega(A/B)$ с тавтологической операцией $d : A \to \Omega(A/B)$ обладает требуемым универсальным свойством. Единственность, как это всегда бывает в подобных случаях, следует из универсальности – если наша универсальная задача имеет два решения $\langle d, \Omega(A/B)\rangle$ и $\langle d', \Omega'(A/B)\rangle$, то просто по универсальному свойству получаем взаимно-обратные отображения $\varphi_d : \Omega'(A/B) \to \Omega(A/B)$ и $\varphi_{d'} : \Omega(A/B) \to \Omega'(A/B)$.

Однако такой подход не дает никакой информации о стуктуре $\Omega(A/B)$. Поэтому куда полезнее построить этот модуль, использовав Упражнение 6.3. Рассмотрим произведение $A \otimes_B A$, и пусть $I \subset A \otimes_B A$ – ядро отображения умножения $A \otimes_B A \to A$ (геометрически, I это идеал, задающий диагональ). Определим отображение $d : A \to I$ формулой $d(a) = a \otimes 1 - a \otimes a$. Рассмотрим фактор I/I^2. Это естественным образом A-модуль, и легко проверить, что

$d : A \to I \to I/I^2$ – дифференцирование. Мы утверждаем, что I/I^2 можно взять в качестве $\Omega(A/B)$.

Действительно, пусть дан A-модуль M и B-линейное дифференцирование $D : A \to M$. Тогда по Упражнению 6.3 мы можем построить $A' = A \oplus M$, и получить гомоморфизм колец $f : A \to A'$, $f(a) = a \oplus D(a)$. У нас также есть очевидный гомоморфизм $f_0 : A \to A'$, $f_0(a) = a \oplus 0$. Их произведение – гомоморфизм $A \otimes A \to A'$. Поскольку D было B-линейно, $f \otimes f_0$ на самом деле есть гомоморфизм $f \otimes f_0 : A \otimes_B A \to A'$. При этом он переводит $I \subset A \otimes_B A$ в $M \subset A'$, обращается в ноль на I^2, и индуцирует A-линейный гомоморфизм $f \otimes f_0 : I/I^2 \to M$. Осталось заметить, что

$$(f \otimes f_0)(d(a)) = (f \otimes f_0)(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = f(a) - f_0(a) = D(a),$$

что и требовалось по определению. $\square$

Определение 6.11. Модуль $\Omega(A/B)$ называется *модулем кэлеровых дифференциалов* кольца A над кольцом B.

Упражнение 6.7. *Выведите из этой Леммы, что если B нетерово, а A – конечно-порожденная B-алгебра, то $\Omega(A/B)$ – конечно-порожденный A-модуль.*

Пусть теперь $f : A \to B$ – гомоморфизм алгебр над каким-то третьим кольцом C. Тогда любое дифференцирование $D : A \to M$ – в частности, универсальное дифференцирование $d : A \to \Omega(A/C)$ – ограничивается до дифференцирования $D : B \to M$, которое пропускается через универсальное дифференцирование B/C: имеем B-линейное отображение $\varphi_D : \Omega(B/C) \to M$. Поскольку M здесь A-модуль, это отображение на самом деле дополняется до A-линейного отображения $\Omega_B \otimes_B A \to M$. В частности, если $M = \Omega(A/C)$, получаем отображение $f^* : \Omega(B/C) \otimes_B A \to \Omega(A/C)$, которе называется *дифференциалом* отображения f.

На практике, для вычисления $\Omega(A/B)$ используют две связанные с ним точные последовательности.

Предложение 6.12. (i) *Пусть A – алгебра над B, а B, в свою очередь, алгебра над C. Тогда существует короткая точная последовательность A-модулей*

$$\Omega(B/C) \otimes_B A \longrightarrow \Omega(A/C) \longrightarrow \Omega(A/B) \longrightarrow 0, \tag{6.2}$$

где отображение слева – дифференциал естественного отображения $B \to A$.

