Лекция 15.

Когомологии Чеха. Локальные когомологии. Когомологии проективного пространства. Двойственность Серра-Гротендика, локальная и глобальная. Теорема Серра об обращении в ноль.

Когомологии Чеха.

Самый наглядный способ вычислить когомологии топологического пространства X с коэффициентами в каком-то пучке $\mathcal{F}$ – это так называемые *когомологии Чеха.* Мы им пользоваться не будем, потому что он требует писать много индексов, но расскажем про него все равно.

Итак, пусть дано топологическое пространстви X и пучок $\mathcal{F}$ на X. Выберем открытое покрытие U_i, $i = 1, \dots, l$ схемы X. Для любого набора индексов $I = \langle i_0, \dots, i_p \rangle$, обозначим через U_I пересечение $U_I = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$, и обозначим через $j_I : U_I \to X$ его вложение в X. *Резольвента Чеха* $C^\bullet(\{U_i\}, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ строится так. Во-первых, полагаем

$$C^p(\{U_i\}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{|I|=p} j_{I*} j_*^I \mathcal{F},$$

где $|I|$ для набора $I = \langle i_0, \dots, i_p \rangle$ равно числу p. Во-вторых, замечаем, что для любого индекса i и набора I по сопряженности имеем каноническое отображение

$$p_i : j_{I*} j_*^I \mathcal{F} \to j_{I'*} j_*^{I'} \mathcal{F},$$

где $I' = I \cup \{i\}$. Из этих канонических отображений составляем дифференциал

$$d = \oplus_{i,I,i \notin I} \sigma(I,i) p_{I,i} : C^\bullet(\{U_i\}, \mathcal{F}) \to C^{\bullet+1}(\{U_i\}, \mathcal{F}).$$

Здесь $\sigma(I,i)$ это знак, который подбирается так, чтобы d^2 было равно нулю (обычно берут четность числа элементов из I, строго меньших i).

Лемма 15.1. *Комплекс Чеха – резольвента пучка* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Отображение $\mathcal{F} \to C^0(\{U_i\}, \mathcal{F})$, как и дифференциал Чеха, строится по сопряженности. Надо доказать, что это квазиизоморфизм, т.е. что конус $\overline{C}^\bullet(\{U_i\}, \mathcal{F})$ этого отображения – ацикличный комплекс. Но это достаточно доказывать локально, т.е. после ограничения на любое $U \in \{U_i\}$. После такого ограничения, комплекс $\overline{C}^\bullet(\{U_i\}, \mathcal{F})$ превращается в конус тождественного эндоморфизма комплекса $\overline{C}^\bullet(\{U_i \cap U\} \setminus \{U\}, j^*\mathcal{F})$, где $j : U \to X$ – вложение U в X. $\square$

В частности, пусть X – схема, $\mathcal{F}$ – квазикогерентный пучок, а $\{U_i\}$ – *аффинное* покрытие. Кроме того, пусть схема X *отделима.*

Лемма 15.2. *Пересечение $U \cap V \subset X$ любых двух открытых аффинных подмножеств $U, V \subset X$ отделимой схемы X аффинно.*

Доказательство. По определению отделимости, диагональ $\Delta \subset X \times X$ – замкнутая подсхема; поэтому $U \cap V = (U \times V) \cap \Delta$ – замкнутая подсхема аффинной схемы. $\square$

Следовательно, все пересечения U_I тоже аффинны, а вложения $j_I : U_I \to X$ – аффинные морфизмы, и мы имеем

$$H^\bullet(X, j_{I*} j_I^* \mathcal{F}) \cong H^\bullet(U_I, j_I^* \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_I),$$

а высших когомологий нет. Тем самым, все пучки $j_{I*} j_*^I \mathcal{F}$ ацикличны для функтора $\Gamma(X, -)$, и когомологии $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ можно вычислять с помощью резольvenты Чеха: они равны когомология комплекса $\Gamma(X, C^\bullet(\{U_i\}, \mathcal{F}))$.

Упражнение 15.1. *Вычислите с помощью комплекса Чеха когомологии $H^\bullet(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(n))$, где $\mathbb{P}^1_k$ – проективная прямая над каким-либо полем k, а $\mathcal{O}(n)$, как обычно – n-я тензорная степень пучка $\mathcal{O}(1)$.*

Часто аффинные покрытия получают так. Пусть $X \subset P^N_A$ – *проективная* схема, т.е. замкнутая подсхема в проективном пространстве $\mathbb{P}^N_A$ над каким-нибудь кольцом A. Тогда в $\mathbb{P}^N_A$ можно взять $N+1$ координатную гиперплоскость H_i, $i = 0, \dots, N$, и дополнения к ним – аффинные пространства. Поэтому $X \setminus (X \cap H_i)$ – замкнутые подмножества аффинных пространств, а потому аффинные схемы. Тем самым, они образуют аффинное покрытие X.

Локальные когомологии.

Мы, однако, будем вычислять когомологии проективных схем другим способом, который дает ответ сразу, без вычислений. Идея здесь в том, чтобы вместо проективной схемы X рассматривать *конус над ней* – например, вместо $\mathbb{P}^n_k$ рассматриваем $\mathbb{A}^{n+1}_k$, и окрестность нуля в нем. Сначала надо развить локальную теорию.

