Лекция 9.

Когерентные пучки на проективном спектре — теорема Серра. Отображения в проективные пространства и линейные системы. Обильные и очень обильные пучки.

Теорема Серра

На прошлой лекции мы по $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ градуированной алгебре $A^\bullet$ построили схему $X = \operatorname{Proj} A^\bullet$ (проективный спектр) над $\operatorname{Spec} A^0$ и для всякого $\mathbb{Z}$-градуированного A-модуля $M^\bullet$ квазикогерентный пучок $\widetilde{M^\bullet}$ на X. Особенно важными являются пучки $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{A^\bullet(n)}$, где (n) означает сдвиг градуировки на n.

Лемма 9.1. *Если алгебра $A^\bullet$ порождается компонентой A^1 как A^0-алгебра, то пучки $\mathcal{O}_X(n)$ на X локально свободны ранга 1, и $\widetilde{M^\bullet(n)} \cong \widetilde{M^\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ для любого $M^\bullet$. В частности $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.*

Доказательство. Пусть $f \in A^1$. На открытом множестве $S_f \subset X$ имеем $\mathcal{O}_{X|S_f} = (\widetilde{A[f^{-1}]})^0$, $\mathcal{O}_X(n)_{|S_f} = (\widetilde{A[f^{-1}]})^n = f^n(\widetilde{A[f^{-1}]})^0$, то есть на S_f пучок $\mathcal{O}_X(n)$ изоморфен пучку $\mathcal{O}_X$. Аналогично, $\widetilde{M^\bullet(n)}_{|S_f} = (\widetilde{M[f^{-1}]})^n = f^n(\widetilde{M[f^{-1}]})^0 = (\widetilde{M[f^{-1}]})^0 \otimes_{(\widetilde{A[f^{-1}]})^0} f^n(\widetilde{A[f^{-1}]})^0$, откуда получаем изоморфизм $\widetilde{M^\bullet(n)} \cong \widetilde{M^\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ на S_f. Остается заметить, что если алгебра $A^\bullet$ порождается компонентой A_1, то открытые множества S_f, $f \in A_1$ покрывают все X. □

Конструкция проективного спектра во многом похожа на конструкцию аффинного спектра. Мы знаем, что конструкция аффинного спектра обратима – кольцо A однозначно восстанавливается по схеме $\operatorname{Spec} A$. Обратима ли конструкция $\operatorname{Proj} A^\bullet$? Вообще говоря, нет. Например, имеется следующее явление.

Упражнение 9.1. *Пусть $A^\bullet$ – градуированное кольцо, а $A^\bullet_m$ – подкольцо элементов степени, делящейся на m (т.е. $A^l_m = A^{ml}$ для любого l). Докажите, что $\operatorname{Proj}(A^\bullet) \cong \operatorname{Proj}(A^\bullet_m)$.*

Подалгебра $A^\bullet_m$ называется *подалгеброй Веронезе.*

Однако, если помимо самой схемы $X = \operatorname{Proj}(A^\bullet)$ нам даны пучки $\mathcal{O}_X(n)$, алгебра $A^\bullet$ может быть в большой степени восстановлена. А имеено, всякому квазикогерентному пучку $\mathcal{F}$ на X сопоставим градуированный $A^\bullet$-модуль $\Gamma^\bullet(\mathcal{F})$ следующим образом

$$\Gamma^\bullet(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)).$$

Упражнение 9.2. *Постройте на $\Gamma^\bullet(\mathcal{F})$ струтуру $A^\bullet$-модуля, покажите, что $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)$ является $A^\bullet$-алгеброй и проверьте, что $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X) = A^\bullet$ для $X = \mathbb{P}^N_k = \operatorname{Proj} A^\bullet$, $A^\bullet = k[z_0, z_1, \dots, z_N]$.*

Лемма 9.2. *Если A^1 — конечно порожденный A^0-модуль, $A^\bullet$ порождается компонентой A^1 как A^0-алгебра, и A — целостная алгебра, то $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = A^n$ при $n \gg 0$.*

Доказательство. Пусть $z_0, z_1, \dots, z_N$ — образующие A^0-модуля A^1. По определению сечение расслоения $\mathcal{O}_X(n)$ над S_{z_i} это элемент степени n в локализации $A[z_i^{-1}]$. Так как A — целостное кольцо, все локализации $A[z_i^{-1}]$ естественно вкладываются в $A[z_0^{-1} z_1^{-1} \cdots z_N^{-1}]$ и ясно, что набор сечений над S_{z_i} склеивается в сечение на всем X тогда и только тогда, когда образы соответствующих элементов в $A[z_0^{-1} z_1^{-1} \cdots z_N^{-1}]$ совпадают. Итак, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ отождествляется с элементами степени n в пересечении $\cap A[z_i^{-1}]$. Пусть теперь x — элемент степени $n \geq 0$

