Лекция 14.

Когомологии пучков, инъективные и вялые пучки. Инъективные модули над кольцом. Когомологии пучков на схеме.

Когомологии пучков.

Понятия проективного объекта и производных функторов от точного справа функтора очевидным образом дуализуются – надо "обратить все стрелки". Двойственное понятие к проективному объекту это инъективный объект.

Определение 14.1. Объект I какой-либо категории называется *инъективным*, если для любого инъективного морфизма

$$M \to N, \tag{14.1}$$

любой морфизм $M \to I$ продолжается до морфизма $N \to I$.

Говорят, что в категории *достаточно инъективных объектов*, если любой объект вкладывается в инъективный. Если категория C абелева (как например категория модулей над кольцом, или пучков модулей на окольцованном пространстве), и в ней достаточно инъективных объектов, то для любого *точного слева* функтора $F : C \to D$ в другую абелеву категорию D, производные функторы $R^iF : C \to D$ определяются так: для любого объекта $A \in C$ берем иъективную резольвенту $I^\bullet$, и тогда $R^iF(A)$ – это i-е когомологии комплекса $F(I^\bullet)$. Так же, как и для проективных резольвент, легко доказывается, что это действительно определяет функтор и не зависит от выбора резольвенты; для короткой точной последовательности в C, имеем длинную точную последовательность производных функторов в D.

Ситуация, в который мы сейчас будем этот формализм применять, такая: категория это категория пучков на топологическом пространстве, функтор – функтор глобальных сечений.

Лемма 14.2. *Пусть X – топологическое пространство, k – поле,* $\mathrm{Shv}_k(X)$ *– категория пучков k-векторных пространств на X. Тогда в* $\mathrm{Shv}_k(X)$ *достаточно инъективных объектов.*

Доказательство. Для любой точки $x \in X$ и любого пучка $\mathcal{F} \in \mathrm{Shv}_k(X)$, по сопряженности имеем каноническое отображение $\mathcal{F} \to i_{x*}i_x^*\mathcal{F}$, где $i_x : x \to X$ – отображение вложения точки x. Если взять объединение $\overline{X}$ всех точек – т.е. X с дискретной топологией – и обознчить $i : \overline{X} \to X$, то $\mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \cong \oplus_x i_{x*}i_x^*\mathcal{F}$ это *инъективное* отображение; поэтому достаточно доказать, что любой пучок вида $i_{x*}i_x^*\mathcal{F}$ инъективен. Действительно, для любого пучка $\mathcal{E}$ имеем $\mathsf{Hom}(\mathcal{E}, i_{x*}i_x^*\mathcal{F}) \cong \mathsf{Hom}(i_x^*\mathcal{E}, i_x^*\mathcal{F})$; поскольку функтор ограничения i_x^* точен, отсюда следует, что условие продолжения (14.1) достаточно проверять после ограничения на x. Но категория пучков на точке – это просто категория k-векторных пространств, а в категории k-векторных пространств очевидным образом *любой* объект инъективен. $\square$

Определение 14.3. *Когомологии* $H^i(X, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X это производные функторы от функтора глобальных сечений: $H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Вялые пучки.

Для определения когомологий инъективных объектов в $\mathrm{Shv}_k(X)$ достаточно, но для того, чтобы что-нибудь доказать, уже не всегда – поэтому часто пользуются следующим приемом.

Определение 14.4. Объект A абелевой категории C называется *ацикличным* для точного слева функтора F, или иногда *приспособленным к* F, если $R^iF(A) = 0$ для любого $i \geq 1$.

Лемма 14.5. *Пусть дан точный слева функтор F и резольвента $M^\bullet$ какого-то объекта A, состоящая из объектов, ацикличных для F. Тогда когомологии комплекса $F(M^\bullet)$ изоморфны $R^\bullet F(A)$.* □

Или же: производные функторы можно вычислять с помощью резольвент, составленных из ацикличных объектов. Доказательство прочитайте в учебнике или придумайте сами (указание: сначала докажите, что у любого комплекса $K^\bullet$ есть “инъективная резольвента”, а именно, комплекс из инъективных объектов $I^\bullet$ и квазиизоморфизм $K^\bullet \to I^\bullet$).

