Лекция 16.

Плоские морфизмы. Теорема замены базы. Плоские семейства и полином Гильберта.

Плоские семейства.

Важное общематическое понятие – понятие *семейства* каких-либо структур, хорошо (гладко, непрерывно и т.д.) зависящих от параметров. Например, если дано C^∞-многообразие M и какая-нибудь дифференциально-геометрическая структура на нем, задаваемая тензорным полем ξ – например, риманова метрика – то под семейством структур, зависящих от многообразия параметров S, понимают относительное тензорное поле на $M \times S/S$, гладкое, и дающее структуру нужного типа на каждом слое. При этом в рамках дифференциальной геометрии само многообразие M – его множество точек – полагают неизменным; меняется только дополнительная структура ξ. Иначе непонятно, что взять в качестве $M \times S$ – ясно, что если допустить *любое* многообразие M', снабженное отображением в S, то слои этого отображения в разных точках могут быть совершенно разными, и ничего хорошего из такого определения не выйдет.

Оказывается, и это некоторое чудо, что в алгебраической геометрии можно определить и изучать более широкий разумный класс семейств, в которых собственно многообразие может *меняться* – например, приобретать особенности ("вырождаться"); при этом меняется оно контролируемым образом (в частности, дискретные инварианты вроде размерности остаются неизменными).

Определение это формально-алгебраическое; почему оно работает, *a priori* непонятно.

Определение 16.1. Пусть дан морфизм схем $f : X \to Y$. Квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на X называется *плоским над* Y, если он плоский как пучок $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-модулей. Сам морфизм f называется *плоским*, если $\mathcal{O}_X$ – пучок, плоский над Y.

Упражнение 16.1. *Докажите, что модуль M над нетеровым кольцом A плоский тогда и только тогда, когда для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$, локализация $M_\mathfrak{p}$ плоская над $A_\mathfrak{p}$ (указание: воспользовавшись наукой об ассоциированных идеалах, докажите сначала, что M плоский тогда и только тогда, когда $\mathsf{Tor}^1(M, A/\mathfrak{p}) = 0$ для любого простого $\mathfrak{p}$). Выведите отсюда, что морфизм аффинных схем $f : X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ плоский тогда и только тогда, когда B плоско как A-модуль.*

Отметим тривиальные примеры плоских семейств: (1) Y любое, $X = Y \times Z$ для какого-нибудь Z, (2) Y любое, $X \to Y$ – вложение открытой подсхемы. Вот нетривиальный пример.

Упражнение 16.2 (Пример плоского семейства.). *Зафиксируем положительное целое число d, и обозначим через P множество всех ненулевых однородных полиномов от трех переменных степени d. Рассмотрим P как алгебраическое многообразие (аффинное пространство без нуля). Рассмотрим подмножество $X \subset P \times \mathbb{P}^2$, заданное как*

$$X = \{\langle x, p\rangle, x \in \mathbb{P}^2, p \in P \mid p(x) = 0\}.$$

Докажите, что X – замкнутое подмногообразие, а проекция $X \to P$ – плоский морфизм.

В этом примере мы фиксируем дискретные инварианты: размерность (кривая в $\mathbb{P}^2$) и степень, и варьируем "непрерывный" инвариант – собственно уравнение степени d, задающее кривую. Получается плоское семейство. Как мы увидим, в некотором смысле все плоские семейства так и устроены. При этом, в зависимости от уравнения, кривая может быть особая или неособая, может иметь одну или несколько неприводимых компонент, и т.д.

На самом деле, первый результат о том, что в плоском семействе сохраняются дискретные инварианты, мы уже знаем: как мы доказывали, *конечно-порожденный* плоский A-модуль M локально тривиален, и в частности, размерность слоя $\mathsf{dim}_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ соотвествующего когерентного пучка не зависит от точки $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Вот второй простой результат на эту тему.

Лемма 16.2. *Пусть $f : X \to Y$ – плоский морфизм нетеровых схем, $x \in X$ – точка X, $y = f(x) \in Y$ – ее образ в Y. Тогда*

$$\mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{X_y,x} = \mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{X,x} - \mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{Y,y},$$

где $X_y = f^{-1}(y) \subset X$ – слой морфизма f над точкой y.

