Лекция 7.

Пучки и операции с ними. Этальное пространство пучка; ассоциированный пучок. Определение схемы.

Пучки на топологических пространствах

Последние 6 лекций мы изучали исключительно аффинные схемы, т.е., в сущности, не алгебраическую геометрию, а коммутативную алгебру. Сегодня мы начнем склеивать из аффинных кусков произвольные, не обязательно аффинные схемы (и сможем в дальнейшем заняться собственно алгебраической геометрией). Для этого используется техника так называемых *пучков.*

Пусть дано топологическое пространство X.

Определение 7.1. *Предпучком (множеств)* $\mathcal{F}$ на X называется набор следующих данных:

(i) множество $\mathcal{F}(U)$ для любого открытого подмножества $U \subset X$, называемое *множеством сечений* $\mathcal{F}$ на U,

(ii) отображение $\mathcal{F}(U_1) \to \mathcal{F}(U_2)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U_2 \subset U_1 \subset X$, называемое *отображением ограничения.*

Эти данные должны удовлетворять следующему условию: если даны три вложенных открытых множества $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset X$, то композиция отображений ограничения $\mathcal{F}(U_3) \to \mathcal{F}(U_2) \to \mathcal{F}(U_1)$ равна отображению ограничения $\mathcal{F}(U_3) \to \mathcal{F}(U_1)$. Если на всех $\mathcal{F}(U)$ задана дополнительная алгебраическая структура – группы, кольца и т.д. – причем отображения ограничения уважают эту структуру, то $\mathcal{F}$ называется *пучком групп, колец и т.д.*

История этого определения такая. В анализе рассматривают разные классы функций на многообразиях – C^∞, C^k для какого-то k, непрерывные и т.д. Часто надо рассматривать функции, определенные только локально – на каком-то открытом подмножестве. Все они естественным образом объединяются в предпучок. По мере развития анализа, появилась необходимость рассматривать объекты вроде дельта-функции, и других обобщенных функций, которые собственно функциями уже ни в каком смысле не являются. Однако очень важно то, что с ними по прежнему можно работать локально. В некоторый момент Ж. Лере – по легенде, сидя в немецком концлагере – осознал, что можно и нужно полностью отделить локальность от понятия функции: рассматривать объекты, с которыми можно работать локально, но которые даже не притворяются функциями. Чтобы аксиоматизировать ситуацию, он ввел понятие предпучка – а кроме того, обнаружил, что более правильное понятие это понятие пучка.

Определение 7.2. Предпучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется *пучком*, если выполнены следующие две аксиомы:

(i) для любого открытого покрытия U_α открытого подмножества $U \subset X$, любые сечения $f, f' \in \mathcal{F}(U)$, которые равны после ограничения на все U_α, равны и как элементы $\mathcal{F}(U)$,

(ii) пусть дано открытое покрытие U_α открытого подмножества $U \subset X$, и по элементу $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, и пусть для любых α, β, элемент f_α равен f_β после ограничения на $U_\alpha \cap U_\beta$. Тогда существует – единственный в силу (i) – элемент $f \in \mathcal{F}(U)$, который для любого α дает f_α в ограничении на U_α.

Предпучок, который удовлетворяет только (i), называется *отделимым предпучком.*

Если $\mathcal{F}$ - предпучок абелевых групп, то обе эти аксиомы можно компактно переформулировать на языке точных последовательностей. А именно, пусть дано открытое покрытие U_α открытого подмножества $U \subset X$. Тогда можно рассмотреть последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \bigoplus_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{7.1}$$

абелевых групп, где отображение справа составлено из *разностей* двух отображений ограничения $\mathcal{F}(U_\alpha) \to \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\mathcal{F}(U_\beta) \to \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$. В силу определения предпучка, композиция любых двух отображений в (7.1) равна 0; и легко видеть, что аксиома пучка (i) эквивалентна тому, что (7.1) точна слева, а (ii) – тому, что (7.1) точна в среднем члене. Для пучков множеств тоже можно привести подобную переформулировку, используя некоторую неаддитивную версию понятия точной слева последовательности (т.н. “диаграмму уравнителя”), но нам это не понадобится.