(ii) *Пусть A – алгебра над C, $I \subset A$ – идеал в алгебре A, а $B = A/I$. Тогда существует короткая точная последовательность B-модулей*

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega(A/C) \otimes_A B \longrightarrow \Omega(B/C) \longrightarrow 0, \tag{6.3}$$

где отображение слева – ограничение на I универсального дифференцирования $d : A \to \Omega(A/C)$.

Геометрически, если $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} B$, то первый пункт описывает отображение $X \to Y$ – причем в приложениях оно обычно сюръективное – а второй пункт описывает замкнутую подсхему $Y \subset X$.

Доказательство. Чтобы доказать, что (6.2) точна, достаточно доказать, что для любого A-модуля M точна последовательность

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(\Omega(A/B), M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(\Omega(A/C), M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(\Omega(B/C), M),$$

которая по определению равна

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}_B(A,M) \longrightarrow \mathsf{Der}_C(A,M) \longrightarrow \mathsf{Der}(B,M).$$

Это очевидно: точность слева просто дана, т.к. и $\mathsf{Der}_B(A,M)$, и $\mathsf{Der}_C(A,M)$ – подмодули в $\mathsf{Der}(A,M)$, а точность в среднем члене значит, что C-линейное дифференцирование B-линейно тогда и только тогда, когда оно индуцирует тривиальное дифференцирование из B в M (это упражнение 6.2).

Аналогично, точность (6.3) эквивалентна точности

$$0 \longrightarrow \mathsf{Der}_C(B,M) \longrightarrow \mathsf{Der}_C(A,M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(I/I^2,M);$$

здесь точность в среднем члене эквивалентна тому, что C-линейное дифференцирование $D : A \to M$ пропускается через $B = A/I$ тогда и только тогда, когда оно обращается в ноль на I. □

Замечание 6.13. С общегомологической точки зрения, это Предложение выглядит некрасиво: во-первых, хочется обе точные последовательности рассмотреть как частные случаи какой-то одной, более фундаментальной, а во-вторых, хочется понять, насколько последовательности не точны слева. Все это действительно можно сделать с помощью теории так называемого *кокасательного комплекса* – обобщения модуля дифференциалов. Но это по понятным причинам откладывается на следующий семестр.

Упражнение 6.8. *Пусть k – поле; вычислите $\Omega(A/k)$, где A равно*

(i) $k[x]$,

(ii) $k[x_1,\dots,x_d]$,

(iii) $k[x]/(x^n)$, $n \geq 2$ *(рассмотрите случаи* $\mathsf{char}\, k = 0$ *и* $\mathsf{char}\, k > 0$.

Упражнение 6.9. *Пусть $S \subset A$ – мультипликативная система в кольце A. Докажите, что $\Omega(A[S^{-1}]/A) = 0$.*

Модуль дифференциалов и ветвление

Покажем теперь, как модуль дифференциалов помогает описывать ветвление (а также вычислим модуль дифференциалов в некоторых простых, но нетривиальных случаях). Общая теорема здесь такая.

Предложение 6.14. *Пусть дан морфизм $f : A \to B$, и пусть A нетерово, а B – конечно-порожденная A-алгебра. Тогда f неразветвлен тогда и только тогда, когда $\Omega(B/A) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что f по определению неразветвлен тогда и только тогда, когда $B_1 = B \otimes_A B$ разлагается в прямую сумму $B \oplus B'$, где $B' = I$ – ядро диагонального отображения $B \otimes_A B \to B$. В такой ситуации, очевидно, $I^2 = I$, а потому действительно $\Omega(B/A) = I/I^2 = 0$. Наоборот, пусть $\Omega(B/A) = 0$; тогда $I = I^2$, и, по (слегка обобщенной) Лемме Накаямы, существует такой элемент $b \in B_1$, что $b = 1 \mod I$ и $bI = 0$. В чстности, $b(1-b) = 0$, откуда $b^2 = b$, $(1-b)^2 = a - b$, и $B_1 = bB_1 \oplus (1-b)B_1$, причем $(1-b)B_1 = I = B'$, а $bB_1 \cong B$. □