в пересечении. Значит найдется m, такое что $xz_i^m \in A$ при всех i, поэтому $xA^{\geq M} \subset A$, где $M = (m-1)(N+1)+1$. Но $\deg x \geq 0$, поэтому на самом деле $xA^{\geq M} \subset A^{\geq M}$. По индукции получаем $x^s A^{\geq M} \subset A^{\geq M}$ для всех s. Так как $A^{\geq M}$ — конечно порожденный A-модуль, мы видим, что x — цел над A. Следовательно, $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)$ цело над A и, следовательно, $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)$ является конечно порожденным A-модулем. Рассмотрим теперь фактормодуль $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)/A$. Он конечно порожден. С другой стороны, всякий его элемент при умножении на $A^{\geq M}$ при достаточно большом M зануляется. Поэтому модуль $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)/A$ сосредоточен в конечном числе степеней. Значит $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = A^n$ при $n \gg 0$. □

Следствие 9.3. *При $m \gg 0$ m-ые подалгебры Веронезе алгебр $A^\bullet$ и $\Gamma^\bullet(\mathcal{O}_X)$ равны.*

Таким образом, при выполнении некоторых разумных условий, алгебра A восстанавливается по схеме X и пучку $\mathcal{O}_X(1)$ с точностью до конечного числа компонент.

Пусть алгебра $A^\bullet$ порождается элементами $z_0, z_1, \dots, z_N$ степени 1. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $A^0[z_0, z_1, \dots, z_N] \to A^\bullet$. Ясно, что прообраз допустимого простого идеала допустим, значит возникает отображение $\operatorname{Proj} A^\bullet \to \operatorname{Proj} A^0[z_0, z_1, \dots, z_N] = \mathbb{P}^N_{A^0}$.

Упражнение 9.3. *Докажите, что это отображение является замкнутым вложением.*

Определение 9.4. Морфизм $X \to Y$ называется *проективным*, если он пропускается через замкнутое вложение в $\mathbb{P}^N_Y$ для некоторого N. Многообразие называется *проективным*, если оно проективно над точкой.

Проективный спектр любой конечно порожденной алгебры $A^\bullet$ проективен над $\operatorname{Spec} A^0$.

Упражнение 9.4. *Покажите, что если схема X проективна над $\operatorname{Spec} A$, то X является проективным спектром некоторой градуированной A-алгебры.*

Упражнение 9.5. *Пусть $A^\bullet$ — d-ая подалгебра Веронезе в $k[z_0, z_1, \dots, z_N]$. Докажите, что $\operatorname{Proj} A \cong \mathbb{P}^N$ вкладывается в $\mathbb{P}^{\binom{N+d}{d}-1}$.*

Это вложение называется d-кратным вложением Веронезе.

Упражнение 9.6. *Докажите, что при $N = 1$, $d = 2$ образ вложения Веронезе — коника (коникой называется кривая степени 2 в $\mathbb{P}^2$)*

Упражнение 9.7. *Пусть $A^\bullet$ — диагональная градуированная подалгебра в биградуированной алгебре $k[z_0, z_1, \dots, z_N] \otimes k[w_0, w_1, \dots, w_M]$, (ее компонента A^n состоит из элементов бистепени (n, n)) в $k[z_0, z_1, \dots, z_N] \otimes k[w_0, w_1, \dots, w_M]$. Докажите, что $\operatorname{Proj} A \cong \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M$ вкладывается в $\mathbb{P}^{MN+M+N}$.*

Это вложение называется вложением Сегре.

Упражнение 9.8. *Докажите, что при $M = N = 1$ образ вложения Сегре — квадрика в $\mathbb{P}^3$.*

Теперь займемся пучками на проективном спектре.