Очевидно, что непрерывные отображения из открытых подмножеств X в какое-то топологическое пространство Y образуют пучок; в частности, непрерывные $\mathbb{R}$-значные функции на X образуют пучок колец, и т.д. Нетрудно проверить также и следующее важное обобщение этого факта.

Упражнение 7.1. *Пусть дано непрерывное отображение $f : Y \to X$. Тогда сопоставляя каждому $U \subset X$ множество непрерывных сечений $U \to Y$ отображения $f : f^{-1}(U) \to U$, получаем предпучок множеств на X. Докажите, что это пучок (он называется* пучком сечений *отображения f).*

Психологически, с пучками сечений работать проще – вместо большого количества разных множеств и отображений, надо держать в памяти одно топологическое пространство Y и одно отображение f. Поэтому с технической точки зрения, очень важно, что, как выясняется, любой пучок можно представить как пучок сечений. При этом, если наложить на f некоторое условия, такое представление будет каноническим и единственным.

Определение 7.3. Непрерывное отображение $f : Y \to X$ называется *этальным*, если у любой точки $y \in Y$ есть такая окрестность $U \subset Y$, что $f(U)$ открыто, а $f : U \to f(U)$ – гомеоморфизм.

Предложение 7.4. *Пусть $\mathcal{F}$ – пучок множеств на топологическом пространстве X. Тогда существует такое топологическое пространство $\acute{E}t(\mathcal{F})$ с этальным морфизмом $p : \acute{E}t(\mathcal{F}) \to X$, что $\mathcal{F}$ изоморфен пучку сечений отображения p. Более того, такая пара $\langle \acute{E}t(\mathcal{F}), p\rangle$ единственна с точностью до канонического изоморфизма.*

Доказательство. Рассмотрим несвязное объединение

$$\widetilde{X} = \coprod_{U \subset X} U \times \mathcal{F}(U)$$

по всем открытым подмножествам $U \subset X$ (здесь $\mathcal{F}(U)$ рассматривается с дискретной топологией, т.е. по сути, мы берем несвязное объединение всех U, причем каждое берется столько раз, сколько элементов в $\mathcal{F}(U)$). Имеем очевидное непрерывное этальное отображение $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$, $\widetilde{p}(u \times f) = u$. Определим отношение эквивалентности на $\widetilde{X}$ следующим образом:

- $u \times f \sim u' \times f'$, $u \in U$, $u' \in U'$, если $u = u' \in X$, и для какой-то его открытой окрестности $V \subset U \cap U' \subset X$, $f|_V = f'|_V$.

Легко проверить, что это действительно отношение эквивалентности. Возьмем в качестве $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ факторпространство $\widetilde{X}$ по этому отношению эквивалентности, причем с фактортопологией: подмножество $U \subset \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз $\pi^{-1}(U) \subset \widetilde{X}$ при естественном отображении $\pi : \widetilde{X} \to \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ открыт. По определению $\sim$, естественное отображение $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to X$ пропускается через отображение $p : \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \to X$.

Поскольку $\widetilde{p}$ непрерывно, p тоже непрерывно: для любого открытого $U \subset X$, подмножество $\pi^{-1}(p^{-1}(U)) = \widetilde{p}^{-1}(U) \subset \widetilde{X}$ открыто, а потому $p^{-1}(U) \subset \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ открыто по определению фактортопологии. Более того, для любого $U \times f \subset \widetilde{X}$ подмножество

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \coprod_{U' \subset X} U \cap U$$

открыто, а потому $\pi(U) \subset \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ открыто. Поскольку $\widetilde{p}$ биективно и гомеоморфно на U, отображение p биективно и гомеоморфно на $\pi(U)$, и тем самым $p : \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \to X$ этально.