Пусть дано нетерово локальное кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$, и A-модуль M. Глобальными сечениями M *с носителями в* $\mathfrak{m}$ мы будем называть подмодуль $\Gamma_\mathfrak{m}(M) \subset M$, состоящий из элементов, аннулируемых какой-нибудь степенью $\mathfrak{m}^N$. Если модуль M конечной длины, то очевидно имеем $\Gamma_\mathfrak{m}(M) = M$. Если M большой – например, $M = A$ – то как правило $\Gamma_\mathfrak{m}(M) = 0$. Тем не менее, $\Gamma_\mathfrak{m}(-)$ – хорошо определенный функтор из категории A-модулей в себя. Этот функтор, очевидно, точен слева.

Определение 15.3. *Локальные когомологии* $H^\bullet_\mathfrak{m}(-)$ – это производные функторы от функтора глобальных сечений $\Gamma_\mathfrak{m}(-)$.

Геометрический смысл локальных когомологий такой. Обозначим $X = \operatorname{Spec} A$, $U = \operatorname{Spec} A \setminus \{\mathfrak{m}\}$; как и прежде, через $\widetilde{M}$ будем обозначать квазикогерентный пучок на X, отвечающий модулю M.

Лемма 15.4. *Существует канонический точный треугольник*

$$R^\bullet\Gamma_\mathfrak{m}(M) \longrightarrow M \longrightarrow R^\bullet\Gamma(U, \widetilde{M}) \longrightarrow \tag{15.1}$$

Доказательство. Заменим M на его инъективную резольвенту, состоящую из модулей вида $I_\mathfrak{p}$ – инъективных оболочек полей вычетов $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ по разным простым идеалам $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Тогда легко видеть, что подкомплекс, составленный из модулей $I_\mathfrak{m}$, вычисляет как раз $R^\bullet\Gamma_\mathfrak{m}(M)$, а факторкомплекс по нему – т.е. факторкомплекс, составленный из модулей $I_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in U \subset X$ – вычисляет $R^\bullet\Gamma(U, \widetilde{M})$. □

Замечание 15.5. Более общо, если $Y \subset X$ – замкнутая подсхема схемы X, можно определить на категории всех квазикогерентых пучков на X функтор “подпучок с носителями в Y”; для любого $\mathcal{F}$, имеем треугольник, аналогичный (15.1), где – обозначая вложение $U = X \setminus Y \subset X$ через $j : U \to X$ – справа стоит $R^\bullet j_*\mathcal{F}$.

Лемма 15.6. *Пусть M – A-модуль, t – его глубина, а $d = \mathsf{dim}\operatorname{Supp} M$ – размерность его носителя. Тогда $H^i_\mathfrak{m}(M) = 0$ при $i < t$ и $i > d$.*

Доказательство. Утверждение про глубину совсем простое. Заметим, что для любого модуля M имеем $H^\bullet_\mathfrak{m}(M) = \lim_\to \mathsf{Ext}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, M)$ (достаточно проверить это для инъективных модулей и для Ext^0, что верно по определению). А поскольку все $A/\mathfrak{m}^n$ конечной длины, мы знаем, что $\mathsf{Ext}^i(A/\mathfrak{m}^n, M) = 0$ при $i < t$. Второе утверждение доказываем индукцией по d. При $d = 0$ оно очевидно: тогда $\operatorname{Supp} M = \{\mathfrak{m}\}$, у M есть резольвента из инъективных модулей, сосредоточенных в $\mathfrak{m}$, и применение функтора $\Gamma_{\mathfrak{m}}(-)$ ничего с этой резольвентой не делает – она остается точной. В общем случае, замечаем, что, т.к. когомологии коммутируют с индуктивными пределами, можно предполагать, что M конечно порожден. Выбираем такое $x \in \mathfrak{m}$, что $\mathsf{dim} \operatorname{Supp} M/xM$ и $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\, x$ строго меньше d – здесь $\mathsf{Ker}\, x \subset M$ это ядро умножения на x, и такое возможно по теории размерности. Тогда из длинной точной последовательности когомологий выводим по индукции, что умножение на x биективно на $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ при $i > d$ (и сюръективно при $i = d$). Следовательно, при $i > d$ имеем

$$H_{\mathfrak{m}}(M) = \lim_{\to} H_{\mathfrak{m}}(M) = H_{\mathfrak{m}}(M(x^{-1})),$$

где предел берется по отображениям $x : M \to M$. Но у локализации $M(x^{-1})$ есть резольвента из инъективных модулей вида $I_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p} \in U_x \subset X$ – точка из дополнения к множеству нулей x в $X = \operatorname{Spec} A$; а у всех таких инъективных модулей локальные когомологии с носителями в $\mathfrak{m}$ равны нулю. $\square$

Лемма 15.7. *Пусть локальное кольцо A регулярно. Тогда $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ при $i \neq d = \mathsf{dim}\, A$, а $H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ – инъективная оболочка поля вычетов $k = A/\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Первое утверждение мы уже знаем (поскольку A регулярно, $\mathsf{depth}\, A = \mathsf{dim}\, A = d$). Чтобы доказать второе, представим $R^{\bullet}\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)$ комплексом инъективных A-модулей, и заметим, что, в силу (15.1), имеем

$$\mathsf{Ext}^{\bullet}(k, A) \cong \mathsf{Ext}^{\bullet}(k, R^{\bullet}\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)).$$