Замечание 14.6. На самом деле, можно определить понятие ацикличного объекта, не используя производные функторы, и тогда, чтобы определить и рассматривать производные функторы какого-то точного слева F, не нужно требовать, чтобы в категории было достаточно инъективных объектов – нужно только чтобы в ней было достаточно объектов, ацикличных для F (и то же, по двойственности, для функторов, точных справа). Это не такая уж и редкая ситуация: например, в категории пучков, как правило, *проективных* объектов недостаточно (а то и вообще нет). Нам все это не понадобится, по крайней мере пока; если хотите изучить эту тему, лучше смотреть тот текст, где все это и было впервые введено – “О некоторых вопросах гомологической алгебры” А. Гротендика (он очень понятный, сжато и хорошо написан).

Определение 14.7. Пучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве называется *вялым*, если для любого открытого множества U и его открытого подмножества $U' \subset U$, отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ *сюръективно.*

Упражнение 14.1. *Докажите, что любой инъективный пучок вялый (используйте то, что продолжение пучков нулем с U' на U – точный функтор).*

Лемма 14.8. *Любой вялый пучок $\mathcal{F}$ на X ацикличен по отношению к функтору глобальных сечений $\Gamma(X, -)$.*

Доказательство. Надо доказать, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для любого $i \geq 1$ и любого вялого $\mathcal{F}$. Индукция по i. Вложим $\mathcal{F}$ в инъективный пучок I, и обозначим $\mathcal{F}' = I/\mathcal{F}$, так что есть короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow I \xrightarrow{f} \mathcal{F}' \longrightarrow 0 \tag{14.2}$$

пучков на X. Мы утверждаем – и для этого утверждения неважна даже инъективность I – что отображение $\Gamma(X, I) \to \Gamma(X, \mathcal{F}')$ сюръективно. Действительно, выберем сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}')$; надо доказать, что $s = f(s')$ для какого-то сечения $s' \in \Gamma(X, I)$. Рассмотрим множество пар $\langle U, s'_U \rangle$ из открытого подмножества $U \subset X$ и такого $s'_U \in I(U)$, что $f(s'_U) = s|_U$. Это множество естественным образом частично упорядочено ($\langle U, s'_U \rangle \leq \langle U', s'_{U'} \rangle$ если $U \subset U'$ и $s_{U'}|_U = s_U$). Аксиомы пучка немедленно показывают, что оно удовлетворяет условиям Леммы Цорна. Пусть $\langle U, s'_U \rangle$ – его максимальный элемент. Тогда если $U \neq X$, то есть точка $x \in X$, $x \notin U$; по определению факторпучка у нее есть окрестность $V \subset X$ и такое $s'_V \in I(V)$, что $f(s'_V) = s|_V$. Тогда на пересечении s'_U и s'_V отличаются на сечение $t \in \mathcal{F}(U \cap V)$ пучка $\mathcal{F}$, и в силу вялости $\mathcal{F}$, t можно продолжить до сечения $t_V \in \mathcal{F}(V)$ на всем V. Заменим s'_V на $s'_V + t_V$; тогда s'_V и s'_U согласованы на пересечениях, а потому задают общее сечение $s' \in I(U \cup V)$, причем по-прежнему $f(s') = s$. Это противоречит максимальности U.

Тот же аргумент работает, если вместо X рассматривать сечения на каком-то открытом $U \subset X$. Отсюда немедленно вытекает, что $\mathcal{F}'$ тоже вялый. Из длинной точной последовательности когмологий, связанной с (14.2), получаем, что $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ (база индукции) и $H^{i+1}(X, \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F}')$ (индуктивный переход). $\square$

Главное достоинство вялых пучков – это что они сохраняются при прямом образе: прямой образ вялого пучка вялый (проверьте). Это используется например для следующего.

