Лекция 13.

Гомологическая теория локальных колец: проективная размерность, глубина и регулярные последовательности, комплекс Кошуля, характеризация Серра регулярных колец.

Проективная размерность.

В этой лекции мы будем изучать гомологические свойства модулей над локальным кольцом. Пусть A – нетерово локальное кольцо, с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$.

Лемма 13.1. *Пусть M – конечно порожденный A-модуль; тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *M плоский,*

(ii) *M проективный,*

(iii) *M свободный,*

(iv) $\mathsf{Tor}^1(M, k) = 0$.

Доказательство. (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv) очевидно, доказать надо (iv) $\Rightarrow$ (iii). Действительно, поскольку M конечно порожден, можно выбрать свободный модуль $F = A^{\oplus n}$ и сюръективное отображение $f : F \to M$, причем можно взять число образующих n минимальным возможным, а именно, равным размерности $\mathsf{dim}_k\, M/\mathfrak{m}M$. Тогда $\overline{f} : F/\mathfrak{m}F \to M/\mathfrak{m}M$ – изоморфизм (такую пару $\langle F, f\rangle$ будем называть *минимальным свободным накрытием* модуля M). Поэтому, если $N = \mathsf{Ker}\, f \subset F$, то $N/\mathfrak{m}N$ сюъективно накрывается k-векторным пространством $\mathsf{Tor}^1(M, k)$. По предположению, оно равно нулю; стало быть, $N = 0$ по лемме Накаямы, и $M \cong F$ – свободный A-модуль. □

Это утверждение имеет следующее обобщение.

Лемма 13.2. *Пусть M – конечно порожденный A-модуль; тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *M имеет проективную резольвенту длины n,*

(ii) $\mathsf{Tor}^n(M, k) = 0$.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) очевидно. В другую сторону, возьмем проективную резольвенту $P_\bullet$ модуля M. Обозначим через $Z_0 \subset P_0$ ядро отображения аугментации $P_0 \to M$, а через $Z_i \subset P_i$, $i \geq 1$ – ядро дифференциала $d : P_i \to P_{i-1}$. Тогда резольвента $P_\bullet$ распадается в набор коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow Z_{i+1} \longrightarrow P_{i+1} \longrightarrow Z_i \longrightarrow 0,$$

и, применяя по индукции длинную точную последовательность функторов Tor, получаем $\mathsf{Tor}^{n-i-1}(Z_i, k) = 0$. В частности, Z_{n-2} – проективный модуль. Поэтому резольвенту $P_\bullet$ можно обрезать – заменить P_{n-1} на Z_{n-2}, а дальше поставить нулевые модули. Получаем резольвенту длины n. □

Определение 13.3. *Проективной гомологической размерностью* модуля M называется наименьшее n, для которого M имеет проективную резольвенту длины $n+1$ – или бесконечность, если проективной резольвенты конечной длины у M вообще нет.

Проективная гомологическая размерность модуля над коммутативным, да и не обязательно коммутативным, кольцом – это важный инвариант. К сожалению, как раз в коммутативном случае он не особенно полезен, поскольку, как мы увидим, для нерегулярного кольца проективная размерность модуля, как правило, бесконечна.

Упражнение 13.1. *Пусть $A = k[x]/x^n$. Чему равна проективная размерность A-модуля k?*

Упражнение 13.2. *Пусть $\mathsf{Tor}^i(k,k) = 0$; докажите, что $\mathsf{Tor}^j(k,k) = 0$ для любого $j > i$.*

Комплекс Кошуля.

Пусть даны l штук элементов $x_1,\dots,x_l \subset \mathfrak{m}$. *Комплекс Кошуля* $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(A)$ задается так: как A-модуль, $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(A) = A\langle\xi_1,\dots,\xi + l\rangle$ есть алгебра грассмановых полиномов над A от l образующих $\xi_1 \dots,\xi_l$; дифференциал d есть дифференцирование – т.е. отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница, с соотвествующими знаками – которое на образующих равно $d(\xi_i) = x_i \in A$.

Упражнение 13.3. *Проверьте, что $d^2 = 0$. (Указание: воспользуйтесь тем, что d^2 это (косо)коммутатор d с собой, а потому тоже удовлетворяет правилу Лейбница.)*

Если дан A-модуль M, то комплекс Кошуля можно тензорно помножить на M – получается *комплекс Кошуля модуля M* $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(M) = K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(A) \otimes_A M$.

Определение 13.4. Говорят, что $x_1,\dots,x_l$ – *регулярная последовательность* для M, если комплекс Кошуля $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}$ точен везде, кроме степени 0.