Следствие 6.15. *Пусть $B = A[x]/(P(x))$. Тогда B/A неразветвлено тогда и только тогда, когда $P(x)$ взаимно-просто с производной $P'(x)$.*

Доказательство. Применяя последовательность (6.3), получаем точную последовательность

$$B \longrightarrow B = \Omega(A[x]/A) \otimes_A B \longrightarrow \Omega(B/A) \longrightarrow 0,$$

причем левое отображение – умножение на $P'(x) \in B$. Правая часть равна нулю тогда и только тогда, когда это отображение сюръективно, т.е. $1 = P'(x) \mod P(x)$. □

Мы это утверждение уже видели – хотя и не вполне доказали – когда вычисляли дискриминант. Теперь мы его и доказали. Заметим, что, поскольку $B = A[x]/(P(x))$, $\Omega(B/A)$ есть фактор свободного модуля ранга 1, т.е. $\Omega(B/A) = B/I$ для какого-то идеала I. Этот идеал называется *дифферентой*. В теории чисел дифференту обычно вводят тогда же, когда и дискриминант, и говорят, что и то, и другое измеряет ветвление (причем дифферента измеряет его более точно). С общей точки зрения, это отчасти правда, но надо понимать, что дифферента как идеал существует только из-за того, что B порождено над A одним элементом. Более правильный объект – это модуль $\Omega(B/A)$.

Дифференциалы и регулярность

Пусть теперь дана конечно-порожденная целостная алгебра A над полем k характеристки 0. Главное, по-видимому, применение модуля дифференциалов в алгебраической геометрии такое.

Лемма 6.16. *Замкнутая точка $x \in X = \operatorname{Spec} A$ неособая тогда и только тогда, когда локализация $\Omega(A/k)_{\mathfrak{m}}$ модуля дифференциалов $\Omega(A/k)$ в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ точки x – свободный модуль над $A_{\mathfrak{m}}$. Ранг этого модуля в такой ситуации равен $\operatorname{\mathsf{dim}} A$.*

Замечание 6.17. Как мы уже говорили, более научно это называется *модуль $\Omega(A/k)$ плоский в $x \in X$.*

Доказательство. Заменим A на локализацию $A_{\mathfrak{m}}$. Тогда $\Omega(A_{\mathfrak{m}}/k) = \Omega(A/k) \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ конечно порожден, и надо проверить, свободен ли он. Поскольку $\mathsf{Hom}_k(\Omega(A/k), k) = \mathsf{Der}_k(A, k) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$, имеем $\Omega(A/k) \otimes_A k = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (это частный случай точной последовательности (6.3), которая в этом случае точна и слева). Поэтому по Лемме Накаямы, модуль $\Omega(A/k)$ можно породить над A самое меньшее $d = \mathsf{dim}\, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ образующими. Он свободен тогда и только тогда, когда между ними нет соотношений. Поскольку алгебра A целостная, достаточно проверить, что соотношений нет над $K = \operatorname{Frac}(A)$; для этого надо проверить, что $\mathsf{dim}_K \Omega(A/k) \otimes_A K = d$.

Возьмем теперь $\mathfrak{m}$-примарный идеал $I \subset A$, порожденный $n = \mathsf{dim}\, A$ элементами $a_1, \dots, a_n$, и рассмотрим подалгебру $A' = k[a_1, \dots, a_n] \subset A$. Тогда K есть конечное расширение поля $K' = \operatorname{Frac}(A')$. Т.к. $\mathsf{char}\, k = 0$, это расширение неразветвленное; применяя (6.2) к $K/K'/k$, получаем

$$\mathsf{dim}_K \Omega(K/k) \le \mathsf{dim}_{K'} \Omega(K'/k) = \mathsf{dim}_{K'} \Omega(A'/k) \otimes_{A'} K' = n,$$

и $\Omega(A/k)$ свободен тогда и только тогда, когда $d = n = \mathsf{dim}\, A$. Это определение регулярности. □

Надо сказать, что любое из двух условий – целостность A и $\mathsf{char}\, k = 0$ – на самом деле можно отбросить. Оба отбросить нельзя (чтобы понять, почему, решите Упражнение 6.8 (iii)).