Пусть теперь дано открытое $U \subset X$. Тогда любое $f \in \mathcal{F}(U)$ по определению дает сечение отображения $\widetilde{p}$, а следовательно, и p. Наоборот, пусть дано сечение $f : U \to \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ отображения p. Тогда для любого $x \in U \subset X$, $f(x) \in \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ присходит из какого-то $V \times f_x \subset \widetilde{X}$, причем, как мы уже выяснили, $\pi(V \times f_x) \subset \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ открыто. Поэтому $U_x = f^{-1}(\pi(V \times f_x)) \subset U$ – открытая окрестность x, а раз f – сечение p, для любого $x' \in U_x$ имеем $f(x') \in p^{-1}(x') \cap \pi(V \times f_x) = \pi(x' \times f_x)$. Итак, $f = f_x$ на U_x для какого-то $f_x \in \mathcal{F}(U_x)$. Все f_x очевидно согласованы на пересечениях, и, в силу аксиом пучка, их можно единственным образом склеить в одно сечение $f \in \mathcal{F}(U)$.

Наконец, чтобы доказать единственность, предположим, что $\mathcal{F}$ есть пучок сечений некоторого этального отображения $q : Y \to X$. Тогда имеем тавтологическое отображение $\tau : \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \to Y$, $u \times f \mapsto f(u)$. Более того, для любой точки $y \in Y$ мы можем выбрать открытую окрестность $V \subset Y$, для которой $q : V \to q(V)$ есть гомеоморфизм. Тогда обратное отображение $f : q(V) \to V \subset Y$ есть непрерывное сечение q, а потому задает элемент $f \in \mathcal{F}(q(V))$ и точку $y' = q(y) \times f \in q(V) \times \mathcal{F}(q(V)) \subset \widetilde{X}$. Легко видеть, что $\tau(y') = y$, и что любая другая точка с этим свойством эквивалентна y'. Поэтому $\tau : \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \to Y$ биективно и, будучи по построению локальным гомеоморфизмом, есть также и глобальный гомеоморфизм. $\square$

Пространство $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ называется *этальным пространством пучка* $\mathcal{F}$. Его весьма удобно применять для построения теории пучков. Так, отметим, что в конструкции этального пространства мы нигде не использовали то, что $\mathcal{F}$ пучок – все точно так же работает для предпучков.

Определение 7.5. Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок на X. *Ассоциированным пучком* $a(\mathcal{F})$ предпучка $\mathcal{F}$ называется пучок сечений этального пространства $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$.

По определению $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$, мы всегда имеем каноническое отображение $\mathcal{F} \to a(\mathcal{F})$, но оно в общем случае не изоморфизм (на самом деле, поскольку $a(\mathcal{F})$ уж точно пучок, $\mathcal{F} \cong a(\mathcal{F})$ ровно тогда, когда сам $\mathcal{F}$ был пучком).

Упражнение 7.2. *Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок групп (или колец). Покажите, как ввести на $a(\mathcal{F})$ структуру предпучка групп (или колец).*

Более того, заметим – это нам понадобится в конце лекции – что в определении предпучка и пучка не обазательно даже рассматривать *все* открытые подмножества $U \subset X$. А именно, предположим, что дана база S топологии на X (т.е. такой набор открытых подмножеств, замкнутый относительно конечных пересечений, что любое открытое $U \subset X$ есть объединение каких-то $U_\alpha \in S$). Тогда понятия предпучка и пучка verbatim переносятся в ситуацию, когда множество сечений $\mathcal{F}(U)$ задано только для $U \in S$. Такие образования мы будем называть *предпучками* и *пучками* на S. Так вот, анализируя доказательство Предложения 7.4, мы видим, что оно буквально так же проходит для предпучков и пучков на базе. Т.е. по каждому предпучку $\mathcal{F}$ на S мы может построить этальное пространство $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$, а если $\mathcal{F}$ был пучков, то $\mathcal{F}(U)$ изоморфно множеству сечений $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ над U для любого $U \in S$. Тем самым, в частности, любой пучок на S канонически и единственным образом продолжается до пучка на X (а для предпучков это, разумметсся, неверно).