Лемма 13.5. *Пусть дан конечно порожденный A-модуль M. Последовательность $x_1,\dots,x_l$ регулярна для M тогда и только тогда, когда*

(i) *x_1 – не делитель 0 в M (т.е. $x_1 m \neq 0$ для любого ненулевого $m \in M$), и*

(ii) *$x_2,\dots,x_l$ – регулярная последовательность для M/x_1M.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: комплекс Кошуля $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(M)$ есть конус отображения $K_\bullet^{x_2,\dots,x_l}(M) \to K_\bullet^{x_2,\dots,x_l}(M)$, заданного умножением на x_1; раз x_1 не делитель нуля, это отображение инъективно, и его конус квазиизоморфен его коядру; а коядро и есть в точности $K^{x_2,\dots,x_l}(M/x_1M)$.

В другую сторону: пусть $x_1,\dots,x_l$ – M-регулярная последовательность. Достаточно проверить условие (i), т.е. что x_1 не делитель 0 в M – тогда вышеприведенний аргумент работает так же и дает условие (ii). Иными словами, надо доказать, что последовательность из одного элемента x_1 регулярна для M. По индукции, для этого достаточно доказать, что последовательность $x_1,\dots,x_{l-1}$ M-регулярна.

В самом деле, представим комплекс Кошуля $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(M)$, как выше, в виде конуса отображения умножения, но не на x_1, а на x_l:

$$
\begin{aligned}
&K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(M) = K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M) \oplus K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M) \wedge \xi_l,\\
&d = d' + x_l,
\end{aligned}
\tag{13.1}
$$

где d' – дифференциал в комплексе Кошуля $K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M)$, а x_l – отображение умножения на x_l. Пусть для какого-то $i > 0$ модуль гомологий $N = H_i(K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}})$ нетривиален. Возьмем любой элемент $[a] \in N$, представленный каким-то циклом $a \in K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M)$, $d'(a) = 0$. Поскольку мы знаем, что комплекс Кошуля $K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(M) \supset K_\bullet^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M)$ ацикличен в степени i, имеем

$$a = d(b) = d(b' + b'' \wedge \xi_l)$$

для каких-то $b' \in K_{i+1}^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M)$, $b'' \in K_i^{x_1,\dots,x_{l-1}}(M)$. С учетом (13.1), это значит, что $d'(b'') = 0$, и что $a = x_l b''$ по модулю образа дифференциала d'. Тем самым, b'' есть цикл, т.е. представляет какой-то класс гомологий $[b''] \in N$, и при этом $[a] = x_l[b'']$.

Т.к. $[a] \in N$ был любой, мы заключаем, что умножение на x_l сюръективно на N. В частности, оно сюръективно на $N/\mathfrak{m}N$; а поскольку $x_l \in \mathfrak{m}$, $N/\mathfrak{m}N = 0$, и $N = 0$ по Лемме Накаямы. $\square$

Следствие 13.6. *Пусть дано регулярное локальное кольцо A размерности $d = \operatorname{dim} A$, и набор образующих $x_1, \dots, x_d$ максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$. Тогда $x_1, \dots, x_d$ – регулярная последовательность для A, а $\operatorname{dim}_k \operatorname{Tor}^l(k, k) = \binom{d}{l}$ (в частности, проективная размерность k равна d).*

Доказательство. То, что $x_1 \in \mathfrak{m}$ не есть делитель нуля, легко видеть, например, из того, что он не есть делитель нуля в кольце полиномов $k[x_1, \dots, x_d]$ – присоединенном градуированном фактор A по $\mathfrak{m}$-адической фильтрации. Так же легко видеть, что A/x_1A – регулярное кольцо размерности $d - 1$. По индукции получаем первое утверждение. Второе получается, если вычислить функторы $\operatorname{Tor}^\bullet(k, k)$ с помощью проективной резольвенты $K_\bullet^{x_1,\dots,x_d}(A)$. $\square$

Глубина.

Лемма 13.7. *Пусть M – конечно порожденный A-модуль, а n – положительное целое число; тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует M-регулярная последовательность $x_1, \dots, x_N \in \mathfrak{m}$.*

(ii) $\operatorname{Ext}^l(k, M) = 0$ *при* $l \leq n - 1$.

(Функторы $\operatorname{Ext}^l(-, M)$ здесь – это производные от функтора $\operatorname{Hom}(-, M)$, так же, как функторы $\operatorname{Tor}^l(-, M)$ – производные от $- \otimes_A M$. Подробности продумайте сами или прочитайте в любом учебнике по гомологической алгебре.)

Доказательство. Индукция по n (причем существенный шаг первый, $n = 1$).