Лемма 9.5. *Если алгебра $A^\bullet$ порождается компонентой A^1 как A^0-алгебра, то для всякого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на $X = \operatorname{Proj} A^\bullet$ существует изоморфизм пучков $\beta : \widetilde{\Gamma^\bullet(\mathcal{F})} \cong \mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть опять $f \in A^1$ и рассмотрим открытое подмножество $S_f \subset X$. На S_f имеем $\widetilde{\Gamma^\bullet(\mathcal{F})} = (\Gamma^\bullet(\widetilde{\mathcal{F})[f^{-1}]})^0$, поэтому всякое его сечение имеет вид m/f^n, где $m \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n))$. Ясно, что $1/f^n$ является сечением пучка $\mathcal{O}_X(-n)$ на S_f, поэтому $m \otimes (1/f^n)$ является сечением пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(-n) = \mathcal{F}$ на S_f. Сопоставляя элемнту m/f^n сечение $m \otimes (1/f^n)$ получаем изоморфизм β_f на S_f. Ясно, что изоморфизмы β_f и β_g согласованы на пересечениях $S_f \cap S_g$, поэтому все они склеиваются в изоморфизм β на $\cup S_f = X$. □

Иначе говоря, всякий квазикогерентный пучок на схеме $\operatorname{Proj} A^\bullet$ представляется в виде $\widetilde{M^\bullet}$ для некоторого градуированного $A^\bullet$-модуля $M^\bullet$.

Лемма 9.6. *Если A^0 — нетерово кольцо, A^1 — конечно порожденный A^0-модуль и $A^\bullet$ порождается компонентой A^1 как A^0-алгебра, то для всякого градуированного конечно порожденного $A^\bullet$-модуля $M^\bullet$ существует морфизм $A^\bullet$-модулей $\alpha : M^\bullet \to \Gamma^\bullet(\widetilde{M^\bullet})$, являющийся изоморфизмом во всех степенях, начиная с некоторой.*

Доказательство. Выберем набор образующих $z_0, z_1, \dots, z_n$ в A^0-модуле A^1. Имеем естественные отображения $M^n \to (M[z_i^{-1}])^n$, которые можно воспринимать как отображения $M^n \to \Gamma(S_{z_i}, \widetilde{M^\bullet}(n))$. Ясно, что эти отображения согласованы на пересечениях $S_{z_i} \cap S_{z_j}$ значит склеиваются в отображение $M^n \to \Gamma(X, \widetilde{M^\bullet}(n))$, откуда получаем искомый гомоморфизм α. Остается проверить, что α — изоморфизм в больших степенях.

Воспользуемся здесь результатами лекции 3 (точнее говоря, их градуированной версией) — на модуле M существует конечная фильтрация, все присоединенные факторы которой имеют вид $(A/\mathfrak{p})(n)$, где $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал. Ясно, что такая фильтрация индуцирует фильтрацию на пучке $\widetilde{M^\bullet}$ и морфизм α согласован с фильтрацией (в силу функториальности). Поэтому достаточно доказать наше утверждение для модулей вида $(A/\mathfrak{p})(n)$. Кроме того, ясно что алгебру A можно заменить на $A/\mathfrak{p}$, таким образом вопрос сводится к лемме 9.2. □

Таким образом, $A^\bullet$-модуль $M^\bullet$ тоже восстанавливается по пучку $\widetilde{M^\bullet}$ с точностью до конечно порожденного A^0-модуля.

Упражнение 9.9 (необязательное). *Покажите, что категория когерентных пучков на* $\operatorname{Proj} A$ *эквивалентна факторкатегории категории конечнопорожденных градуированных A-модулей по подкатегории модулей конечно порожденных над A^0.*

Часто бывают полезны относительные варианты спектра и проективного спектра. Пусть $\mathcal{A}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр на схеме X. Для всякого аффинного открытого подмножества $U \subset X$ рассмотрим аффинную U-схему $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}(U))$ (проекция в U возникает из морфизма алгебр $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{A}(U)$). Отображения ограничения $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ дают вложения схем$\operatorname{Spec}(\mathcal{A}(V)) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{A}(U))$, которые позволяют склеить некоторую схему над X, которая обозначается $\operatorname{Spec}_X(\mathcal{A})$ и называется относительным спектром пучка алгебр $\mathcal{A}$ над X.

Упражнение 9.10. *Пусть $\pi : X \to Y$ — накрытие. Покажите, что $X = \operatorname{Spec}_Y(\pi_*\mathcal{O}_X)$.*

Аналогично для пучка градуированных $\mathcal{O}_X$-алгебр определяется относительный проективный спектр. Например, если $\mathcal{V}$ — локально свободный пучок конечного ранга на схеме X, схема $\mathbb{P}_X(\mathcal{V}) = \operatorname{Proj}_X(S^\bullet\mathcal{V}^*)$ называется *проективизацией* пучка $\mathcal{V}$, а если $i : Z \subset X$ — замкнутая подсхема, то схема $\operatorname{Bl}_Z(X) = \operatorname{Proj}_X(\oplus I_Z^k)$ называется раздутием пучка идеалов $I_Z = \mathsf{Ker}(\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z)$.