Если X и Y – неприводимые многообразия над полем k, это значит, что размерность любого непустого слоя $f^{-1}(y)$ – и более того, размерность любой из его неприводимых компонент – не зависит от выбора точки y (и равна $\mathsf{dim}\, X - \mathsf{dim}\, Y$).

Доказательство. Утверждение локально: дано локальное кольцо $B = \mathcal{O}_{Y,y}$ и плоская локальная B-алгебра $A = \mathcal{O}_{X,x}$; надо вычислить размерность $\mathsf{dim}\, A/\mathfrak{m}_B A$, где $\mathfrak{m}_B \subset B$ – максимальный идеал.

Индукция по $\mathsf{dim}\, B$. Заметим, что если взять какой-то идеал $I \subset B$ и заменить B на B/I, а A на A/IA, то ни $A/\mathfrak{m}_B A$, ни его размерность не изменятся. Возьмем сначала в качестве I нильрадикал B; тогда $\mathsf{dim}\, B/I = \mathsf{dim}\, B$, а поскольку IA тоже состоит из нильпотентных элементов, $\mathsf{dim}\, A/IA = \mathsf{dim}\, A$. Поэтому можно считать, что B не имеет нильпотентов. Иными словами, $\mathfrak{m}_B$ не есть ассоциированный простой идеал для B. Поэтому существует такое $x \in \mathfrak{m}_B$, которое не лежит ни в каком ассоциированном идеале, т.е. не является делителем нуля. По теории размерности, $\mathsf{dim}\, B/x = \mathsf{dim}\, B - 1$. Но т.к. A плоско над B, x не есть делитель нуля и в A (умножение $x : A \to A$ инъективно). Поэтому $\mathsf{dim}\, A/x = \mathsf{dim}\, A - 1$. Берем $I = xB$, и применяем индукцию. □

Обратное тоже верно для регулярных схем (это требует доказательства, но не безумно сложного). Этот факт иногда полезен, хотя не часто – обычно прямо доказать, что семейство плоское, проще, чем проверить регулярность. Приведем только следующий элементарный частный случай, который на практике очень полезен.

Лемма 16.3. *Пусть $f : X \to Y$ – морфизм нетеровых схем, причем Y – спектр регулярного локального кольца размерности* 1 *(говорят, что X/Y “однопараметрическое семейство”). Тогда f плоский тогда и только тогда, когда любая ассоциированная точка X переходит в* общую *точку Y (в частности, если X приведена, это значит, что любая ее неприводимая компонента доминирует Y).*

Доказательство. По условию $Y = \operatorname{Spec} A$ есть спектр кольца дискретного нормирования с какой-то униформизующей $t \in \mathfrak{m} \subset A$. Тогда A-модуль M плоский тогда и только тогда, когда $\mathsf{Tor}^1(M, A/tA) = 0$, т.е. в M нет t-кручения: умножение на t есть инъективный гомоморфизм. Иными словами, t не лежит ни в каком ассоциированном простом идеале любого локального кольца схемы X. Это и есть то, что требуется. □

Упражнение 16.3. *Пусть $Y = \mathbb{A}^2_k$ – аффинная плоскость над полем k, а X – раздутие Y в точке $0 \in Y$. Докажите, что морфизм $X \to Y$* не *является плоским.*

Замена базы.

Главный технический способ работы с плоскими семействами – это так называемая *теорема замены базы* (это вообще довольно распространенный инструмент в алгебраической геометрии по Гротендику, встречается в самых разных контекстах).

