Лекция 8.

Аффинные схемы как частный случай общих. Морфизмы схем. Элементарные свойств схем и когерентных пучков; операции с ними. Проективный спектр и проективные схемы. Раздутия.

Аффинные схемы как схемы.

В конце прошлой лекции мы определили схемы и квазикогерентные пучки модулей на них. Сегодня начнем с того, что приведем пример неквазикогерентного пучка. Он на самом деле получается как частный случай общей пучковой конструкции.

Определение 8.1. Пусть $j : U \to X$ – вложение открытого подмножества U в топологическое пространство X, а $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп на U. *Продолжение нулем* $j_!\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}$ на X определяется как

$$j_!\mathcal{F}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V), & V \subset U, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть (проверьте это!), что $j_!\mathcal{F}$ это пучок.

Упражнение 8.1. *Пусть X – схема, $U \subset X$ – открытая подсхема, а $\mathcal{F}$ – квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_U$-модулей. Докажите, что пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $j_!\mathcal{F}$ квазокогерентный тогда и только тогда, когда $U \subset X$ еще и замкнуто.*

В этом упражении неявно используется следующий очевидный факт: если X – схема, а $U \subset X$ – открытое подмножество, то $\langle U, \mathcal{O}_X|_U \rangle$ – тоже схема (называется *открытой подсхемой* в X). Вложение $U \to X$ – пример *морфизма схема.* Общее определение дается следующим образом.

Определение 8.2. *Морфизм* $f : X \to Y$ окольцованных пространств $\langle X, \mathcal{O}_X \rangle$, $\langle Y, \mathcal{O}_Y \rangle$ – это пара из непрерывного отображения $f : X \to Y$ и отображения пучков колец $f^* : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ (или же, что эквивалентно, $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$).

Если $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} B$ – аффинные схемы, то любое отображение колец $f : B \to A$ очевидно индуцирует морфизм окольцованных пространств $\widetilde{f} : X \to Y$. При этом этот морфизм обладает дополнительным свойством.

Определение 8.3. Гомоморфизм $f : A \to B$ локальных колец A, B называется *локальным*, если прообраз $f^{-1}\mathfrak{m}_B$ максимального идеала $\mathfrak{m}_B$ равен максимальному идеалу $\mathfrak{m}_A \subset A$. Морфизм $f : X \to Y$ локально окольцованных пространств называется *локальным*, если для каждой точки $x \in X$ соответствующий гомоморфизм локальных колец $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ – локальный гомоморфизм.

Определение 8.4. *Морфизм схем* это локальный морфизм соответствующих локально окольцованных пространств.

Лемма 8.5. *Функтор $A \to \operatorname{Spec} A$ – это эквивалентность между категорией, двойственной к категории колец, и категорией аффинных схем.*

Доказательство. Обратный функтор построить просто – если $X = \operatorname{Spec} A$, то $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ – кольцо глобальных сечений структурного пучка $\mathcal{O}_X$ (оно еще называется кольцом глобальных функций на X). Гомоморфизм колец $f : A \to B$ тоже восстанавливается по соответствующему морфизму схем $\widetilde{f} : Y = \operatorname{Spec} B \to X$: естественное отображение

$$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\widetilde{f}^{-1}} \Gamma(Y, f^{-1}\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\widetilde{f}^*} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = B$$

очевидно равно f. Нетривиально проверить обратное: если $g : Y \to X$ индуцирует гомоморфизм глобальных сечений $f = g^* : A \to B$, то $g = \widetilde{f}$. Действительно, пусть точка $y \in Y$ отвечает простому идеалу $\mathfrak{p} \subset B$. Тогда $\mathfrak{p} = B \cap \mathfrak{m}_y$, где $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ – максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{Y,y} = B_{\mathfrak{p}}$. И, поскольку по определению гомоморфизм $f : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ *локальный*, имеем $f^{-1}(\mathfrak{p}) = A \cap g^*(\mathfrak{m}_y) = A \cap \mathfrak{m}_x$, где $x = g(y) \in Y$. Поэтому $\widetilde{f}(y) = x = g(y)$. $\square$

Упражнение 8.2. *Постройте аффинные схемы $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ и (нелокальный) морфизм окольцованных пространств $f : X \to Y$, не происходящий из гомоморфизма $B \to A$. Указание: чтобы далеко не ходить, возьмите в качестве $Y = \operatorname{Spec} B$ спектр кольца дискретного нормирования, т.е. схему с двумя точками, а в качестве X – спектр его поля частных (схему с одной точкой).*

Упражнение 8.3. *Докажите, что для любой схемы X и аффинной схемы $Y = \operatorname{Spec} A$, множество морфизмов из схемы X в Y естественно отождествеляется с множеством гомоморфизмов из кольца A в кольцо $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.*

Аналогичное утверждение есть и для модулей и квазикогерентных пучков.