Чтобы систематизировать ситуацию, полезно использовать категорный язык. По каждому топологическому пространству X мы строим три категории: категорию предпучков на X (обозначим ее $\mathrm{PreShv}(X)$), категорию пучков на X (обозначим ее $\mathrm{Shv}(X)$) и категорию топологических пространств Y, снабженных этальным морфизмом в X (обозначим ее $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$). Предложение 7.4 показывает, что категории $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$ и $\mathrm{Shv}(X)$ эквивалентны: эквивалентность в одну сторону сопоставляет пространству $Y \in \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$ его пучок сечений, эквивалентность в другую сторону сопоставляет пучку $\mathcal{F} \in \mathrm{Shv}(X)$ его этальное пространство $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \in \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$. Кроме того, мы имеем функтор забывания $\mathrm{Shv}(X) \to \mathrm{PreShv}(X)$ (берем пучок и рассматриваем его как предпучок), и функтор ассоциированного пучка $a : \mathrm{Shv}(X) \cong \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X) \to \mathrm{PreShv}(X)$.

Упражнение 7.3. *Докажите, что функтор забывания и функтор ассоциированного пучка* сопряжены*; а именно, докажите, что для любых $\mathcal{F} \in \mathrm{Shv}(X)$, $\mathcal{F}' \in \mathrm{PreShv}(X)$ имеется каноническое отождествление*

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{PreShv}(X)}(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \cong \mathsf{Hom}_{\mathrm{Shv}(X)}(a(\mathcal{F}'), \mathcal{F}).$$

Практическое значение этального пространства не особенно велико, поскольку обычно оно получается очень большое. В частности, если Y – топологическое пространство, а $\mathcal{F}$ – пучок отображений $U \to Y$, то $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) = X \times Y$ только если Y дискретное. А если, например, $Y = \mathbb{R}$ с естественной топологией, так что $\mathcal{F} = C^0(X)$ есть пучок непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на X, то $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ это некоторое огромное топологическое пространство, которое гораздо больше, чем $X \times \mathbb{R}$ (противоречия здесь нет, т.к. хотя $\mathcal{F}$ и есть пучок сечений естественной проекции $X \times \mathbb{R} \to X$, эта проекция очевидным образом не этальна).

Тем не менее, для "маленьких" пучков этальное пространство может иметь приемлемый размер. В частности, самый простой пример пучка такой. Пусть C – множество (или группа, или кольцо, и т.д.). Тогда можно определить постоянный предпучок C'_X на X, просто положив $C'_X(U) = C$ для любого U (а все отображения ограничения – тождественные).

Определение 7.6. Постоянный пучок C_X – это пучок, ассоциированный с предпучком C'_X.

Упражнение 7.4. *Вычислите этальное пространство $\acute{E}t(C_X)$ и множество сечений $C_X(U)$ для любого $U \subset X$. В частности, приведите пример такого U в таком X, что $C_X(U) \neq C$.*

В топологии также часто используется обощение постоянных пучков, называемое *локально постоянными пучками*, или *локальными системами*: говорят, что пучок $\mathcal{F}$ на X локально постоянен, если у каждой точки $x \in X$ есть такая окрестность $U \subset X$, что $\mathcal{F}|_U$ – постоянный пучок (здесь $\mathcal{F}|_U$ – ограничение пучка $\mathcal{F}$ на U – определяется тавтологически: мы просто забываем про все открытые $V \subset X$, которые не лежат целиком в U). Этальное пространство локально постоянного пучка – это то, что в топологии называется *накрытием* X.

Другой полезный общий пример пучка такой. Пусть $x \in X$ – точка топологического пространства X, а C – какое-то множество (или абелева группа).