Но $R^{\bullet}\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)$ это комплекс инъективных модулей с когомологиями в одном члене, т.е. резольвента $H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ (с точностью до сдвига на d). Тем самым,

$$\mathsf{Ext}^{\bullet+d}(k, A) \cong \mathsf{Ext}^{\bullet}(k, H^d_{\mathfrak{m}}(A)).$$

Левую часть можно теперь вычислить с помощью резольвенты Кошуля для k и заключить, что $\mathsf{Ext}^1(k, H^d_{\mathfrak{m}}(A)) = 0$ – т.е. $H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ инъективен – а кроме того, $\mathsf{Hom}(k, H^d_{\mathfrak{m}}(A)) \cong k$. $\square$

Когомологии проективных схем.

Пусть теперь $X = Proj A^{\bullet}$ – проективная схема над каким-либо полем k, с координатной алгеброй $A^{\bullet}$. Обозначим через $C = \operatorname{Spec} A^{\bullet}$ аффинный конус над X, и пусть $\overline{C} = C \setminus \{0\}$. Тогда имеем естественную проекцию $\pi : \overline{C} \to X$. Обозначим также через $j : \overline{C} \to C$ естественное вложение.

Лемма 15.8. *Имеем естественные отождествления*

$$\bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H^{\bullet}(X, \mathcal{O}_X(q)) = H^{\bullet}(\overline{C}, \mathcal{O}_{\overline{C}}) = \Gamma(C, R^{\bullet} j_* \mathcal{O}_{\overline{C}}).$$

Доказательство. Второе равенство следует из того, что C аффинно. Чтобы доказать первое, заметим, что $\pi : \overline{C} \to X$ – аффинный морфизм (действительно, для любого открытого аффинного $U \subset X$ имеем $\pi^{-1}(U) \cong U \times (\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\})$). Поэтому достаточно заметить, что, по определению, $\pi_* \mathcal{O}_{\overline{C}} \cong \bigoplus_q \mathcal{O}_X(q)$. $\square$

Предложение 15.9. *Пусть $X = \mathbb{P}^n_k$ – n-мерное проективное пространство над полем k. Тогда*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(q)) = \begin{cases} 0, & q \geq 0, i \geq 1, \\ 0, & q \leq -(n+1), i \leq n-1, \\ 0, & -(n+1) < q < 0, i \text{ любое }. \end{cases}$$

Кроме того, $H^n(X, \mathcal{O}_X(-(n+1)-q))$ канонически изоморфно k-векторному пространству, двойственному к $H^0(X, \mathcal{O}_X(q))$.

Доказательство. Заметим, что если X – проективное пространство, то конус C над ним – регулярная схема. Рассмотрим его локализацию в $\{0\} \subset C$, и применим точный треугольник (15.1). Тогда достаточно доказать, что $H^{n+1}_{\{0\}}(C, \mathcal{O}_C)$ как градуированное векторное пространство изоморфно двойственному к $A^\bullet = \bigoplus_{q \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X)$, с градуировкой, сдвинутой на $n+1$. Поскольку C регулярно, как векторное пространство это изоморфно инъективной оболочке поля вычетов точки $\{0\} \in C$, что и требуется; надо только разобраться с градуировкой – а именно, вычислить степень $\mathsf{Ext}^{n+1}(k, A^\bullet)$, индуцированную естественной градуировкой на $A^\bullet$. То, что эта степень равна $n+1$, очевидно из комплекса Кошуля. □

Заметим, что ровно то же вычисление проходит для любого проективного X, конус над которым – регулярная схема (но это не особенно осмысленное замечание, потому что X в таком случае автоматически будет проективным пространством). Для любой схемы поступают по-другому – вкладывают ее в проективное пространство, и пользуются тем, что мы знаем когомологии $\mathbb{P}^N_k$ с коэффициентами во *всех* пучках $\mathcal{O}(q)$. Вот пример.

Лемма 15.10. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^2_k$ – кубика над полем k (т.е. кривая степени 3). Тогда $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(\mathcal{O}_X) = k$.*

Доказательство. Поскольку замкнутое вложение $i : X \to \mathbb{P}^2_k$ – аффинный морфизм, имеем $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X) \cong H^\bullet(\mathbb{P}^2_k, i_*\mathcal{O}_X)$. Поскольку X степени 3, имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-3) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Рассматриваем длинную точную последовательность когомологий, и получаем ответ. □

Определение 15.11. Пусть X – собственная кривая над полем k. *Арифметическим родом* кривой X называется размерность $\mathsf{dim}_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Упражнение 15.2. *Вычислите арифметический род плоской кривой степени d.*

Теорема Серра об обращении в ноль.

Следуя образовавшейся традиции, докажем теперь очередную – и крайне полезную! – теорему Серра. Сначала сделаем следующее наблюдение.