Лемма 8.6. *Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ – аффинная схема; тогда функтор $M \mapsto \widetilde{M}$ – эквивалентность между категорией A-модулей и категорией квазикогерентных пучков $\mathcal{O}_X$-модулей на X.*

Доказательство. Обратный функтор это глобальные сечения, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$. По определению $\Gamma(X, \widetilde{M}) = M$ для любого A-модуля M. Нетривиально проверить обратное: любой квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на X изоморфен $\widetilde{M}$ (хотя бы для какого-то M – тогда автоматически $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$). Это не очевидно, поскольку по определению $\mathcal{F}$ имеет вид $\widetilde{M}$ только локально: существует такое открытое аффинное покрытие U_i схемы X, что $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M}_i$, где $M_i = \mathcal{F}(U_i)$. Но тогда по аксиоме пучка имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus\nolimits_i \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

и, поскольку локализация – точный функтор, последовательность

$$0 \longrightarrow M \otimes_A \mathcal{O}_X(U_l) \longrightarrow \bigoplus\nolimits_i \mathcal{F}(U_l \cap U_j) \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{i,j} \mathcal{F}(U_l \cap U_i \cap U_j)$$

тоже точна для любого l. Отсюда получаем, что

$$M \otimes_A \mathcal{O}_X(U_l) \cong \mathcal{F}(U_l),$$

тоже для любого l. Теперь легко проверить, что для любого открытого $U \subset X$ имеем $M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{F}(U)$, т.е. $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$. $\square$

Таким образом, все определения, которые мы до сих пор вводили, действительно не противоречат друг другу: с любой точки зрения, изучать аффинные схемы это то же самое, что изучать коммутативные кольца.

Элементарные свойства схем.

Опишем некоторые элементарные свойства схем – элементарные в том смысле, что они прямо повторяют соответствующие свойства аффинных схем, которые мы уже изучили.

Определение 8.7. Схема X называется *приведенной*, *нормальной*, если для каждой точки $x \in X$ локально кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ приведено, нормально. Схема X называется *неприводимой*, если она неприводима как топологическое пространство. Схема X называется *целой*, если она неприводима и приведена. Схема X называется *квазикомпактной*, если она компактна как топологическое пространство. Схема X называется *нетеровой*, если она допускает аффинное покрытие U_α, $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$, и все A_α – нетеровы кольца.

Заметим, что понятие квазикомпактности схем куда слабее, чем компактность C^∞ многообразий (из-за слабости топологии Зарисского). Например, верно следующее.

Упражнение 8.4. *Докажите, что аффинная схема X квазикомпактна (иными словами, из любого открытого покрытия U_α можно выбрать конечно подпокрытие). Указание: сведите все к случаю, когда все U_α имеют вид S_f для каких-то $f \in A$.*

На самом деле, для схем квазикомпактность это обычное предположение, вроде нетеровсти (довольно многие утверждения как раз и формулируются для нетеровых квазикомпактных схем).

Легко видеть, что аффинная схема $X = \operatorname{Spec} A$ приведенная, неприводимая, целая тогда и только тогда, когда она приведенная, неприводимая, целая в смысле Лекции 3. Про нормальность это почти верно.

Упражнение 8.5. *Докажите, что схема $\operatorname{Spec} A$ нормальна, т.е. любая локализация $A_\mathfrak{p}$ целая и целозамкнутая, тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec} A = \coprod \operatorname{Spec} A_i$, и каждое A_i – целое и целозамкнутое кольцо (рассмотрите неприводимые компоненты $\operatorname{Spec} A$ и докажите, что они должны быть компонентами связности).*

Про нетеровость это тоже верно.