Упражнение 9.11. *Покажите, что раздутия пучков идеалов I_Z^m и I_Z равны.*

Обильные и очень обильные пучки.

Пусть теперь дана абстрактная, неважно откуда взявшаяся схема X над схемой Y (т.е. снабженная морфизмом $X \to Y$). Чтобы выяснить, является ли она проективной, попытаемся построить отображение в проективное пространство $\mathbb{P}^N_Y$.

Пусть $Y = \operatorname{Spec} A$, $\mathbb{P}^N_Y = \operatorname{Proj} A[z_0, z_1, \dots, z_N]$. Линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}^N_k$ имеет $(N+1)$-мерное пространство глобальных сечений с выделенным базисом (задаваемым образующими $z_0, z_1, \dots, z_N$). Этот набор сечений задает морфизм пучков $\mathcal{O}^{\oplus(N+1)} \to \mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}^N_Y$.

Упражнение 9.12. *Докажите, что морфизм пучков $\mathcal{O}^{\oplus(N+1)} \to \mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}^N_Y$ сюръективен.*

Пусть теперь для простоты X — многообразие над полем k, и $\rho : X \to \mathbb{P}^N_k$ — отображение. Применяя функтор обратного образа ρ^*, получаем морфизм $c_\rho : \mathcal{O}_X^{\oplus(N+1)} \to \rho^*\mathcal{O}(1)$ на X. Функтор обратного образа точен справа (он является композицией точного функтора ρ^{-1} и точного справа функтора тензорного произведения на $\mathcal{O}_X$), поэтому морфизм c_ρ сюръективен. Покажем теперь, что отображение ρ можно восстановить по морфизму c_ρ.

Лемма 9.7. *Пусть L — линейное расслоение на X и $c : \mathcal{O}_X^{\oplus(N+1)} \to L$ — сюръективный морфизм. Тогда существует отображение $\rho : X \to \mathbb{P}^N_k$, такое что $L = \rho^*\mathcal{O}(1)$ и $c = c_\rho$.*

Доказательство. Отображение ρ легко построить на уровне точек. Для всякой точки $x \in X$ с полем вычетов K выберем изоморфизм $L_x \cong K$ (пучок L локально свободен ранга 1), и рассмотрим набор координат $(c_x(e_0), c_x(e_1), \dots, c_x(e_N)) \in K^{N+1}$, где $e_0, e_1, \dots, e_N$ — стандартный базис в слое $(\mathcal{O}_X^{\oplus(N+1)})_x = K^{N+1}$, а c_x — морфизм слоев в x. Ясно, что полученный набор чисел не может быть нулевым, так как морфизм c сюръективен. Кроме того, замена изоморизма $L_x \cong K$ умножает весь набор на ненулевую константу. Таким образом, получаем корректно определенную K-точку проективного пространства $\mathbb{P}^N_k$. Тем самым возникает отображение $\rho : X \to \mathbb{P}^N_k$. Опишем отображение ρ локально. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_N$ — сечения расслоения L на X, соответсвующие базисным векторам $e_0, \dots, e_N$. Пусть $X_i = \{x \in X \mid x_i(x) \neq 0\}$. Это открытое по Зарискому подмножество (проверьте!). Рассмотрим гомоморфизм колец $k[z_0/z_i, z_1/z_i, \dots, z_N/z_i] = (k[z_0, z_1, \dots, z_N][z_i^{-1}])^0 \to \mathcal{O}_{X_i}$, переводящий z_j/z_i в x_j/x_i (частное двух сечений линейного расслоения, одно из которых нигде не обращается в нуль является корректно определенной функцией). Легко видеть, что соответствующие отображения $\rho_i : X_i \to U_i = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_N) \in \mathbb{P}^N_k \mid z_i \neq 0\}$ совпадают на пересечениях $X_i \cap X_j$ и поэтому склеваются в морфизм схем $X \to \mathbb{P}^N_k$, на уровне точек совпадающий с ρ.