Лемма 15.12. *Пусть X – нетерова отделимая схема, а $\mathcal{F}$ – квазикогерентный пучок на X с носителем размерности d. Тогда $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ при $q > d$.*

Доказательство. Индукция по d. Случай $d = 0$ очевиден (в этом случае функтор глобальных сечений точен). Для общего X, мы утверждаем, что можно предположить, что $\mathcal{F}$ когерентен. Действительно, любой квазикогерентный пучок есть объединение всех своих когерентных подпучков $\mathcal{F}_i$: такие подпучки образуют частично упорядоченное множество

I, и $\mathcal{F} = \lim_{I\to} \mathcal{F}_i$. Множество I может быть сколь угодно большим, но важно, что оно *направленное*: для любых двух $i_1, i_2 \in I$ существует такое $i_3 \in I$, что $i_1, i_2 \leq i_3$. Общий факт гомологической алгебры, который мы оставим в качестве упражнения, говорит, что прямой предел по *направленному* частично упорядоченному множеству – точный функтор. Поэтому $H^q(X, \mathcal{F}) = \lim_{I\to} H^q(X, \mathcal{F}_i)$.

Итак, пусть $\mathcal{F}$ когерентен. Действуем индукцией по d. По науке про ассоциированные идеалы, достаточно рассмотреть ситуацию $\mathcal{F} = i_*\mathcal{F}_Y$, где $i : Y \to X$ – замкнутое вложение, Y неприводимо, а $\mathcal{F}_Y$ – когерентный пучок на Y. Тогда $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(Y, \mathcal{F}_Y)$, т.е. X можно заменить на Y. Теперь берем открытое аффинное множество $U \subset Y$, $j : U \to Y$, и рассматриваем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0,$$

и замечаем, что факторпучок $\mathcal{F}'$ имеет носитель на $Y \setminus U$, а размерность этого дополнения строго меньше d в силу неприводимости Y. $\square$

Теорема 15.13 (Серр). *Пусть X – проективная схема над полем k, а $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на X. Тогда существует такое q, что $H^i(X, \mathcal{F}(q')) = 0$ для любых $q' \geq q$, $i \geq 1$.*

Доказательство. Можно считать, что $X = \mathbb{P}^N$ (вложим X в $\mathbb{P}^N$ и заменим X на $\mathbb{P}^N$, а $\mathcal{F}$ – на его прямой образ). Убывающая индукция по i! Если $i > \operatorname{\mathsf{dim}} X$, q можно взять любым (независимо от $\mathcal{F}$). Пусть утверждение доказано для $i \geq i_0$. Пучок $\mathcal{F}(q)$ для какого-то q порожден глобальными сечениями – т.е. имеем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(q)) \otimes_k \mathcal{O}(-q) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

причем ядро $\mathcal{F}'$ – тоже когерентный пучок. Теперь, если мы подкрутим все на $\mathcal{O}(q')$ для достаточно большого q', то средний член не будет иметь когомологий; по индукции, увеличивая подкрутку, можно добиться того, что $H^i(X, \mathcal{F}'(q')) = 0$ при $i \geq i_0$. Тогда из длинной точной последовательности получаем $H^i(X, \mathcal{F}(q')) = 0$ при $i \geq i_0 - 1$. $\square$

Двойственность Гротендика-Серра.

Вернемся теперь в ситуацию Предложения 15.9 и подробнее изучим построенное там каноническое спаривание. Мы рассматриваем координатную алгебру $A^\bullet$ проективного пространства $\mathbb{P}^n_k$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m} = A^{\geq 1} \subset A^\bullet$, и используем изоморфизм $H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(A^{\bullet+n+1}) \cong I^\bullet_{\mathfrak{m}} \cong (A^\bullet)^*$ – получается спраивание $H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(A^{\bullet+n+1}) \otimes_k A^\bullet \to k$. Удобно разложить это спаривание в композицию двух отображений:

$$H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(A^{\bullet+n+1}) \otimes_k A^\bullet \longrightarrow H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(A^{\bullet+n+1}) \xrightarrow{\mathsf{tr}} k.$$

Здесь первое отображение – это просто действие алгебры $A^\bullet$ на $A^\bullet$-модуле $H^{n+1}_{\mathfrak{m}}(A^{\bullet+n+1})$, а второе – его называют "отображение следа" – это спаривание с единицей алгебры $A^\bullet$. На языке самого проективного пространства $X = \mathbb{P}^n_k$, это выглядит так

$$H^0(X, \mathcal{O}(q)) \otimes_k H^n(X, \mathcal{O}(-q-(n+1)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}(-(n+1))) \xrightarrow{\mathsf{tr}} k.$$

Оказывается – это изобрел, по-видимому, Гротендик – что более правильный способ смотреть на эти вещи такой. Во-первых, для любой схемы X и любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \operatorname{\mathsf{Hom}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$, и следовательно, производные функторы тоже равны – имеем изоморфизм $H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong \operatorname{\mathsf{Ext}}^\bullet(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$. Поэтому в нашей ситуации $H^\bullet(X, \mathcal{O}(-q-(n+1))) \cong$

$\mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-q-(n+1)))$. Во-вторых, можно тензорно умножить обе части на $\mathcal{O}(q)$. Тогда спаривание имеет вид

$$H^\bullet(X, \mathcal{O}(q)) \otimes_k \mathsf{Ext}^{n-\bullet}(\mathcal{O}(q), \mathcal{O}(-(n+1)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{O}(-(n+1))) \xrightarrow{\mathsf{tr}} k,$$

и первое отображение – это просто композиция Ext-групп. В такой формулировке это невырожденное спаривание можно очень сильно обобщить.