Определение 7.7. *Пучок-небоскреб* C_x, сосредоточенный в точке $x \in X$, определяется как

$$C_x(U) = \begin{cases} C, & x \in U, \\ \mathsf{pt} & x \notin U. \end{cases}$$

(Здесь pt – множество из одного элемента.)

Упражнение 7.5. *Пусть $X = \mathbb{R}^1$, $x = 0 \in \mathbb{R}$, и $C = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Опишите этальное пространство $\acute{E}t(C_x)$. Хаусдорфово ли оно?*

Операции с пучками

Другое важное понятие, которое проще всего вводить через этальное пространство, это понятия слоя пучка.

Определение 7.8. *Слоем* $\mathcal{F}_x$ пучка $\mathcal{F}$ на X в точке $x \in X$ называется слой $p^{-1}(x) \subset \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$ над x естественной проекции $p : \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \to X$.

Поскольку $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F})$ – топологическое пространство, $\mathcal{F}_x$ тоже наследует топологию, но легко видеть, что эта топология на самом деле дискретная. Явным образом $\mathcal{F}_x$ можно описать так:

$$\mathcal{F}_x = \lim_{\substack{\to \\ x \in U \subset X}} \mathcal{F}(U). \tag{7.2}$$

Иными словами, элемент $\mathcal{F}_x$ это сечение $\mathcal{F}$ на какой-то окрестности $U \subset X$ точки x, причем два сечения задают один элемент тогда и только тогда, когда они совпадают на меньшей окрестности. Поэтому про элементы $\mathcal{F}_x$ еще говорят как про “ростки сечений” $\mathcal{F}$ в окрестности $x \in X$.

Замечание 7.9 (Терминологическое). Росток по-английски будет germ (что как раз значит “росток”, “зародыш” – а также “микроб”, но это к делу отношение не имеет). Слой пучка называется stalk; это пытались переводить на русский как “стебель”, но термин не прижился. При этом сам пучок будет sheaf – перевод французского faisceaux – что значит скорее не “пучок”, а “сноп”, или “охапка”. Чтобы добавить путаницы, в проективной геометрии есть традиционный термин pencil, который на русский тоже почему-то традиционно переводится как “пучок” (но к счастью, нам пока этот термин не понадобится).

Обобщение этого понятия такое. Пусть дано непрерывно отображение $f : Y \to X$ и пучок $\mathcal{F}$ на X.

Упражнение 7.6. *Покажите, что для любого $Z \in \acute{E}t(X)$, расслоенное произведение $Z \times_X Y$ вместе с проекцией на второй сомножитель есть объект в $\acute{E}t(Y)$.*

Определение 7.10. *Обратным образом*, или *прообразом*, или *ограничением* $f^{-1}(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ на Y называется пучок сечений этального пространства $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathcal{F}) \times_X Y \in \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(Y)$.

Если $Y = \{x\}$ – множество из одной точки $x \in X$, то пучки (множеств, групп, колец и т.д.) на Y – это просто множества, группы, кольца и т.д. Тогда ограничение $\mathcal{F}$ на Y – это его слой в точке x.

На языке пучков и открытых множеств, обратный образ описывается так:

$$f^{-1}(\mathcal{F})(U) = \lim_{\substack{\to \\ V \supset f(U)}} \mathcal{F}(V).$$

Это прямое обобщение формулы (7.2). Доказательство мы оставляем в качестве (необязательного) упражнения; оно проводится теми же методами, что доказательство Предложения 7.4.

Упражнение 7.7. *Докажите, что прообраз $f^{-1}(C_X)$ постоянного пучка C_X – постоянный пучок C_Y.*

Понятие обратного образа пучка нужно, в частности, чтобы обращаться с сечениями пучка как с функциями. У каждой функции есть обратный образ; у каждого сечения пучка $\mathcal{F}$ тоже есть обратный образ, только он естественным образом является сечением пучка $f^{-1}(\mathcal{F})$, и взятие обратного образа получается двухступенчатой операцией: сначала берем обратный образ пучка, потом обратный образ его сечения.

