Лекция 17.

Спектральная последовательность Лере. Когерентность высших прямых образов при проективном морфизме. Теорема полунепрерывности.

Функториальность и когерентность высших прямых образов

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — морфизмы. Естественный вопрос — как связаны функторы $R^j g_* \circ R^i f_*$ и функторы $R^k(g \circ f)_*$.

Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим произвольный пучок $\mathcal{F}$ на X и выберем вялую резольвенту $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\bullet$. Тогда $f_*(\mathcal{F}^\bullet)$ — комплекс вялых пучков, причем $\mathcal{H}^i(f_*(\mathcal{F}^\bullet)) \cong R^i f_*(\mathcal{F})$. Теперь разрежем комплекс $f_*(\mathcal{F}^\bullet)$ на короткие тройки

$$0 \to Z^p \to f_*(\mathcal{F}^p) \to B^{p+1} \to 0, \qquad 0 \to B^p \to Z^p \to \mathcal{H}^p \to 0$$

и выберем у пучков B^p и $\mathcal{H}^p$ инъективные резольвенты $B^p \to B^{p\bullet}$, $\mathcal{H}^p \to \mathcal{H}^{p\bullet}$.

Упражнение 17.1. *Если $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, а $A \to A^\bullet$ и $C \to C^\bullet$ — инъективные резольвенты, то найдется инъективная резольвента $B \to B^\bullet$, и точная последовательность резольвент $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$, причем каждая тройка $0 \to A^n \to B^n \to C^n \to 0$ расщепима.*

Воспользуемся дважды упражнением и построим инъективные резольвенты $Z^p \to Z^{p\bullet}$ и $f_*(\mathcal{F}^p) \to \mathcal{F}^{p\bullet}$, вкладывающиеся в (почленно расщепимые) точные тройки

$$0 \to B^{p\bullet} \to Z^{p\bullet} \to \mathcal{H}^{p\bullet} \to 0 \qquad 0 \to Z^{p\bullet} \to \mathcal{F}^{p\bullet} \to B^{p+1\bullet} \to 0.$$

Заметим, что композиции $\mathcal{F}^{p\bullet} \to B^{p+1\bullet} \to Z^{p+1\bullet} \to \mathcal{F}^{p+1\bullet}$ превращают $\mathcal{F}^{\bullet\bullet}$ в бикомплекс. Рассмотрим бикомплекс $g_*(\mathcal{F}^{\bullet\bullet})$ и изучим его когомологии. Начнем с общей науки.

Пусть $C^{\bullet\bullet}$ — бикомплекс с дифференциалами d_I и d_{II}. По нему можно построить комплекс $\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet})^\bullet$, называемый тотальным комплексом или сверткой:

$$\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet})^n = \oplus_{p+q=n} C^{pq}, \qquad D_{|C^{pq}} = d_I^p + (-1)^p d_{II}^q.$$