Пусть $n = 1$. В (i) требуется элемент $x \in \mathfrak{m}$, который не есть делитель нуля для M. Иными словами, надо, чтобы объединение $\operatorname{Ann}(m) \subset \mathfrak{m}$ аннуляторов всех элементов $m \in M$ не покрывало весь максимальный идеал $\mathfrak{m} \in A$. По науке про ассоциированные идеалы, здесь достаточно взять те аннуляторы, которые просты как идеалы в A – т.е. просто все ассоциированные идеалы M. А поскольку простой идеал не может быть объединением других простых идеалов, которые в нем лежат собственным образом, сам $\mathfrak{m}$ должен быть ассоциированным идеалом для M. Итак, (ii) для $n = 1$ значит, что $\mathfrak{m} \subset A$ не есть ассоциированный простой идеал для M. Это по определению значит, что $\operatorname{Hom}(k, M) = \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{m}, M) = 0$.

Пусть теперь все доказано для какого-то n, и надо доказать для $n + 1$. Тогда замечаем, что по доказанному, существует $x_1 \in \mathfrak{m}$, которое не есть делитель нуля для M, и что для любого такого x_1, имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow M/x_1 \longrightarrow 0.$$

Рассматривая соответствующую длинную точную последовательность функторов Ext^l, заключаем, что (ii) для M, $n+1$ эквивалентно (ii) для M/x_1M, n. То же верно для (i), в силу Леммы 13.5. $\square$

Упражнение 13.4. *Докажите, что в условии* (ii) *Леммы* 13.7 $\mathsf{Ext}^l(k, M) = 0$ *можно заменить на* "$\mathsf{Ext}^l(N, M) = 0$ *для любого* A*-модуля* N *конечной длины".*

Определение 13.8. *Глубиной* $\mathsf{depth}\, M$ модуля M называется наибольшее n, для которого верны эквивалентные условия Леммы 13.7 (или 0, если они вообще никогда не верны).

Упражнение 13.5. *Докажите, что* $\mathsf{depth}\, A \leq \dim A$ *(выберите* $x \in \mathfrak{m}$*, которое не есть делитель нуля, и по индукции сведите все к* A/xA*).*

Геометрический смысл глубины такой. Пусть k алгебраически замкнуто, а A – локализация какой-то k-алгебры конечного типа в замкнутой точке. Тогда набор элементов $x_1, \dots, x_l \in A$ задает отображение $\operatorname{Spec} A \to \mathbb{A}^l$, а сами элементы x_i порождают регулярное подкольцо $B \subset A$. Тогда последовательность $x_1, \dots, x_l$ регулярна тогда и только тогда, когда A плоско над B. В частности, $\mathsf{depth}\, A = \dim A$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec} A$ допускает такое конечное отображение в $\mathbb{A}^d$ – т.е. такую нетерову нормализацию – что $\operatorname{Spec} A$ *плоско* над аффинным пространством $\mathbb{A}^d$. Впоследствии мы увидим и другие геометрические приложения понятия глубины.

Определение 13.9. Локальное кольцо, для которого $\mathsf{depth}\, A = \dim A$, называется *кольцом Коэна-Маколея.*

Лемма 13.10 (Ауслендер-Буксбаум). *Пусть* M *– конечно порожденный* A*-модуль* конечной *проективной размерности* n. *Тогда*

$$n + \mathsf{depth}\, M = \mathsf{depth}\, A.$$

Доказательство. Индукция по n. Случай $n = 0$ очевиден. Если $n > 0$, выберем минимальное свободное накрытие $f : F \to M$ модуля M, и рассмотрим $Z = \mathsf{Ker}\, f \subset F$. Тогда с одной стороны, длинная точная последовательность функторов Tor показывает, что Z имеет проективную размерность $n - 1$. С другой стороны, из длинной точной последовательности функторов Ext следует, что

$$\mathsf{Ext}^l(k, Z) \cong \mathsf{Ext}^{l-1}(k, M)$$

для всех $l < \mathsf{depth}\, A$. Если $n > 1$, это сразу дает шаг индукции (мы используем (ii) Леммы 13.7 для определения глубины). Если $n = 1$, надо дополнительно доказать, что естественное отображение $\mathsf{Ext}^l(k, Z) \to \mathsf{Ext}^l(k, F)$ равно нулю и для $l = \mathsf{depth}\, A$. Это следует из минимальности F: отображение вложения $Z \to F$ – а значит, и все индуцированные им отображения $\mathsf{Ext}^l(k, Z) \to \mathsf{Ext}^l(k, F)$ – пропускается через $\mathfrak{m}F \subset F$, а все A-модули $\mathsf{Ext}^l(k, Z)$ аннулируются максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$. $\square$

Теорема Серра.

Следствие 13.6 говорит, что если локальное кольцо A регулярно, то проективная размерность модуля k конечна (и равна $\dim A$). Из Леммы 13.2 следует, что тогда и проективная размерность любого конечно-порожденного A-модуля M не превышает $\dim A$ (говорят, что "глобальная размерность кольца A равна $\dim A$"). Удивительным образом, обратное тоже верно – имеется следующий результат Серра.