Далее, ограничение пучка $\mathcal{O}(1)$ на U_i по определению соответствует свободному модулю $z_i k[z_0/z_i, z_1/z_i, \dots, z_N/z_i] = (k[z_0, z_1, \dots, z_N][z_i^{-1}])^1$. Сопоставляя элементу z_i сечение $x_i \in L(X_i)$ получаем изоморфизм $\rho_i^*\mathcal{O}(1) \cong L_{|X_i}$. Опять же, построенные изоморфизмы согласованы на пересечениях $X_i \cap X_j$, и поэтому дают изоморфизм $\rho^*\mathcal{O}(1) \cong L$, причем $c_\rho = c$. □

Полезно переписать это утверждение в бескоординатной форме. Пусть V — векторное пространство. Положим $\mathbb{P}(V) = \operatorname{Proj} S^\bullet(V^*)$, где $S^\bullet(V^*)$ — алгебра полиномиальных функций на V (выбор базиса $z_0, z_1, \dots, z_N$ в V^* дает изоморфизмы $S^\bullet(V^*) \cong k[z_0, z_1, \dots, z_N]$, $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^N_k$). Соответсвенно, отображению $\rho : X \to \mathbb{P}(V)$ соответсвует морфизм $c_\rho : V^* \otimes \mathcal{O}_X \to \rho^*\mathcal{O}(1)$ и наоборот, всякому эпиморфизму $c : V \otimes \mathcal{O}_X \to L$ отображение $\rho : X \to \mathbb{P}(V^*)$.

Упражнение 9.13. *Докажите относительную версию леммы 9.7 : если $\mathcal{V}$ — локально свободный пучок конечного ранга на схеме Y, проверьте, что для всякой схемы X над Y с проекцией $\pi : X \to Y$, существует биекция между морфизмами схем $X \to \mathbb{P}_Y(\mathcal{V})$ над Y и эпиморфизмами пучков $\pi^*\mathcal{V}^* \to L$.*

В частности, если мы хотим получить отображение в $\mathbb{P}^N_Y$ надо в качестве $\mathcal{V}$ взять свободный пучок, $\mathcal{V} = V \otimes \mathcal{O}_Y$. В этом случае $\pi^*\mathcal{V}^* = V^* \otimes \mathcal{O}_X$, то есть задания такого отображения равносильно заданию отображения $V^* \to H^0(X, L)$.

Итак, чтобы задать отображение X в проективное пространство надо выбрать линейное расслоение L и векторное пространство его сечений $V \to H^0(X, L)$, такое что соответствующий морфизм пучков $V \otimes \mathcal{O}_X \to L$ сюръективен (говорят, что пучок L *порождается* пространством V. Ясно, что в качестве V можно взять все пространство $H^0(X, L)$. Если оно порождает L (в этом случае говорят, что L *порождается глобальными сечениями*), получаем отображение $X \to \mathbb{P}(H^0(X, L)^*)$. Кстати, обратимый пучок, некоторая положительная степень которого порождается глобальными сечениями называется *полуобильным* (semiample). Произвольный обратимый пучок L конечно не порождается глобальными сечениями.

Определение 9.8. *Базисным множеством* линейного расслоения L называется множество $B(L) \subset X$ таких точек $x \in X$, что все глобальные сечения L обращаются в 0 в x.

Это геометрическое описание; более формальное описание, которое годится и в относительной ситуации X/Y, такое. Обозначим через $\pi : X \to Y$ проекцию X в Y. Тогда по сопряженности, имеем естественное отображение $\eta : \pi^*\pi_*L \to L$.

Упражнение 9.14. *Докажите, что $B(L) = \operatorname{Supp} \mathsf{Coker}\, \eta$ (т.е. множество точек, где η не сюръективно).*

Отсюда непосредственно очевидно, что $B(L)$ это алгебраическое подмножество – множество точек некоторой замкнутой подсхемы – и что определение на самом деле имеет смысл для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{E}$ на X. Пучок порождается глобальными сечениями, если $B(L) = \emptyset$.

Итак, мы выяснили, что для задания отображения Y-схемы $\rho : X \to \mathbb{P}^N_Y$ достаточно указать линейное расслоение $\rho^*\mathcal{O}(1)$.

Определение 9.9. Расслоение L на X/Y называется *очень обильным над Y*, если существует такое проективное пространство $\mathbb{P}^N_Y$ и вложение $\rho : X \to \mathbb{P}^N_Y$, что $L \cong \rho^*\mathcal{O}(1)$. Расслоение называется просто *обильным*, если какая-то его положительная тензорная степень $L^{\otimes n}$, $n \geq 1$ очень обильна.

Здесь под *вложением* мы вообще говоря понимаем композицию открытого и замкнутого вложения: есть замкнутая подсхема $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N_Y$, и открытое вложение $X \subset \overline{X}$.