Упражнение 7.8. *Постройте естественное отображение*

$$f^* : \mathcal{F}(X) \to f^{-1}(\mathcal{F})(Y).$$

Отметим еще, что множество сечений $\mathcal{F}(U)$ для $U \subset X$ – в частности, $\mathcal{F}(X)$ – еще обозначают $\Gamma(U, \mathcal{F})$, а если $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп, то и $H^0(U, \mathcal{F})$. Это делают по традиции, а также когда хотят рассмотреть $\mathcal{F}(U)$ как функтор от $\mathcal{F}$.

Но на пучках есть и операция, действующая в другую сторону: операция прямого образа. Ее как раз удобнее определять через открытые множества.

Определение 7.11. *Прямым образом* $f_*(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ на Y при отображении $f : Y \to X$ называется пучок, заданный как $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Упражнение 7.9. *Проверьте, что $f_*(\mathcal{F})$ удовлетворяет аксиомам пучка.*

Упражнение 7.10. *Пусть $Y = \{x\}$, $x \in X$, а C – какое-то множество, рассмотренное как пучок на Y. Докажите, что $f_*C = C_x$.*

Так же, как и с обратным образом, для прямого образа имеем каноническое отображение

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, f_*\mathcal{F})$$

на сечениях, которое в этом случае по определению есть просто изоморфизм (заметим так же, что сам функтор глобальных сечений $\Gamma(X, -)$ можно рассматривать как прямой образ при проекции в точку $X \to \mathsf{pt}$).

Упражнение 7.11. *Проверьте, что функторы f_* и f^{-1}* сопряжены *– а именно, докажите, что для любых $\mathcal{F} \in \mathrm{Shv}(Y)$, $\mathcal{F}' \in \mathrm{Shv}(X)$ имеется естественный изоморфизм*

$$\mathsf{Hom}(f^*\mathcal{F}', \mathcal{F}) \cong \mathsf{Hom}(\mathcal{F}', f_*\mathcal{F}). \tag{7.3}$$

По общему факту из теории категорий, если дана пара сопряженных функторов, то любой из них однозначно определяет другой – в частности, можно например определить сначала f_*, а потом определить f^{-1} формулой (7.3). Тогда наше определение станет теоремой (но довольно муторной и не наглядной).

Пучки абелевых групп

Будем теперь рассматривать не просто пучки на топологическом пространстве X, а пучки абелевых групп. Тогда оказывается, что с ними можно проводить все те же естественные операции линейной алгберы, что и просто с группами или с модулями над кольцом: брать суммы, факторпучки, образы, ядра и коядра гомоморфизмов. Сразу скажем, что имеется общая категорная аксиоматика всех этих операций – аксиоматика так называемых *абелевых категорий* (в значительной степени и придуманная для того, чтобы рассмотреть пучки). Но нам она пока не понадобится, и мы все будем делать руками.

Все операции линейной алгебры с предпучками выполняются “поточечно” – например, если дан предпучок $\mathcal{F}$ и подпредпучок $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, то факторпредпучок $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ по определению задается как $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$. Проблема в том, что не все операции сохраняют аксиомы пучка. Точнее, с ядрами все в порядке.

Упражнение 7.12. *Пусть $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ – морфизм пучков абелевых групп на X; докажите, что его ядро $\mathsf{Ker}\,\varphi$ – тоже пучок.*

Но про образ, коядро и факторпучок аналогичное утверждение просто *неверно*. Общий способ борьбы с этим такой.

Определение 7.12. Образ и коядро отображения пучков $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ опеределяются как пучки, ассоциированные с образом и коядром этого отображения в категории предпучков.