Упражнение 14.2. *Докажите, что если $f : X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств, то любой вялый пучок $\mathcal{F}$ на X ацикличен для функтора прямого образа f_*.*

Лемма 14.9. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм топологических пространств, а $\mathcal{F}$ – пучок на X, ацикличный для f_*. Тогда $H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(Y, f_*\mathcal{F})$.*

Доказательство. Для H^0, т.е. для глобальных сечений, это следует из определения прямого образа (без всяких предположений на $\mathcal{F}$). Высшие когомологии $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ будем вычислять с помощью вялой резольвенты $F^\bullet$; тогда $f_*F^\bullet$ – вялая резольвента для $f_*\mathcal{F}$. $\square$

Замечание 14.10. Утверждение Леммы может показаться тривиальным и верным в более общей ситуации: если есть функтор $F : C \to D$, точный слева функтор $G : D \to E$ и объект $A \in C$, ацикличный для F, то $R^\bullet G(F(A)) \cong R^\bullet(G \circ F)(A)$. Но это неверно (даже если F вообще точный). Пример: C и E – категория k-векторных пространств, D – категория $k[x]$-модулей, F – функтор вложения, G – сопряженный функтор факторизации по x ($M \mapsto M/xM$).

Инъективные модули.

Чтобы обобщить вышесказанное с пучков векторных пространств на пучки модулей – а нас в конечном счете интересуют когерентные пучки на схеме – надо сначала разобраться в ситуации, когда X просто точка. Иными словами, надо построить инъективные объекты в категории A-модулей для какого-то (нетерова коммутативного) кольца A. Они там действительно есть, но этот факт в учебниках очень не любят не доказывать, ссылаясь на другой учебник. Потратим поэтому некоторое время и разберемся в том, что происходит.

Упражнение 14.3. *Докажите, что абелева группа A инъективна как $\mathbb{Z}$-модуль тогда и только тогда, когда она* делима, *т.е. для любого $a \in A$ и любого ненулевого $n \in \mathbb{Z}$ существует такое $a' \in A$, что $a = na'$.*

Упражнение 14.4. *Докажите, что в категории модулей над кольцом $\mathbb{Z}_p$ p-адических чисел модули $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ инъективны.*

Заметим, что ни тот, ни другой не конечно порождены. Это общая ситуация: чтобы построить инъективные объекты, конечно-порожденных модулей недостаточно, и надо рассматривать все.

Лемма 14.11. *Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал в коммутативном кольце A, а I – инъективный модуль над локализацией $A_\mathfrak{p}$. Тогда I инъективен и как A-модуль.*

Доказательство. По сопряженности, для любого A-модуля M имеем

$$\mathsf{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, I) = \mathsf{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M \otimes_A A_\mathfrak{p}, I) = \mathsf{Hom}_A(M, I),$$

а поскольку локализация – точный функтор, условие продолжения (14.1) достаточно проверять после перехода к $A_{\mathfrak{p}}$-модулям. $\square$

Итак, инъективные модули достаточно уметь строить для локальных колец. На самом деле, для них это можно сделать достаточно точно.

Определение 14.12. Инъективный модуль I над локальным кольцом A с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$ называется *инъективной оболочкой* k (по-английски injective hull), если

(i) $\operatorname{Supp} I = \{\mathfrak{m}\} \subset \operatorname{Spec} A$, и

(ii) $\mathsf{Hom}_a(k, I) = k$.

Определение 14.13. Докажите, что если инъективная оболочка существует, то она единственна с точностью до изоморфизма.

Теорема 14.14. *Пусть A – нетерово локальное кольцо; тогда у поля вычетов $k = A/\mathfrak{m}$ есть (единственная с точностью до изоморфизма) инъективная оболочка I.*

Лемма 14.15. *Пусть A-модуль I удовлетворяет условию продолжения* (14.1) *для любой пары $\mathfrak{a} \subset A$, где $\mathfrak{a}$ – идеал в A. Тогда I инъективен.*

Доказательство. Надо проверить условие продолжения для любой пары модулей $M \subset N$: дано $f : M \to I$, надо продолжить его до $f_N : N \to I$. Рассмотрим множество пар $\langle M', f' \rangle$, $M' \subset N$ содержит M, $f' : M' \to I$ продолжает $f : M \to I$. Это множество частично упорядочено "по продолжению" и удовлетворяет условию Леммы Цорна. Поэтому достаточно взять максимальный подмодуль и, если это не все N, прибавить к нему один элемент. Иными словами, мы можем предполагать, что $N = M + A \cdot x$ для какого-то $x \in N$. Тогда $\mathfrak{a} = M \cap A \cdot x \subset A$ – идеал, и чтобы продолжить f с M на N, достаточно продолжить его с $\mathfrak{a}$ на A. $\square$