Теперь вычислим когомологии комплекса $T^\bullet = \mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet})\bullet$. Рассмотрим на тотальном комплексе $T^\bullet$ фильтрацию $F^s T^n = \oplus_{p+q=n,\ p\ge s} C^{pq}$. Ясно, что фильтрация согласована с дифференциалом и индуцирует фильтрацию $F^\bullet \mathcal{H}^\bullet(T^\bullet)$ на когомологиях комплекса $T^\bullet$. Опишем $Gr_F^m \mathcal{H}^n(T^\bullet)$. Для этого надо описать все элементы $x_{m,n-m} \in C^{m,n-m}$, которые можно дополнить элементами x_{pq}, $p+q=n$, $p>m$ до элемента из $\mathsf{Ker}\, D$, с точностью до тех, которые происходят из некоторого $y_{m,n-1-m} \in C^{m,n-1-m}$. Ясно, что необходимым условием является $d_{II}(x_{m,n-m}) = 0$, то есть $x_{m,n-m}$ определяет некоторый класс в $\mathcal{H}_{II}^{n-m}(C^{m\bullet})$. Следующее условие состоит в том, что $d_I(x_{m,n-m}) = \pm d_{II}(x_{m+1,n-1-m})$, то есть $x_{m,n-m}$ дает некоторый класс в $\mathcal{H}_I^m(\mathcal{H}_{II}^{n-m}(C^{\bullet\bullet}))$. Следующее условие состоит в том, что $d_I(x_{m+1,n-1-m}) = \pm d_{II}(x_{m+2,n-2-m})$. Заметим, что сопоставление $x_{m,n} \mapsto d_I(x_{m+1,n-1-m})$, где $x_{m+1,n-1-m}$ определяется равенством $d_I(x_{m,n-m}) = \pm d_{II}(x_{m+1,n-1-m})$ — корректно определенный гомоморфизм $\mathcal{H}_I^m(\mathcal{H}_{II}^{n-m}(C^{\bullet\bullet})) \to \mathcal{H}_I^{m+2}(\mathcal{H}_{II}^{n-1-m}(C^{\bullet\bullet}))$, традиционно обозначаемый $d_2^{m,n-m}$. Таким образом, наше очередное условие записывается как $d_2^{m,n-m}(x_{m,n-m}) = 0$. Продолжая в том же духе, можно показать, что происходит следующее являение. Возникает последовательность биградуированных пространств $E_s^{\bullet\bullet}$ и дифференциалов $d_s^{pq} : E_s^{pq} \to E_s^{p+s,q+1-s}$, таких что $E_{s+1}^{pq} = \mathcal{H}^{p,q}(E_s^{\bullet\bullet}, d_s)$ ($E_0^{\bullet\bullet} = C^{\bullet\bullet}$, $d_0 = d_{II}$; $E_1^{\bullet\bullet} = \mathcal{H}_{II}(C^{\bullet\bullet})$, $d_1 = d_I$; $E_2^{\bullet\bullet} = \mathcal{H}_I(\mathcal{H}_{II}(C^{\bullet\bullet}))$, d_2 построен выше; и т.д.). Кроме того, в каждой степени (pq) в какой-то момент веремени наступает стабилизация (если, например, $C^{pq} = 0$ при $p \leq 0$ или $q \leq 0$). Обозначим через E_∞^{pq} стабилизировавшийся член в степени (pq). Так вот, основное утверждение состоит в том, что

$$Gr_F^m \mathcal{H}^n(T^\bullet) \cong E_\infty^{m,n-m}.$$

Доказывать его мы не будем — все желающие могут либо сами проследить, что здесь происходит, либо прочитать доказательство в каком-либо из учебников (например, в Гельфанде–Манине). Вместо этого, обсудим терминологию.

Последовательность пространств E_s^{pq} и дифференциалов d_s называется *спектральной последовательностью* бикомплекса $C^{\bullet\bullet}$. Биградуированное пространство $E_s^{\bullet\bullet}$ называется s-ым членом последовательности, а пространство $E_\infty^{\bullet\bullet}$ — ее пределом.

Итак, описанное нами утверждение можно сформулировать следубщим образом: существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{\bullet\bullet} = \mathcal{H}_I(\mathcal{H}_{II}(C^{\bullet\bullet}))$, которая сходится к $\mathcal{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$ (т.е. на $\mathcal{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$ есть фильтрация $F^\bullet$, такая что $Gr_F^m\mathcal{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet})) = E_\infty^{m,n-m}$).

Заметим также, что когда мы строили спектральную последовательность бикомплекса, мы начинали с дифференциала d_{II}. Точно так же мы могли начать с дифференциала d_I, и получить другую спектральную последовательность со вторым членом $E_2^{\bullet\bullet} = \mathcal{H}_{II}(\mathcal{H}_I(C^{\bullet\bullet}))$, которая сходится к тому же самому прсотранству $\mathcal{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$ (правда с другой фильтрацией!).