Теорема 13.11 (Серр). *Пусть A – нетерово локальное кольцо с полем вычетов k, и проективная размерность A-модуля k конечна. Тогда A регулярно.*

Доказывается это умным применением комплекса Кошуля. А именно, пусть сначала дан конечно порожденный модуль M над локальным кольцом A. Последовательно беря *минимальные* свободные накрытия, получаем такую свободную резольвенту $L_\bullet$ модуля M, что дифференциал $d : L_{i+1} \to L_i$ пропускается через $\mathfrak{m}L_i \subset L_i$. Такая резольвента называется *минимальной.*

Упражнение 13.6. *Докажите, что минимальная резольвента единственна* с точностью до изоморфизма.

Пусть теперь дан какой-то комплекс $K_\bullet$ конечно порожденных свободных A-модулей – не обязательно точный – и пусть $L_\bullet$ – минимальная резольвента модуля $K_0/\mathfrak{m}K_0$.

Лемма 13.12. *Пусть для любого $i \geq 0$ комплекс $K_\bullet$ удовлетворяет следующим двум условиям:*

(i) *дифференциал $d : K_{i+1} \to K_i$ пропускается через $\mathfrak{m}K_i \subset K_i$, и*

(ii) *индуцированое отображение $K_{i+1}/\mathfrak{m}K_{i+1} \to (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \otimes_k (K_i/\mathfrak{m}K_i)$ инъективно.*

Тогда тождественное отображение $K_0/\mathfrak{m}K_0 \to L_0/d(L_1)$ продолжается до такого отображения комплексов $f : K_\bullet \to L_\bullet$, что для любого i индуцированное отображение $f : K_i/\mathfrak{m}K_i \to L_i/\mathfrak{m}L_i$ инъективно.

Доказательство. Хотя комплекс $K_\bullet$ и не обязан быть точным, он все же состоит из свободных – а стало быть, проективных – A-модулей. С другой стороны, $L_\bullet$ – резольвента. Поэтому обычная конструкция применима и дает отображение $f : K_\bullet \to L_\bullet$. Более того, поскольку $L_\bullet$ – минимальная резольвента, дифференциал в ней пропускается через $\mathfrak{m}L_\bullet \subset L_\bullet$, и для любого i мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
K_{i+1}/\mathfrak{m}K_{i+1} & \xrightarrow{d} & (K_i/\mathfrak{m}K_i) \otimes_k (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
L_{i+1}/\mathfrak{m}L_{i+1} & \xrightarrow{d} & (L_i/\mathfrak{m}L_i) \otimes_k (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).
\end{array}$$

По нашему предположению, верхняя строка – инъективное отображение. Поэтому если правый столбец инъективен, то и композиция инъективна, а стало быть, левый столбец обязан быть инъективным. Осталось применить индукцию по i. □

Следствие 13.13. *Пусть A – локальное кольцо, а $x_1, \dots, x_l$ – минимальная система образующих максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$ (т.е. $x_1, \dots, x_l$ дают базис k-векторного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$). Тогда для любого i имеем*

$$\mathsf{dim}_k \operatorname{\mathsf{Tor}}^i(k,k) \geq \binom{l}{i},$$

и в частности, проективная размерность k не меньше, чем l.

Доказательство. Легко проверить, что, в силу минимальности $x_1, \dots, x_l$, комплекс Кошуля $K_\bullet = K_\bullet^{x_1,\dots,x_l}(A)$ удовлетворяет условиям Леммы 13.12: действительно, отображение, инъективность которого надо проверить, это в этом случае

$$\Lambda^i(V) \to V \otimes_k \Lambda^{i-1}(V),$$

где $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Поэтому если $L_\bullet$ – минимальная проективная резольвента $k = K_0/\mathfrak{m}K_0$, то $\mathsf{dim}_k L_i/\mathfrak{m}L_i \geq \mathsf{dim}_l K_i/\mathfrak{m}K_i$. Левая часть по определению есть $\mathsf{dim}_k \mathsf{Tor}^i(k,k)$, а правая – требуемый биномиальный коэффициент. $\square$

Доказательство Теоремы Серра. Пусть проективная размерность k конечна и равна l. По Лемме Ауслендера-Буксбаума, имеем тогда $l \leq l + \mathsf{depth}\, k = \mathsf{depth}\, A$, что в свою очередь не превышает $\mathsf{dim}\, A$. С другой стороны, мы только что доказали, что l не меньше, чем размерность $\mathsf{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Итак, $\mathsf{dim}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq \mathsf{dim}\, A$, а это и значит, что A регулярно. $\square$