Попробуем теперь охарактеризовать обильные линейные расслоения. Из вышесказанного ясно, что всякий обильный пучок порождается глобальными сечениями. Обратное конечно не верно — если дан глобально порожденный пучок L, то он задает некоторое отображение $\rho : X \to \mathbb{P}(V)$, $V = (H^0(X, L)^*)$ и ясно, что L очень обилен тогда и только тогда, когда это ρ – вложение (и это непустое условие – например, полезно помнить, что стуктурный пучок $\mathcal{O}_X$ всегда глобально порожден – почему? – но довольно часто глобальные функции на X это только константы, так что $\mathsf{dim}\, V = 1$, и $\mathbb{P}(V)$ – точка).

Упражнение 9.15. *Морфизм схем $\rho : X \to Y$ является вложением тогда и только тогда, когда*

(i) *для любых двух разных точек $x, x' \in X$ имеем $\rho(x) \neq \rho(x')$, и*

(ii) *для любой точки $x \in X$ и ненулевого касательного вектора (в смысле Зарисского) ξ в точке x, $\rho(\xi) \neq 0$.*

Если отображение $\rho : X \to \mathbb{P}(V)$, отвечающее глобально порожденному линейному расслоению L, удовлетворяет условию (i), то говорят, что L *разделяет точки*, а если условию (ii) – то что L *разделяет касательные вектора*.

Упражнение 9.16. *Пусть $\rho : X \to \mathbb{P}(V^*)$ — отображение, заданное подпространством $V \subset H^0(X, L)$. Проверьте, что условия предыдущего упражнения равносильны условиям*

(i) *Для любых двух разных точек $x, x' \in X$ существует такое $s \in H^0(X, L)$, что $s(x) = 0$, а $s(x') \neq 0$.*

(ii) *для любой точки $x \in X$ и ненулевого касательного вектора (в смысле Зарисского) ξ в точке x, существует такое $s \in H^0(X, L)$, что $s(x) = 0$, но $\langle ds, \xi \rangle \neq 0$.*

Здесь последнее условие понимается в следующем смысле: поскольку пучок L локально свободен ранга 1, можно считать, что $L|_U \cong \mathcal{O}_U$ в какой-то открытой окрестности $U \subset X$ точки x; тогда s это просто функция, и ее дифференциал ds хорошо определен. Если мы выберем другой изоморфизм $L|_U \cong \mathcal{O}_U$, то фунцкия, отвечающая s, умножится на обратимую функцию. Поэтому $\langle ds, \xi \rangle$ умножится на ненулевую константу – и тот факт, что это число равно или не равно нулю, не зависит от выбора изоморфизма $L|_U \cong \mathcal{O}_U$.

Таким образом, линейное расслоение очень обильно, если оно (1) не имеет базисных точек, (2) разделяет точки, и (3) разделяет касательные вектора – это формулировка в классическом стиле, без схем и прочих современных технических средств.

Упражнение 9.17. *Покажите, что если L — обильный пучок на нетеровой схеме X, то для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ найдется число $n_{\mathcal{F}}$, такое что для любого $n \geq n_{\mathcal{F}}$ пучок $L^n \otimes \mathcal{F}$ порождается глобальными сечениями.*

Конечно, существование обильного линейного расслоения на схеме X еще не гарантирует ее проективности — полученное отображение из X в проективное пространство может не быть замкнутым вложением. На самом деле это выполняется тогда и только тогда, когда X обладает важным свойством — является *собственным* над Y. Об этом свойстве мы поговорим на следующей лекции.

Последнее замечание на эту тему вот какое. В классической геометрии всякое подпространство $V \subset H^0(X, L)$ называется *линейной системой* (а все $H^0(X, L)$ – *полной линейной системой*). Исторически, эта терминология и само понятие связано с другим, более геометрическим способом смотреть на сечения линейных расслоений с помощью так называемых *дивизоров*. Мы это будем обсуждать, но через некоторое время. Неполная линейная система V точно так же, как и полная, имеет множество базисных точек $B(V)$ и задает отображение $X \setminus B(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, которое может быть или не быть вложением, разделять или не разделять точки, и т.д.

Упражнение 9.18. *Пусть A – конечно-порожденная алгебра над полем k, $X = \operatorname{Spec} A$ – аффинная схема, $L = \mathcal{O}_X$ – тривиальное линейное расслоение, а $V \subset A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ – конечномерное подпространство. В каких случаях линейная система V (1) очень обильна? (2) не имеет базисных точек?*