Определение 15.14. *Дуализующим комплексом* $\omega_X^\bullet$ на схеме X над полем k называется такой комплекс пучков на X с когерентными когомологиями, снабженный отображением следа $\mathsf{tr} : H^0(X, \omega_X^\bullet) \to k$, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X спаривание

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_k \mathsf{Ext}^{-i}(\mathcal{F}, \omega_X^\bullet) \longrightarrow H^0(X, \omega_X^\bullet) \xrightarrow{\mathsf{tr}} k$$

невырождено.

Лемма 15.15. *Если $X = \mathbb{P}^n_k$, то комплекс $\omega_X^\bullet = \mathcal{O}_X(-(n+1))[n]$ (т.е. пучок $\mathcal{O}_X(-(n+1))$, помещенный в степень $-n$) вместе с естественным отображением следа – дуализующий комплекс для X.*

Доказательство. Мы уже знаем, что спаривание невырождено для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_x(q)$, $q \in \mathbb{Z}$, а также для $i > \dim X$. Далее используем ту же убывающую индукцию по i, что в доказательстве Теоремы 15.13. $\square$

Лемма 15.16. *Пусть дано замкнутое вложение $i : Y \to X$. Тогда функтор прямого образа i_* из когерентных пучков на Y в когенрентные пучки на X имеет* левый *сопряженный функтор $f^!$, т.е. такой функтор $f^!$, что для любых когерентных пучков $\mathcal{F}$ на Y и $\mathcal{E}$ на X имеем каноническое отождествление*

$$\mathsf{Hom}(i_*\mathcal{F}, \mathcal{E}) \cong \mathsf{Hom}(\mathcal{F}, f^!\mathcal{E}),$$

причем функтор $f^!$ точен слева.

Доказательство. Утверждение локально: если мы сумеем построить $f^!$ на открытом покрытии X, то на пересечениях все будет согласовано автоматически, в силу каноничности сопряженного функтора. Поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ аффинно, а $Y = \operatorname{Spec} A/I \subset X$ – замкнутая подсхема, заданная идеалом $I \subset A$. Тогда для любого A/I-модуля N и любого A-модуля M, любое A-линейное отображение $N \to M$ аннулируется идеалом I, а потому пропускается через подмодуль

$$\mathsf{Hom}_A(A/I, M) \subset \mathsf{Hom}_A(A, M) = M,$$

который тоже аннулируется идеалом I. Следовательно, можно просто определить $f^!$, положив $f^!M = \mathsf{Hom}_A(A/I, M)$. Он, очевидно, точен слева (впрочем, это следует уже из того, что у него есть сопряженный f_*). $\square$

Лемма 15.17. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n_k$ – замкнутая подсхема проективного пространства $\mathbb{P}^n_k$ над полем k, а $f : X \to \mathbb{P}^n_k$ – отображение вложения. Тогда $\omega_X^\bullet = R^\bullet f^!(\mathcal{O}(-(n+1))[n])$ – дуализующий комплекс для X.*

Доказательство. Для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем

$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(\mathbb{P}^n_k, f_* X),$$
$$\mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{F}, \omega_X^\bullet) \cong \mathsf{Ext}^\bullet(f_*\mathcal{F}, \mathcal{O}(-(n+1)[n]).$$

Поэтому утверждение следует из уже доказанных утверждений для $\mathbb{P}^n_k$. □

Заметим, что здесь действительно важно работать не с пучками, а с комплексами. Например, если $X \subset \mathbb{P}^n_k$ – гладкая подсхема коразмерности d, то не только $f^!\mathcal{O}(-(n+1)) = 0$, но и $R^i f^! \mathcal{O}(-(n+1)) = 0$ для любого $i < d$.

Заметим также, что если X не проективно, а только квазипроективно, то теорема двойственности вообще говоря не работает – пространство когомологий в ней может оказаться бесконечномерным, и с самим понятием невырожденного спаривания будут проблемы. Однако все отлично работает, если хотя бы не само X, но *носитель пучка* $\mathcal{F}$ проективен – в этом случае можно вложить X как открытое подмножество в проективную схему $\overline{X}$, и вычислять все когомологии на ней – они не изменятся. Переходя к пределу, можно получить также теорему двойственности для когомологий X с носителями в проективной подсхеме $Y \subset X$ – иногда это бывает полезно.

Язык производных категорий.

На самом деле, вся наука про двойственность сильно упрощается, если с самого начала ввести категорию “комплексов с точностью до квазиизоморфизма” – так называемую *производную категорию* абелевой категории пучков на X. Это можно сделать для любой абелевой категории, но в общем случае это требует некоторых технических усилий (все это отлично изложено в книге Гельфанда-Манина). Конкретно для пучков на X можно воспользоваться тем, что есть достаточно много инъективных объектов. Тогда производная категория $D^+(X)$ определяется так: объекты это ограниченные снизу комплексы инъективных квазикогерентных пучков, а морфизмы между ними – это классы гомотопической эквивалентности отображений комплексов. При этом, чтобы не потерять контроль над конечностью, будем еще требовать, чтобы у комплексов были когерентные когомологии (сами комплексы составлены из инъективных объектов, которые когерентными не бывают, поэтому требовать чтобы сами объекты были когерентные нельзя). Тогда для любого проективного морфизма $f : X \to Y$ имеем естественый функтор прямого образа $f_* : D^+(X) \to D^+(Y)$ – производный функтор от прямого образа пучков – и теорема двойственности на этом языке выглядит так.