Пусть дан морфизм схем $f : X \to Y$. Пусть также дана другая схема Y', снабженная морфизмом $\pi : Y' \to Y$. Построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{\pi} & Y. \end{array}$$

Тогда утверждается, что для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X, по совершенно тавтологическим причинам существует *морфизм замены базы*

$$\pi^* f_* \mathcal{F} \to f_* \pi^* \mathcal{F}.$$

Действительно, по сопряженности имеем

$$\mathsf{Hom}(\pi^* f_* \mathcal{F}, f_* \pi^* \mathcal{F}) = \mathsf{Hom}(f^* \pi^* f_* \mathcal{F}, \pi^* f) = \mathsf{Hom}(\pi^* f^* f_* \mathcal{F}, \pi^* f),$$

и по той же сопряженности имеем канонический морфизм $f^* f_* \mathcal{F} \to \mathcal{F}$; применяя к нему π^*, получаем требуемое. Все это обобщает и абстрагирует очевидное геометрическое наблюдение: пусть Y' это точка в Y; тогда любое глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$ можно ограничить на слой $f^{-1}(y) = X \times_Y Y' \subset X$. Но поскольку при таком построении морфизма замены базы мы использовали только формальные свойства сопряженных функторов, оно немедленно обобщается на когомологии (особенно хорошо это получается, если пользоваться языком производных категорий). Утверждение про замену базы у плоских морфизмов такое.

Теорема 16.4. *Пусть $f : X \to Y$ – плоский морфизм нетеровых схем, и пусть $\mathcal{F}$ – плоский пучок на X. Тогда для любых Y', $\pi : Y' \to Y$, морфизм замены базы*

$$L^{\bullet} \pi^* R^{\bullet} f_* \mathcal{F} \to R^{\bullet} f_* \pi^* \mathcal{F}$$

есть квазиизоморфизм.

Доказательство. Утверждение очевидно локально по Y. Будем вычислять высшие прямые образы можно вычислять с помощью резольвенты Чеха аффинного покрытия X. Тогда получаем комплекс плоских $\mathcal{O}_Y$-модулей, представляющий $R^{\bullet} f_* \mathcal{F}$, его можно использовать как резольвенту для вычисления $L^{\bullet} \pi^*$, и достаточно доказать, что для любого *аффинного* $U \subset X$ отображение замены базы есть изоморфизм. Это очевидно. □

Замечание 16.5. Условие плоскости действительно важно. Например: пусть $Y = \mathbb{A}^1_k$, X – какая-то точка в нем, а Y' – та же самая точка. Тогда и расслоенное произведение $X \times_Y Y'$ – та же точка, пучки на X – просто k-векторные пространства, и $f_* L^i \pi^* V$ для любого векторного пространства V равно самому V при $i = 0$, и 0 при $i \geq 1$. Но $L^1 \pi^* V$ совершенно не равно нулю. Причина этого в том, что когда мы берем расслоенное произведение $X \times_Y Y'$, мы неизбежно забываем про все высшие Tor между $\mathcal{O}_Y$-модулями $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_{Y'}$; поэтому, чтобы теорема работала, надо потребовать, чтобы их и не было с самого начала.

Следствие 16.6. *Пусть $f : X \to Y$ – плоский проективный морфизм, Y связна, а $\mathcal{F}$ – плоский когерентный пучок на X. Тогда число*

$$\chi(\mathcal{F}, y) = \sum_i (-1)^i \operatorname{\mathsf{dim}}_{k(y)} H^i(f^{-1}(y), \mathcal{F}),$$

называемое "эйлеровой характеристикой" $\mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}$, одинаково для любой точки $y \in Y$ (здесь $k(y)$ – поле вычетов точки y). □

Плоские семейства и полином Гильберта.

Докажем теперь, для проективных схем, точное утверждение о том, что "в плоском семействе дискретные инварианты постоянны" (а также и обратное к нему). Пусть X – проективная схема над полем k, с выбранным обильным линейным расслоением $\mathcal{O}(1)$.

Лемма 16.7. *Для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X, функция*

$$P(\mathcal{F}, n) = \chi(\mathcal{F}(n)) = \sum_i (-1)^i \operatorname{\mathsf{dim}}_k H^i(X, \mathcal{F}(n))$$

есть полином степени $\operatorname{\mathsf{dim}} \operatorname{Supp} \mathcal{F}$.