Теорема Коэна

Наконец, в завершение лекции, докажем теорему И.С. Коэна (в предположении характристики 0).

Предложение 6.18. *Пусть A – полное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$ и полем вычетов $K = A/\mathfrak{m}$ характеристики 0, и пусть A содержит какое-то поле k. Тогда A содержит и поле коэффициентов $K \subset A$.*

Доказательство. Переформулируем ситуацию: нам дано подполе $k \subset K$, и отображение $\varphi : k \to A$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ K & =\!= & A/\mathfrak{m} \end{array}$$

коммутативна. Нам надо продолжить φ до отображения $\varphi_1 : K \to A$, тождественного по модулю $\mathfrak{m}$. Скажем, что подполе $K_1 \subset K$, содержащее k, *хорошее*, если для любого подполя $K_2 \subset K_1$, $k \subset K_2$, любое отображение $\varphi_2 : K_2 \to A$, продолжающее φ и тождественное по модулю $\mathfrak{m}$, продолжается до отображения $\varphi_1 : K_1 \to A$ с теми же свойствами. Тогда k по определению хорошее (условие пусто), и по Лемме Цорна, существует максимальное хорошее подполе $K_1 \subset K$. По определению, φ можно продозжить до отображения $\varphi_1 : K_1 \to A$. Мы хотим доказать, что $K_1 = K$.

Действительно, пусть это не так. Возьмем какой-нибудь элемент $x \in K$, $x \notin K_1$. Тогда если x трансцендентно над K_1, то можно продолжить φ_1 на $K_1(x) \subset K$, переведя x в любое $a \in A$, $a = x \mod \mathfrak{m}$. Поскольку K_1 максимально, такого не может быть, а стало быть, x алгебраично над K_1, и $K_1\langle x\rangle \subset K$ изоморфно $K_1[x]/(P(x))$. Теперь надо применить следующую важную Лемму.

Лемма 6.19. *Пусть дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ K[x]/(P(x)) & \xrightarrow{\varphi} & B/I \end{array},$$

где K – поле, B – кольцо, а $I \subset B$ – идеал с квадратом 0. Тогда если $K[x]/(P(x))$ неразветвлено над K, то существует диагональное отображение $\varphi' : K[x]/(P(x)) \to B$, делающее диаграмму коммутативной.

Замечание 6.20. Научное название этого свойства такое: $K[x]/(P(x))$ *формально гладко* над K.

Доказательство. Выберем любое $b \in B$, равное $\varphi(x)$ по модулю I, и переведем x в него. Получим отображение $\varphi' : K[x] \to B$. Надо подправить его так, чтобы $\varphi'(P(x)) = 0$. Поскольку мы не можем менять $\varphi' \mod I$, мы можем только добавить к нему какое-то дифференцирование $D : K[x] \to I$, которое к тому же должно быть K-линейным. Такое дифференцирование однозначно задается тем, куда переходит x. Если x переходит в какое-то $b' \in I \subset B$, то по правилу Лейбница получаем

$$(\varphi' + D)(P(x)) = P(b) + P'(b)b_1.$$

Поскольку $K[x]/(P(x))$ неразветвлено над K, $P(x)$ и $P'(x)$ взаимно просты, и это уравнение всегда можно разрешить. □

Применяя эту Лемму несколько раз по индукции, мы видим, что условие $I^2 = 0$ можно заменить на $I^n = 0$; переходя к пределу, можно просто предполагать, что B полно в I-адической топологии. Теперь мы немедленно можем закончить доказательство Предложения: поскольку по условию $\mathsf{char}\, K_1 = 0$, любое его алгебраическое расширение неразветвлено. □