Теорема 15.18. *Для любого проективного морфизма $f : X \to Y$ существует функтор $F^! : D^+(Y) \to D^+(X)$, сопряженный слева к $f_* : D^+(X) \to D^+(Y)$.*

Фактически, мы доказали это для замкнутого вложения, и для проекции проективного пространства в точку, $f : \mathbb{P}^n_k \to \operatorname{Spec} k$, – в этой ситуации для любого комплекса векторных пространств $V^\bullet$ полагаем $f^! V^\bullet = V^\bullet \otimes_k \mathcal{O}(-(n+1))[n]$, и сопряженность есть просто переформулировка утверждения про невырожденное спаривание. Отсюда немедленно выводится утверждение и для композиции таких морфизмов, в частности, утверждение теоремы для $Y = \operatorname{Spec} k$. В случае произвольного Y, надо только изучить проекцию $\mathbb{P}^n_Y \to Y$; это делается так же, как для точки, и мы опускаем доказательство для экономии места.

Отметим, что – это выяснил Делинь – теорему 15.18 можно вывести из совершенно общих соображений гомологической алгебры; важно только то, что прямой образ f_* и его производные сохраняют когерентность (условие конечности). В частности, проективность морфизма и конкретное вычисление, давшее нам дуализующий комплекс на $\mathbb{P}^n_k$, здесь совершенно не важны – условие проективности можно заменить на собственность. Тем самым, если схема

X снабжена собственным морфизмом в схему Y, и у Y есть дуализующий комплекс, то он есть и у X: $\omega_X^{\bullet} = f^!\omega_Y^{\bullet}$. В частности, любая схема, собственная над $\operatorname{Spec} k$, имеет дуализующий комплекс.

Если условие конечности не выполнено, теорема 15.18 не может работать. Уже в самом простом примере $Y = \operatorname{Spec} k$, $X = \operatorname{Spec} A$ для какой-то k-алгберы A, бесконечномерной как k-векторное пространство, мы видим, что $f^!k$ должно было бы быть A-модулем A^* – двойственным векторным пространством с естественной структурой A-модуля. Но это векторное пространство совершенно огромное, континуальной по крайней мере размерности, и ведет себя плохо (в частности, $(A^*)^*$ не равно A, а кроме того, все конструкции перестают коммутировать с индуктивными пределами, локализацией и т.д.). Философски говоря, A^* надо рассматривать не как векторное пространство, т.е. индуктивный предел конечномерных векторных пространств, а как векторное пространство *с топологией*, т.е. проективный предел пространств, причем конечномерных – объект такого же рода как, скажем, пополнение $\widehat{A}$. Иными словами, категория, двойственная к категории *всех* векторных пространств, вовсе ей не эквивалентна. Тем не менее, это тоже абелева категория, с которой можно работать. Доказательство Делиня основано на далеком развитии этой идеи: он, стартуя с категории когерентных пучков, определяет некоторую категорию, "двойственную" к категории пучков квазикогерентных, и полученную добавлением *проективных* пределов, показывает что в ней гомологическая алгебра тоже работает, а функтор $f^!$ определен по тавтологическим причинам, а дальше показывает, что если рассмотреть комплексы таких странных "про-когерентных" пучков, но с когерентными когомологиями, получится все равно обычная производная категория $D^+(X)$.

Локальная двойственность.

Довольно часто надо также рассматривать схемы, собственные или проективные не над $\operatorname{Spec} k$, а над $\operatorname{Spec} A$ для какого-то локального кольца A размерности d (скажем, нам дан проективный морфизм $f : X \to Y$, и мы хотим изучать его локально по Y). В этом случае теорему 15.18 можно скрестить не с двойственностью для векторных пространств над полем, а с уже известной нам двойственностью для модулей конечной длины над локальным кольцом (она, кстати, называется двойственность Матлиса). Тут возникает техническая проблема. В нашем подходе, дуализующий комплекс это комплекс с когерентными – на языке модулей, конечно порожденными – когомологиями. В то же время, в двойственности Матлиса роль дуализующего объекта выполняет инъективная оболочка I_k, которая не такова.

Иными словами, и дуализующий комплекс $\omega_A^{\bullet}$ – если он есть – и инъективная оболочка I_k характеризуются одним и тем же свойством:

- $\mathsf{Ext}^i(k, I_k) = \mathsf{Ext}^i(k, \omega_A^{\bullet}) = 0$ при $i \neq 0$, а $\mathsf{Ext}^0(k, I_k) = \mathsf{Ext}^0(k, \omega_A^{\bullet}) = k$.

Будь они модулями конечной длины, из этого следовало бы, что они совпадают; но I_k это только индуктивный предел модулей конечной длины, а $\omega_A^{\bullet}$ это наоборот комплекс с когомологиями хоть и конечно порожденными, но не сосредоточенными в $\{\mathfrak{m}\} \in \operatorname{Spec} A$. Поэтому это существенно разные вещи. В частности, $\omega_A^{\bullet}$ не обязан существовать.