Доказательство. Индукция по $\operatorname{\mathsf{dim}} \operatorname{Supp} \mathcal{F}$. Если $Y = \operatorname{Supp} \mathcal{F}$ нульмерно, то оно аффинно, а $\mathcal{O}(1)$ – тривиальное линейное расслоение на Y; поэтому $P(\mathcal{F}, n)$ не зависит от n. В общем случае, заметим, что, как следует из длинной точной последовательности когомологий, функция $P(\mathcal{F}, n)$ аддитивна по отношению к расширениям. Поэтому можно считать, что Y неприводимо. Выбираем такое гиперплоское сечение $H \subset X$, что $\operatorname{\mathsf{dim}} Y \cap H < \operatorname{\mathsf{dim}} Y$, рассматриваем четырехчленную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{\mathsf{Tor}}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_H) \longrightarrow \mathcal{F}(-1) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_H \longrightarrow 0,$$

и, поскольку носитель и левой, и правой части имеет размерность строго меньше $\operatorname{\mathsf{dim}} Y$, заключаем, что $P(\mathcal{F}, n) - P(\mathcal{F}, n-1)$ есть полином от n степени меньшей, чем $\operatorname{\mathsf{dim}} Y$. □

Определение 16.8. Полином $P(\mathcal{F}, n)$ называется *полиномом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 16.4. *Покажите, что $P(\mathcal{F}, n) = \operatorname{\mathsf{dim}} H^0(X, \mathcal{F}(n))$ для $n >> 0$ (тем самым, полином Гильберта можно определить и без когомологий).*

Теорема 16.9. *Пусть $f : X \to Y$ – проективный морфизм нетеровых схем, и пусть Y – целая схема. Тогда пучок $\mathcal{F}$ на X плоский над Y тогда и только тогда, когда полином Гильберта $P(\mathcal{F}_{f^{-1}(y)}, n)$ не зависит от выбора точки $y \in Y$.*

Доказательство. Утверждение про "только тогда" это Следствие 16.6; надо доказать обратное утверждение. Вкладывая X в проективное пространство и заменяя $\mathcal{F}$ на его прямой образ, можно считать, что $X = \mathbb{P}^N_Y$. Утверждение локально по Y, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$ – спектр нетерова целостного локального кольца, с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$, полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$ и полем частных K. По теореме Серра можно считать, заменив $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}(n)$ для достаточно большого положительного n, что $H^i(X, \mathcal{F}(l)) = 0$ для любых $l \geq 0$ и $i \geq 1$. Кроме того, пусть $X_o \subset X$ – слой X над точкой $o \in Y$, а $\rho : X_o \to X$ – его вложение; тогда, увеличивая n, можно считать, что $H^i(X_o, L^j\rho^*\mathcal{F}(l)) = 0$ при любых $i \geq 1$, $l \geq 0$, $0 \leq j \leq N$. Тогда по теореме замены базы имеем

$$P(\rho^*\mathcal{F}, l) = \mathsf{dim}_k H^0(X, \mathcal{F}(l))/\mathfrak{m}$$

при $l \geq 0$, и по предложению теоремы это равно размерности $\mathsf{dim}_K H^0(X, \mathcal{F}(l)) \otimes_A K$. Поэтому A-модуль $H^0(X, \mathcal{F}(l))$ плоский при $l \geq 0$. Поскольку пучок $\mathcal{F}$ получается локализацией из $\bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(l))$, он тоже плоский. $\square$

Заметим, что отсюда следует Лемма 16.2, по крайней мере в случае, когда X есть конус над проективной схемой Z/Y. Но это по сути то же самое доказательство. Действительно, когда при построении теории размерности мы доказывали, что $\mathsf{dim}\, A/x = \mathsf{dim}\, A - 1$, мы пользовались полиномом Гильберта – и легко видеть, что это тот же самый полином. Для проективных схем размерность это только первый, самый грубый инвариант, который можно извлечь из полинома Гильберта; как видим, можно учесть все, и получить точное численное описание плоских морфизмов.

Оказывается, что для пучков на проективном пространстве, полином Гильберта это единственный существенно дискретный инвариант: как только он зафиксирован, мозно построить такое плоское семейство над конечномерной нетеровой базой Y, что любой пучок с данным $P(\mathcal{F}, l)$ появляется в нем как слой, причем только один раз. Иными словами, пучки зависят от дискретного инварианта полинома Гильберта, и непрерывного инварианта точки $y \in Y$. Подробнее про это мы будем говорить при изучении так называемых *пространств модулей*.