Упражнение 8.6. *Докажите, что $X = \operatorname{Spec} A$ покрыто нетеровыми аффинными открытыми подсхемами $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$, то кольцо A нетерово (сначала, воспользовавшись Упражнением 8.4, сделайте покрытие конечным).*

Операции со схемами.

Опишем теперь стандартные общекатегорные операции со схемами – склейку (прямой предел) и произведение (обратный предел). Склейка по открытым подсхемам производится очевидным образом: если у нас есть две схемы X_1, X_2 и изоморфные открытые подсхемы $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$, $U_1 \cong U_2$, то легко видеть, что на топологическом пространстве, склеенном из X_1 и X_2 по $U_1 \cong U_2$, естественным образом определяется пучок колец, и в результате получается схема. То же верно, когда склеиваются несколько схем $X_1, X_2, \dots, X_n$. Склейка не по открытым подмножествам иногда тоже возможна, но это тонкий вопрос, которым мы не будем заниматься, по крайней мере пока.

Что до произведения, то с ним есть очевидная проблема, которую мы уже видели для аффинных схем: произведением $X \times Y$ схемы $X = \operatorname{Spec} A$ на схему $Y = \operatorname{Spec} B$ естественно считать схему $\operatorname{Spec} A \otimes B$, но в этом спектре больше точек, чем в произведении топ. пространства схемы X на топ. пространство схемы Y. Поэтому *определение* произведения схем используют общекатегорное.

Определение 8.8. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

в какой-то категории называется *декартовым*, если для любого объекта S и пары морфизмов $S \to X_1$, $S \to X_2$, для которой квадрат

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

коммутативен, существует единственный морфизм $S \to Z$, дающий морфизм коммутативных квадратов. В такой ситуации, Z называют *расслоенным произведением* X_1 и X_2 над Y и обозначают $Z = X_1 \times_Y X_2$.

Лемма 8.9. *Для любых двух схем X_1, X_2, снабженных морфизмами $X_1 \to Y$, $X_2 \to Y$ в схему Y, существует (автоматически единственное) расслоенное произведение $X_1 \times_Y X_2$.*

Набросок доказательства. Доказательство, если проводить его аккуратно и полностью, довольно муторное, но совершенно безыдейное; ограничимся наброском. Если $Y = \operatorname{Spec} A$, $X_i = \operatorname{Spec} B_1$, то $X_1 \times_Y X_2$ существует и равно $\operatorname{Spec} B_1 \otimes_A B_2$ в силу Упражнения 8.3. В общем случае, покроем Y аффинными множествами V^α. Покроем X_1 открытыми аффинными множествами U_1^α, а X_2 – открытыми аффиными множествами U_2^α, причем так, чтобы каждое U_i^α проектировалось внутрь какого-нибудь V^α. Тогда расслоенное произведение $U_1^\alpha \times_Y U_2^\beta = U_1^\alpha \times_{V^\alpha \cap V^\beta} U_2^\beta$ существует. Расслоенное произведение склеивается из этих произведений по естественным отождествлениям ($U_1^{\alpha_1} \times_Y U_2^\beta$ и $U_2^{\alpha_2} \times_Y U_2^= beta$ склеиваются по $(U_1^{\alpha_1} \cap U_1^{\alpha_2}) \times_Y U_2^\beta$, и то же для U_2). Чтобы проверить, что это действительно расслоенное произведение, замечаем, что отображение из тестовой схемы S в X_i – это то же самое, что открытое покрытие V^α схемы S и набор согласованных отображений $V^\alpha \to U_i^\alpha$, $i = 1, 2$. Поэтому общий случай следует из аффинного. $\square$

Элементарные свойства когерентных пучков.

Определяя схемы, мы также определили квазикогерентные пучки модулей на них. Если наложить на пучок условие конечности, получится понятие когерентного пучка.

Определение 8.10. Квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-модулей на нетеровой схеме X называется *когерентным*, если для каждого аффинного открытого подмножества $U \subset X$, $\mathcal{O}_U$-модуль $\mathcal{F}(U)$ конечно порожден.

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм схем. Из определения легко видеть, что прямой образ $f_*\mathcal{F}$ квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-модулей автоматически есть квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей. Когерентность при прямом образе, разумеется, не сохраняется – например, если $X = \operatorname{Spec} A$ – спектр k-алгебры A, а $Y = \operatorname{Spec} k$, то $f_*\mathcal{O}_X = A$ очевидно совершенно не обязано быть конечно-порожденным k-модулем. При некоторых условиях на морфизм f когерентность таки сохраняется, и это очень важно – соответствующие факты известны как теоремы конечности, и со временем мы будем подробно их изучать.