Существование $\omega_A^{\bullet}$ легко выводится из общей теории для таких A, которые получаются из проективных схем как локальные кольца в замкнутых точках (геометрическая ситуация). Более общо, мы знаем, что $\omega_A^{\bullet}$ существует для *регулярных* колец – а именно, $\omega_A^{\bullet} \cong A[d]$. Применяя Лемму 15.16, легко выводим, что $\omega_A^{\bullet}$ существует для факторкольца B/I регулярного локального кольца B по какому-либо идеалу I. Условие регулярности на B можно ослабить.

Определение 15.19. Локальное кольцо A размерности d называется *горенштейновым*, если $A[d]$ – дуализующий комплекс для A.

Упражнение 15.3. *Докажите, что кольцо A горенштейново тогда и только тогда, когда* $\mathsf{Ext}^d(k, A) = k$ *и* $\mathsf{Ext}^i(k, A) = 0$ *при* $i \neq d$

При этом надо понимать, что горенштейновость не влечет регулярность: хотя $\mathsf{Ext}^i(k, A)$ равно нулю при $i > d$, вполне могут быть нетривиальные $\mathsf{Ext}^i(k, N)$ для любого i и какого-либо другого A-модуля N. В частности, если $d = 0$, то кольцо A регулярно только в тривиальном случае $A = k$. А горенштейново оно тогда и только тогда, когда $A^* \cong A$, и примеров таких колец довольно много.

Кроме того, существование дуализующего комплекса можно доказать для *полных* локальных колец.

Предложение 15.20. *Пусть A – полное нетерово локальное кольцо. Тогда существует дуализующий комплекс $\omega_A^\bullet$.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс локальных когомологий $R^\bullet\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)$, и попробуем применить к нему двойственность Матлиса. Формально это сделать нельзя, т.к. $H^\bullet_{\mathfrak{m}}(A)$ не есть модули конечно длины; но мы знаем, что $H^\bullet_{\mathfrak{m}}(A) = \lim_{\to} \mathsf{Ext}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, A)$, и может взять проективный предел

$$\omega_A^\bullet = \lim_{\leftarrow} (\mathsf{RHom}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, A))^* = \lim_{\leftarrow} \mathsf{Hom}_A(\mathsf{RHom}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, A), I_k).$$

Из того, что кольцо A полно, легко следует, что когомологии комплекса $\omega_A^\bullet$ – *конечно порожденные* A-модули. Мы утверждаем, что это дуализующий комплекс. Действительно,

$$\mathsf{Ext}^\bullet(k, \omega_A^\bullet) = \lim_{\leftarrow} \mathsf{Ext}^\bullet(k, (\mathsf{RHom}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, A))^*) = \lim_{\leftarrow} \mathsf{Ext}^\bullet(\mathsf{RHom}^\bullet(A/\mathfrak{m}^n, A), k) = \mathsf{Ext}^\bullet(\mathbb{R}^\bullet\Gamma_{\mathfrak{m}}(A), k),$$

где среднее равенство есть как раз двойственность Матлиса. В силу (15.1), правая часть отличается от $\mathsf{Ext}^\bullet(A, k) = k$ на $\mathsf{Ext}^\bullet(R^\bullet\Gamma(U, \mathcal{O}_U), k)$, и надо только доказать, что это отличие равно нулю. На самом деле $\mathsf{Ext}^\bullet(R^\bullet\Gamma(U, \mathcal{F}), k) = 0$ для любого квазикорегентного пучка $\mathcal{F}$ на U; доказывается это, так же как Лемма 15.12, индукцией по $\mathsf{dim}\,\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$. Сводим вопрос к когерентному $\mathcal{F}$ с неприводимым носителем; выбираем $x \in \mathfrak{m}$, не обращающееся в 0 на $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F} \subset U$, и рассматривам точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/(j_*j^*\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

где j – вложение $j : \mathrm{Spec}\,A(x^{-1}) \to U$. Тогда носитель правой части строго меньше, чем носитель $\mathcal{F}$, и по индукции достаточно доказать утверждение для $\mathcal{F} = j_*j^*\mathcal{F}$, т.е. можно заменить U на аффинное множество $\mathrm{Spec}\,A(x^{-1})$, а $\mathcal{F}$ – на локализацию какого-нибудь $A(x^{-1})$-модуля M. Но тогда умножение на x обратимо на M, а стало быть, и на $\mathsf{Ext}^\bullet(R^\bullet\Gamma(U, \mathcal{F}), k) = 0$ – а другой стороны, x действует нулем на k. □

Таким образом, и для полных локальных колец, и для локальных колец "геометрического происхождения", т.е. локализаций k-алгебр конечного типа, дуализующий комплекс существует. Между этими двумя типами колец есть огромный зазор, в котором живут все контрпирмеры в коммутативной алгебре; в частности, бывают локальные кольца, для которых дуализующий комплекс построить нельзя. К счастью, в алгебраической геометрии такие кольца большая редкость.

Упражнение 15.4. *Пусть A – локальное кольцо, допускающее дуализующий комплекс $\omega_A^\bullet$. Докажите, что A – кольцо Коэна-Маколея (т.е.* $\mathsf{depth}\,A = \mathsf{dim}\,A$*) тогда и только тогда, когда все когомологии комплекса $\omega_A^\bullet$ сосредоточены в одной степени (говорят "дуализующий комплекс есть пучок").*

Дуализующий комплекс и дифференциалы.