Лемма 14.16. *Пусть кольцо A – локальное нетерово, а A-модуль I удовлетворяет условию продолжения для всех пар $M \subset N$ A-модулей конечной длины, причем $\operatorname{Supp} I$ – замкнутая точка $\operatorname{Spec} A$. Тогда I инъективен.*

Доказательство. По Лемме 14.15 достаточно для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ продолжить любое отображение $f : \mathfrak{a} \to I$ на все A. Поскольку по условию максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset A$ – единственный ассоциированный идеал для I, любой элемент $x \in I$ аннулируется какой-то степенью $\mathfrak{m}^n$; поскольку $\mathfrak{a}$ конечно порожден, f обращается в ноль на $\mathfrak{m}^N \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ для какого-то N. По Лемме Артина-Риса $\mathfrak{m}^{N'} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^M \mathfrak{a}$ для какого-то большего N'. Поэтому f определено на $\mathfrak{a}/(\mathfrak{m}^{N'} \cap \mathfrak{a})$, и его достаточно продолжить на $A/\mathfrak{m}^{N'}$. Оба модуля – конечной длины. $\square$

Локальная двойственность (для модулей конечной длины).

Чтобы доказать Теорему 14.14, нам осталось научиться строить модули, удовлетворяющие условию продолжения отображений для пар $M \subset N$ A-модулей конечной длины. Это можно очень просто сделать в "геометрической" ситуации – когда само кольцо A есть алгебра над k.

А именно, если A – k-алгебра, то всякий A-модуль M конечной длины есть также конечномерное векторное пространство над k. Легко видеть, что двойственное векторное пространство M^* тоже имеет естественную структуру A-модуля конечной длины. Таким образом, имеем функтор $M \mapsto M^*$ из категории A-модулей конечной длины в двойственную к ней, причем не просто функтор, а эквивалентность. Пусть $\widehat{A}$ – пополнение кольца A, а $I = \widehat{A}^*$ – "топологически двойственный к нему", иными словами, просто прямой предел $\lim_{\to}(A/\mathfrak{m}^n)^*$. Тогда легко видеть, что для любого M конечной длины имеем

$$\mathsf{Hom}_A(M, I) = \mathsf{Hom}_A(A, M^*) = M^*.$$

В частности, $\mathsf{Hom}_A(,I)$ – точный функтор на модулях конечной длины, и в силу Леммы 14.16 I инъективен. Проверьте, что это и есть инъективная оболочка k.

Упражнение 14.5. *Пусть A не только k-алгебра, но и артинова k-алгебра (т.е она конечномерна как векторное пространство над k). Верно ли, что $A^* \cong A$? Если нет, верно ли хоть иногда?*

В общей ситуации – полезный пример здесь $A = \mathbb{Z}_p$ – эта конструкция прямо так не проходит: никакого очевидного способа построить локальную двойственность нет. И это на самом деле та же задача, что построение I.

Лемма 14.17. *Пусть I – инъективная оболочка k; тогда $M \mapsto M^* = \mathsf{Hom}_A(M, I)$ – автоантиэквивалентность категории A-модулей конечной длины, причем инволютивная ($M^{**} \cong M$).*

Доказательство. Поскольку I инъективен, наша двойственность $M \mapsto M^*$ есть точный функтор, причем поскольку $\mathsf{Hom}_A(k, I) = k$, он переводит k в себя. Отображение $M \mapsto M^{**}$ строится так же, как для векторных пространств; поскольку для $M = k$ оно изоморфизм, а функтор точный, оно изоморфизм для любого M конечной длины. Поэтому $M \mapsto M^*$ – эквивалентность (обратная самой себе). □

Если кольцо A содержит хоть какое-то поле, один из способов построить и I, и локальную двойственность – это заметить, что A можно, ничего не меняя, заменить его пополнением, а дальше применить структурную теорему Коэна о полных локальных кольцах. Есть еще способ строить двойственность сначала для регулярных колец – используя так называемые "локальные когомологии" – а потом представить наше кольцо A как фактор регулярного, и таких образом перенести двойственность на него. Но мы будем действовать честно – явно построим I для любого нетерова A как прямо предел, аналогичный $\lim_{\to}(A/\mathfrak{m}^n)*$.