Однако обратный образ $f^{-1}\mathcal{F}$ квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_Y$-модулей $\mathcal{F}$ совершенно не обязан быть квазикогерентным – на самом деле, на нем нет даже никакой естественой структуры $\mathcal{O}_X$-модуля. Поэтому для квазикогерентных пучков понятие обратного образа надо переопределить.

Определение 8.11. *Тензорным произведением* пучков $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ на топологическом пространстве называется пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes \mathcal{F}_2(U)$. *Обратным образом* $f^*\mathcal{F}$ квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на схеме Y при отображении $f : X \to Y$ называется пучок $f^*(\mathcal{F}) = f^{-1}(\mathcal{F}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$.

Упражнение 8.7. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм аффинных схем $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$. Тогда для любого B-модуля M, имеем $f^*\widetilde{M} = \widetilde{M \otimes_B A}$.*

Используя это упражнение, легко проверяем, что обратный образ сохраняет квазикогерентность – а также и когерентность. Легко также доказать, что функторы f_* и f^* сопряжены (как функторы на категориях квазикогерентных пучков).

Отметим, в частности, что новое определение обратного образа нужно применять и для вложения точки $f : x \to X$. Поэтому под слоем $\mathcal{F}_x$ квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ естественно понимать не просто его слой $\mathcal{F}_x^{shv}$ как пучка, а обратный образ $f^*\mathcal{F}$ – который, как легко видеть, равен $\mathcal{F}_x^{shv} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$, где $k(x)$ – поле вычетов локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$. Если пучок $\mathcal{F}$ когерентный, то слой $\mathcal{F}_x$ – конечномерное векторное пространство над $k(x)$ (а $\mathcal{F}_x^{shv}$ – конечно порожденный модуль над всем локальным кольцом $\mathcal{O}_{X,x}$). Обычное соглашение такое: дляб любых пучков слой понимается в пучковом смысле, а для пучков $\mathcal{O}_X$-модулей – в смысле $\mathcal{O}_X$-модулей (а если таки надо рассмотреть его слой как просто пучка, то это специально оговаривается).

Проективные схемы.

Чтобы строить неаффинные схемы, можно, в принципе, явно склеивать их из аффинных кусочков, но на практике это неудобно, и так делают редко. Опишем крайне полезную общую конструкцию, которая позволяет строить проективное пространство и его замкнутые подсхемы (называемыми проективными схемами). Эта конструкция в значительной степени аналогична конструкции спектра $\operatorname{Spec} A$.

Пусть дано *градуированное* кольцо $A^\bullet$. Будем говорить, что однородный идеал $I^\bullet \subset A^\bullet$ *допустим*, если $I^\bullet$ не содержит идеала $A^{\geq 1} \subset A^\bullet$ (который называется *идеал аугментации*).

Определение 8.12. *Проективным спектром* $\operatorname{Proj} A^\bullet$ называется множество допустимых однородных простых идеалов в $A^\bullet$. Для любого однордного идеала $I^\bullet \subset A^\bullet$, *подмножество нулей* $V(I^\bullet) \subset \operatorname{Proj} A^\bullet$ это подмножество всех простых идеалов из $\operatorname{Proj} A^\bullet$, содержащих $I^\bullet$.

Легко проверить – это делается ровно так же, как для Spec – что подмножества $V(I^\bullet)$, взятые в качестве замкнутых подмножеств, задают на $\operatorname{Proj} A^\bullet$ некоторую топологию; она называется топологией Зарисского. Для любого однородного $f \in A^l$, $l \geq 0$, имеем открытое подмножество $S_f = \operatorname{Proj} A^\bullet \setminus V((f)) \subset \operatorname{Proj} A^\bullet$. Снова повторяя аргумент для Spec, убеждаемся, что открытые подмножества S_f образуют базу топологии Зарисского. Для любого градуированного $A^\bullet$-модуля $M^\bullet$ и любого $S_f \subset A^\bullet$, обозначим через $\widetilde{M^\bullet}(S_f) = (M[f^{-1}])^0$ компоненту степени 0 в локализации $M^\bullet[f^{-1}]$. Так же, как для Spec, проверяем, что это пучок, что $\widetilde{A^\bullet}$ это пучок колец, и что $\widetilde{M^\bullet}$ для любого $M^\bullet$ есть пучок $\widetilde{A^\bullet}$-модулей.