Можно дать абстрактное категорное определение образа и коядра, и тогда это будет не определение, а теорема. Со временем мы это сделаем, но пока можно просто воспринимать это как определение. Приведем один важный факт, который мы будем использовать в дальнейшем при честном изучении категории пучков.

Упражнение 7.13. *Функтор ассоциированного пучка точен, т.е. переводит точные последовательности в точные (Указание: заметьте, что по нашему определению, нужно доказывать только точность слева – все остальное верно тавтологически; затем используйте Упражнение* 7.12*).*

Определение схемы

Все остальные общие факты про пучки мы будем доказывать по мере необходимости; пока же, перейдем к схемам. В частности, мы сможем наконец сказать всю правду про аффинные схемы.

Итак, пусть дано коммутативное кольцо A, и рассмотрим $X = \operatorname{Spec} A$ с топологией Зарисского. Напомним, что на X есть стандартная база топологии S, состоящая из открытых подмножеств вида $S_f = \operatorname{Spec} A[f^{-1}] \subset X$, $f \in A$. Пусть M – какой-то A-модуль. Для любого $f \in A$, имеем локализацию $M_f = M[f^{-1}]$. Сопоставляя $S_f \mapsto M_f$, мы очевидно получаем предпучок абелевых групп на базе S, который мы обозначаем через $\widetilde{M}$.

Лемма 7.13. *Предпучок $\widetilde{M}$ на S является пучком (и в частности, канонически продолжается до пучка на X).*

Доказательство. Мы воспользуемся аксиомами пучка в форме (7.1). Итак, дано $S_f \subset X$ и его открытое покрытие $\{S_i\}$ множествами вида $S_i = S_{f_i}$ (возможно, бесконечное). Локализуя по f и заменяя X на S_f, можем предполагать, что $S_f = X$. Заметим сразу, что есть один случай, когда (7.1) точна по тривиальным причинам – а именно, когда само $S_f = X$ является одним из S_i. В общем случае, чтобы доказать, что (7.1) точна слева, обозначим через N ядро левого отображения. Рассмотрим аннулятор $I \subset A$ модуля N. Надо доказать, что $N = 0$, т.е. $I = A$. Но если это не так, то I лежит в каком-то простом идеале $\mathfrak{p} \subset A$, отвечающем точке $x \in X$. Выберем такое S_i, которое содержит x, и перейдем к локализации по f_i. Мы попали в вышеописанную тривиальную ситуацию – следовательно, последовательность (7.1) стала точной, и, поскольку локализация точна, мы заключаем, что $N_{f_i} = 0$. Поэтому $f_i \in I$, а это противоречие.

Чтобы доказать, что (7.1) точна в среднем члене, рассуждаем ровно так же, но в качестве N берем "модуль гомологий комплекса (7.1) в среднем члене" – т.е. фактор ядра правого отображения по образу левого. $\square$

Упражнение 7.14. *Докажите, что слой $\widetilde{M}_x$ пучка $\widetilde{M}$ в точке $x \in X$, отвечающей простому идеалу $\mathfrak{p} \subset A$, канонически изоморфен локализации $M_{\mathfrak{p}}$.*

В частности, Лемму можно применить к $M = A$; полученный пучок на X традиционно обозначается $\mathcal{O}_X$ и называется *пучком функций* на X. Заметим, что он имеет естественную структуру *пучка колец*. Пучок $\widetilde{M}$ для любого A-модуля M имеет структуру пучка модулей над пучком колец $\mathcal{O}_X$.

Определение 7.14. *Локально-окольцованным пространством* называется топологическое пространство X, снабженное таким пучком колец $\mathcal{O}_X$, что для каждого $x \in X$ слой $\mathcal{O}_{X,x}$ – локальное кольцо.

Определение 7.15. *Схемой* называется локально-окольцованное пространство $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$, локально изоморфное $\operatorname{Spec} A$ для каких-то A. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на схеме X называется *квазикогерентным*, если он локально изоморфен пучку вида $\widetilde{M}$.