Для этого нам понадобится явная интерпретация функторов Ext^1. А именно, пусть дана точная последовательность

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0 \tag{14.3}$$

(модулей, пучков, или вообще объектов какой-то абелевой категории). Тогда длинная точная последовательность функторов Ext дает, в частности, граничное отображение

$$\delta : \mathsf{Hom}(M_3, M_3) \to \mathsf{Ext}^1(M_3, M_1).$$

Его можно применить к единичному отображению $\mathsf{id} \in \mathsf{Hom}(M_3, M_3)$ и получить класс $\delta(\mathsf{id}) \in \mathsf{Ext}^1(M_3, M_1)$. Говорят, что точная последовательность (14.3) *представляет по Йонеде* класс $\delta(\mathsf{id})$.

Лемма 14.18. *Любой класс $a \in \mathsf{Ext}^1(M_3, M_1)$ представляется по Йонеде какой-то точной последовательностью вида* (14.3)*, и два класса равны тогда и только тогда, когда представляющие их точные последовательности изоморфны.* □

Доказательство придумайте сами (это несложно). Отсюда также немедленно выводится, что A-модуль I удовлетворяет свойству продолжения для пары модулей $M \subset N$, если имеем $\mathsf{Ext}^1(M/N, I) = 0$.

Замечание 14.19. Исторически, Ext^1 определялся именно как класс эквиваленоси расширений (14.3) (а Ext это слово extension, расширение). Высшие Ext обобщают его так же, как высшие Tor обощают кручение.

Рассмотрим теперь любой A-модуль M конечной длины. Т.к. $\mathsf{Ext}^{\bullet}(k, M)$ можно вычислять с помощью проективной резольвенты k, а ее можно составить из конечно порожденных модулей, все $\mathsf{Ext}^{\bullet}(k, M)$ – конечномерные k-векторные пространства. В частности, $\mathsf{Ext}^1(k, M)$ – конечномерное векторное пространство. Т.к. Ext коммутируют с прямой суммой, для любого конечномерного k-векторного пространства V имеем $\mathsf{Ext}^1(V, M) \cong \mathsf{Hom}(V, M)$. Положим $V = \mathsf{Ext}^1(k, M)$, и рассмотрим класс в $\mathsf{Ext}^1(V, M)$, отвечающий при этом изоморфизме тождественному отображению $\mathsf{id} \in \mathsf{Hom}(V, \mathsf{Ext}^1(k, M))$. Представим его по Йонеде точной последовательностью

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I(M) \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Тогда $I(M)$ – тоже A-модуль конечной длины, снабженный отображением $M \to I(M)$. При этом по построению, граничный дифференциал $\mathsf{Ext}^1(k, M) = V = \mathsf{Hom}(k, V) \to \mathsf{Ext}^1(k, M)$ в длинной точной последовательности функторов $\mathsf{Ext}^1(k, -)$, связанной с расширением $I(M)$, биективен. Следовательно,

$$\mathsf{Hom}(k, M) \cong \mathsf{Hom}(k, I(M)),$$

а отображение $\mathsf{Ext}^1(k, M) \to \mathsf{Ext}^1(k, I(M))$ равно нулю. Обозначим по индукции $I^l(M) = I(I^{l-1}(M))$, и положим $I^{\infty}(M) = \lim_{\to} I^l(M)$.