Последнее, что надо рассказать про двойственность – это связь дуализующего комплекса и так называемого канонического расслоения.

Пусть дана гладкая схема X размерности d над полем k. Поскольку X гладкая, пучок дифференциалов $\Omega^1(X/k)$ – плоский, локально свободный пучок ранга d. Можно поэтому рассматривать его внешние степени $\Omega^i(X/k)$ – так называемые пучки дифференциальных форм.

Определение 15.21. Пучок $K_X = \Omega^d(X/k)$ дифференциальных форм старшей степени на X называется *каноническим пучком* гладкой схемы X.

Из линейной алгебры видно, что K_X – локально свободный пучок ранга 1; поэтому его еще называют каноническим линейным расслоением.

Лемма 15.22. *Пусть $i : Y \to X$ – замкнутое вложение гладкой схемы Y над полем k в гладкую схему X над тем же полем, и пусть $d = \mathsf{dim}\, X - \mathsf{dim}\, Y$. Тогда $R^j i^! K_X = K_Y$ при $i = d$, и равно нулю при других j.*

Доказательство. Выберем открытое аффинное покрытие схемы X; достаточно построить для каждого элемента $U \subset X$ этого покрытия отождествление $R^\bullet i^! K_U \cong K_{U\cap Y}[-d]$, причем сделать это так, чтобы отождествения были согласованы на пересечениях. Поскольку $Y \subset X$ – гладкая подсхема гладкой схемы, локально она задается d уравнениями, т.е. можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} A/I$, и идеал $I \subset A$ порожден d элементами $x_1, \dots, x_d$. Кроме того, можно считать, что A/I-модуль $\Omega^1((A/I)/k)$ свободный и порожден $n = \mathsf{dim}\, Y$ 1-формами $dy_1, \dots, dy_n$. Тогда $dx_1, \dots, dx_d, dy_1, \dots, dy_n$ дают A-базис в $\Omega^1(A/k)$. Нам надо вычислить $\mathsf{Ext}^\bullet(A/I, K_X)$. Это можно сделать с помощью комплекса Кошуля; получаем отождествление $\mathsf{Ext}^d(A/I, K_X) \cong K_Y$, и непосредственно проверяем, что оно не зависит от выбора x_i и y_i. $\square$

Следствие 15.23. *Для любой гладкой проективной схемы X/k, дуализующий комплекс $\omega_X^\bullet$ есть канонический пучок K_X, помещенный в степень $-\mathsf{dim}\, X$.*

Доказательство. Поскольку мы знаем, как ведут себя канонические пучки при гладких вложениях, надо только проверить утверждение для $X = \mathbb{P}^n_k$, т.е. доказать, что $K_X \cong \mathcal{O}(-(n+1))$; это несложное вычисление. $\square$

Итак, для гладких проективных схем над полем полученный абстрактно "дуализующий комплекс" есть просто каноническое расслоение, сдвинутое вниз на $-\mathsf{dim}\, X$.

Это обстоятельство, конечно же, крайне важно в приложениях – вот пример.

Упражнение 15.5. *Докажите, что для гладкой проективной кривой X над полем k арифметический род равен размерности векторного пространства $H^0(X, \Omega^1_X)$ ("число независимых дифференциалов").*

Кроме того, оно важно по историческим причинам – например, в первоначальной формулировке теоремы двойственности, которую доказал Серр, фигурировало именно каноническое расслоение K_X. Однако с современной точки зрения, надо четко понимать, что есть две совершенно независимые задачи: построение абстрактной теории двойственности, и вычисление конкретного дуализующего комплекса для гладких схем.

К сожалению, довольно долго стандартным и единственным источником по двойственности Гротендика-Серра была книга Хартсхорна "Residues and duality" – запись семинара под руководством Гротендика – где, по-видимому из-за недопонимания автора, этот вопрос безнадежно запутан. Там сразу введено именно каноническое расслоение. Для того, чтобы доказать двойственность – например, построить для K_X отображение следа – используется довольно изящная, но в общем ненужная техника так называемых "вычетов". В довершение ужаса, в этой технике нужно доказывать, что вычет не зависит от выбора локальных координат; а поскольку Хартсхорн писал получерновик, бесконечное количество утверждений типа "существует канонический изоморфизм" там не доказано вообще. Дошло до того, что сейчас возникла целая индустрия по переписыванию Хартсхорна набело – на сети есть несколько довольно длинных книг, где это сделано с той или иной степенью полноты. Во избежание недоразумений, отметим, что все это очень интересно, но абсолютно ненужно. Во-первых, для построения двойственности не надо даже знать, что такое пучок дифференциалов. Во-вторых, если все же пользоваться вычетами, то есть очень красивый метод Тэйта в размерности 1, который обобщается на высшие размерности с помощью современной техники т.н. "хохшильдовских гомологий" абелевых категорий, и дает определение вычета без всякого использования локальных координат. Этот же метод, без использования вычетов, дает отображение следа для K_X. В общем, единственное, что нужно читать в книге Хартсхорна, это приложение, которое – по-видимому, в качестве превентивной меры – написал Делинь, и где и построена инвариантная общая теория двойственности, функтор $f^!$, и доказана в максимальной полноте наша теорема 15.18.

На этом и закончим.