Определение 8.13. Расширяя Определение 8.12, *проективным спектром* $\operatorname{Proj} A^\bullet$ будем называть множество $\operatorname{Proj} A^\bullet$, снабженное топологией Зарисского и пучком колец $\widetilde{A^\bullet}$.

Замечание 8.14. Рассматривая градуированные алгебры, мы предполагаем, что они градуриваны неотрицательными целыми числами. Для модулей это предполагать необязательно: все конструкции точно так же работают и для модулей, градуриванных любыми целыми числами.

Упражнение 8.8. *Докажите, что* $\operatorname{Proj} A^\bullet$ *– схема (для этого докажите, что для любого однородного* $f \in A^l$, $l \geq 1$, $S_f \cong \operatorname{Spec}(A[f^{-1}])^0$ *как окольцованное пространство). Докажите так же, что для любого* $A^\bullet$*-модуля* $M^\bullet$, $\widetilde{M^\bullet}$ *– квазикогерентный пучок на* $\operatorname{Proj} A^\bullet$.

Упражнение 8.9. *Постройте естественное отображение схем* $\operatorname{Proj} A^\bullet \to \operatorname{Spec} A^0$.

Определение 8.15. Морфизм схем $\pi : X \to Y$ называется *проективным*, если для любой открытой подсхемы $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, прообраз $\pi^{-1}(U)$ отождествлен с $\operatorname{Proj} A^\bullet$ для какой-то градуированной алгебры $A^\bullet$, причем $A^0 \cong A$, а $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ – естественное отображение из Упражнения 8.9. В такой ситуации говорят также, что схема X *проективна над* Y.

Геометрический смысл проективного спектра такой. Для любой градуированной алгебры $A^\bullet$, можно рассмотреть обычный аффинный спектр $\operatorname{Spec} A^\bullet$. Чтобы учесть градуировку, нужно ее закодировать каким-нибудь инвариантным способом. Предположим для простоты, что $A^\bullet$ – алгебра над бесконечным полем k. Тогда стандартный способ такой: рассматривают действие мультипликативной группы k^* поля k на $A^\bullet$, при котором $\lambda \in k^*$ действует на компоненте $A^l \subset A^\bullet$ степени l умножением на λ^l. Это действие совместимо с умножением. Поскольку поле бесконечно, градуировка однозначно восстанавливается по действию k^*. Надо сказать, что существует более общий и правильный способ проводить эту конструкцию – k^* надо рассматривать как так называемую "алгебраическую группу", тогда ее действие на чем-либо будет в точности эквивалентно градуировке, и не надо будет требовать существования бесконечного базового поля k. Так или иначе, однородные идеалы $I^\bullet \subset A^\bullet$ соответствуют k^*-инвариантным идеалам в $A^\bullet$, и однородные простые идеалы отвечают k^*-инвариантным точкам $\operatorname{Spec} A^\bullet$ – т.е. общим точкам орбит k^*. Поэтому $\operatorname{Proj} A^\bullet$ – это, в первом приближении, фактор $\operatorname{Spec} A^\bullet$ по действию k^*. В первом приближении потому, что надо еще учесть условие допустимости – поэтому на самом деле, прежде чем брать фактор, надо выкинуть из $\operatorname{Spec} A^\bullet$ замкнутое подмножество $V(A^{\geq 1})$ (которое, как легко видеть, естественно отождествляется с $\operatorname{Spec} A^0$). Итак, имеем

$$\operatorname{Proj} A^\bullet = (\operatorname{Spec} A^\bullet \setminus \operatorname{Spec} A^0)/k^*$$

(по крайней мере, как топологическое пространство). Самый простой пример этой конкстукции такой: положим $A^\bullet = k[x_1, \dots, x_d]$, алгебра полиномов от d переменных.

Определение 8.16. Проективный спектр $\operatorname{Proj} k[x_1, \dots, x_d]$ называется *проективным пространством* $\mathbb{P}_k^{d-1}$ размерности $d-1$ над полем k.