Лемма 14.20. *Модуль $I = I^{\infty}(k)$ – инъективная оболочка A-модуля k.*

Доказательство. Поскольку функторы $\mathsf{Ext}^{\bullet}(k, -)$ можно вычислять с помощью проективной резольвенты, составленной из конечно порожденных модулей, а для любого конечно порожденного F функтор $\mathsf{Hom}(F, -)$ коммутирует с прямыми пределами, имеем

$$\mathsf{Ext}^1(k, I) = \lim_{\to} \mathsf{Ext}^1(k, I^l(k)).$$

Но все отображения перехода в этом прямом пределе обращаются в 0; стало быть, $\mathsf{Ext}^1(k, I) = 0$. По длинной точной последовательности, $\mathsf{Ext}^1(M, I)$ равно нулю для любого M конечной длины. Поэтому I удовлетворяет свойству продолжения для пар модулей $M \subset N$ конечной длины. Поскольку все $I^l(k)$ конечной длины, носитель I – максимальный идеал $\{\mathfrak{m}\} \subset \operatorname{Spec} A$; поэтому I инъективен. Наконец, поскольку $\mathsf{Hom}(k, I^l(k)) \cong \mathsf{Hom}(k, I^{l-1}(k))$, имеем

$$\mathsf{Hom}(k, I) = \lim_{\to} \mathsf{Hom}(k, I^l(k)) = k,$$

и стало быть, I – действительно инъективная оболочка. □

Когомологии аффинных схем.

Лемма 14.21. *Пусть A – нетерово кольцо. Тогда в категории A-модулей достаточно инъективных объектов.*

Доказательство. Надо любой A-модуль M вложить в инъективный. По Лемме Цорна, можно считать, что M конечно порожден. Если подмодуль $M_1 \subset M$ вложен в I_1, а фактормодуль $M_2 = M/M_1$ вложен в I_2, то вложение M_1 в силу инъективности продолжается до отображения $M \to I_1$ и, складывая это с вложением M_2, получаем отображение $M \to I_1 \oplus I_2$, которое тоже, очевидно, вложение. Поэтому по индукции можно предполагать, что $M = A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал. Тогда M вкладывается в $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, а оно в свою очередь вкладывается в свою инъективную оболочку $I_\mathfrak{p}$. □

Лемма 14.22. *Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{p}$ – простой идеал, $I_\mathfrak{p}$ – инъективная оболочка поля вычетов локализации по нему. Тогда квазикогерентный пучок $\widetilde{I}_\mathfrak{p}$ на $X = \operatorname{Spec} A$, отвечающий A-модулю $I_\mathfrak{p}$, есть вялый пучок.*

Доказательство. Пусть $X_\mathfrak{p} = \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p}$, и $f : X_\mathfrak{p} \to X$ – естественное отображение. Тогда $\widetilde{I}_\mathfrak{p} = f_* \widetilde{I}_\mathfrak{p}$, и, поскольку прямой образ вялого пучка вялый, достаточно доказать, что $\widetilde{I}_\mathfrak{p}$ – вялый пучок на $X_\mathfrak{p}$. Это очевидно: $\widetilde{I}_\mathfrak{p}(U)$ для открытого $U \subset X_\mathfrak{p}$ либо равно 0, если U не содержит замкнутую точку $X_\mathfrak{p}$, либо равно $I_\mathfrak{p}$, если U эту точку содержит. □

Теорема 14.23. *Для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на аффинной нетеровой схеме $X = \operatorname{Spec} A$ имеем $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i \geq 0$.*

Доказательство. Мы знаем, что категория квазикогерентных пучков на X эквивалентна категории A-модулей, и в ней поэтому достаточно много инъективных объектов – более того, по доказательству Леммы 14.21, любой модуль можно вложить в сумму объектов вида $\widetilde{I}_\mathfrak{p}$ для всяческих точек $\mathfrak{p} \in X$. Поскольку все они дают вялые пучки на X, когомологии $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ можно вычислять с помощью инъективной резольвенты $I^\bullet$ для $\Gamma(X, \mathcal{F})$ – $H^i(X, \mathcal{F})$ есть когомологии комплекса $\Gamma(X, \widetilde{I}^\bullet)$. Но в силу экиваленентности, этот комплекс есть $I^\bullet$, и высших когомологий у него нет. □

Упражнение 14.6. *Пусть $f : X \to Y$ – аффинный морфизм схем (т.е. прообраз аффинной открытой подсхемы тоже аффинный). Докажите, что $R^i f_* \mathcal{F} = 0$, $i \geq 1$, для любого квазокогерентного $\mathcal{F}$ на X.*