Как и должно быть, $\mathbb{P}_k^d$ это фактор $\mathbb{A}^{d+1} \setminus \{0\}$ по k^*, а его k-точки – это наборы чисел $\langle z_1, \dots, z_{d+1} \rangle$, называемых *однородными координатами*, которые рассматриваются с точностью до одновременного умножения на $\lambda \in k^*$, и не могут все одновременно быть равны 0.

Заметим теперь, что для градуированных модулей имеется одна очевидная дополнительная операция – сдвиг градуировки. А именно, для любого градуированного $A^\bullet$-модуля $M^\bullet$, обозначим через $M^\bullet(n)$ тот же $M^\bullet$, но с новой градуировкой: $M^l(n) = M^{l+n}$. В частности, это можно применить к самому $A^\bullet$, рассмотренному как модуль над собой.

Упражнение 8.10. *Пусть $X = \operatorname{Proj} A^\bullet$ – проективная схема. Докажите, что для любого n, $\widetilde{A^\bullet(n)}$ – локально свободный пучок ранга 1 на X (этот пучок обозначается $\mathcal{O}_X(n)$). Указание: рассмотрите ограничения $\widetilde{A^\bullet(n)}$ на множества $S_f \subset X$ для любого $f \in A^l$, $l \geq 1$.*

Важно понимать – и мы это явление будем изучать подробно – что, хотя пучки $\mathcal{O}_X(n)$ локально свободны и изоморфны друг другу, глобально они совершенно не изоморфны (и в частности, если схема X не сводится к объединению нескольких точек, $\mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X$ только при $n = 1$). В частности из-за этого примера, локально свободные пучки ранга 1 играют в алгебраической геометрии особую роль и получили особое название.

Определение 8.17. Локально свободный пучок на схеме X называется *расслоением.* Расслоение ранга 1 называется *линейным.*

Замечание 8.18. “Линейное расслоение” это попросту неправильный – но укоренившийся – перевод английского line bundle, которое в свою очередь есть, по-видимому, перевод французского fibré en droits – “расслоение на прямые”.

Раздутие.

Опишем существенно тривиальный, и очень важный на практике, пример Proj – так называемое *раздутие* идеала, так же известное как *моноидальное преобразование.*

Пусть A – кольцо, а $I \subset A$ – идеал. Рассмотрим градуриванную алгебру $A^\bullet = \bigoplus_l I^l$.

Определение 8.19. *Раздутием* аффинной схемы $X = \operatorname{Spec} A$ в замкнутой подсхеме $Z = \operatorname{Spec}(A/I) \subset X$, отвечающей $I \subset A$, называется схема

$$\operatorname{Bl}(X, Z) = \operatorname{Proj} \bigoplus_l I^l.$$

Замечание 8.20. По-английски раздутие называется blow-up. Обозначение Bl нестандартное; стандартного обозначения для раздутия, к сожалнию, нет.

Упражнение 8.11. *Пусть $f : \operatorname{Bl}(X, Z) \to X$ – раздутие схемы X в подсхеме Z. Тогда f индуцирует изоморфизм $f : f^{-1}(U) \to U$, где $U = X \setminus Z$.*

Таким образом, вне Z раздутие не меняет схему вообще. Что же происходит в Z? Мы рассмотрим это на базовом примере раздутия точки. Пусть $X = \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ – n-мерное аффинное пространство над полем k, а $Z \subset X$ – точка $0 \in \mathbb{A}^n_k$. Тогда, расписывая определение раздутия, мы видим, что $\operatorname{Bl}(X, Z)$ это замкнутая подсхема в $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$, заданная уравнениями $x_i z_j = z_i x_j$, $1 \leq i, j \leq n$ (здесь $z_1, \dots, z_n$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^{n-1}_k$). Если вектор $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ не равен тождественно нулю, то из уравнений следует, что $z_i = x_i$ (разумеется, с точностью до одновременного умножения всех z_i на какую-нибудь константу). Если же $x_1 = \dots = x_n = 0$, то z_i могут быть любыми! Таким образом, слой $\operatorname{Bl}(X, Z) \to X$ над $0 \in X$ – это проективное пространство $\mathbb{P}^{n-1}_k$. Если описывать этот слой инвариантно, без выбора коодинат, то можно видеть, что он естественно отождествляется с проективизацией касательного пространства $T_0 \mathbb{A}^n_k$.