Сравним теперь две спектральные последовательности бикомплекса $g_*(\mathcal{F}^{\bullet\bullet})$. Рассматривая когомологии относительно d_{II} и пользуясь инъективностью пучков $\mathcal{F}^{pq}$, мы видим, что $E_1^{pq} = g_*f_*\mathcal{F}^p$ при $q = 0$ и 0 иначе. Рассматривая когомологии относительно d_{II} и пользуясь вялостью пучков $\mathcal{F}^p$, мы видим, что $E_2^{pq} = R^p(g \circ f)_*(\mathcal{F})$ при $q = 0$ и 0 иначе. Отсюда заключаем, что $\mathcal{H}^n(\mathrm{Tot}(g_*(\mathcal{F}^{\bullet\bullet}))) = R^n(g \circ f)_*\mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь вторую спектральную последовательность. Пользуясь расщепимостью точных последовательностей, получаем, что $E_1^{pq} = g_*\mathcal{H}^{pq}$. Пользуясь инъективностью пучков $\mathcal{H}^{pq}$, мы видим, что $E_2^{pq} = R^q g_*(\mathcal{H}^p) = R^q g_*(R^p f_*(\mathcal{F}))$. Итак,

Теорема 17.1. *Существует спектральная последовательность, второй член которой равен $E_2^{pq} = R^q g_*(R^p f_*(\mathcal{F}))$, сходящаяся к $R^n(g \circ f)_*(\mathcal{F})$.*

Эта спектральная последовательность называется *спектральной последовательностью Лере.*

Упражнение 17.2. *Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ — комплекс пучков на нетеровой схеме X, а $f : X \to Y$ — морфизм схем. Докажите, что существуют две спектральные последовательности с начальными членами $'E_1^{p,q} = R^q f_*\mathcal{F}^p$ и $''E_2^{p,q} = R^q f_*\mathcal{H}^p(\mathcal{F}^\bullet)$, сходящиеся к одному и тому же пучку $\mathbb{R}^n f_*(\mathcal{F}^\bullet)$ (который называется n-ым гиперпрямым образом комплекса $\mathcal{F}^\bullet$, а в случае когда $Y = \mathrm{Spec}\, k$ — n-ыми гиперкогомологиями).*

Следствие 17.2. *Если $f : X \to Y$ — морфизм схем, а $\mathcal{F}$ — пучок на X, то существует спектральная последовательность $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$.*

Теорема 17.3. *Если морфизм схем $f : X \to Y$ проективен, а пучок $\mathcal{F}$ на X когерентен, то пучок $R^i f_*(\mathcal{F})$ на Y когерентен.*

Доказательство. Вопрос локален, можно считать Y аффинным. Кроме того, пучки $R^j f_*(\mathcal{F})$ квазикогерентны, поэтому не имеют на Y старших когомологий. Значит спектральная последовательность следствия Лере $H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$ вырождается во втором члене и дает изоморфизм A-модулей $H^i(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma(Y, R^i f_*(\mathcal{F}))$. Таким образом, остается проверить, что $H^i(X, \mathcal{F})$ является конечно порожденным A-модулем. $\square$

Лемма 17.4. *Если X — проективная схема над кольцом A, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, то $H^k(X, \mathcal{F})$ является конечно порожденным A-модулем.*

Доказательство. Выберем замкнутое вложение $i : X \to \mathbb{P}^N_A$ в проективное пространство и рассмотрим спектральную последовательность Лере $H^p(\mathbb{P}^N_A, R^q i_*(\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$. Так как морфизм i является аффинным, имеем $R^{>0} i_*(\mathcal{F}) = 0$, поэтому спектральная последовательность вырождается во втором члене и дает изоморфизм $H^k(X, \mathcal{F}) \cong H^k(\mathbb{P}^N_A, i_*\mathcal{F})$. Таким образом, меняя $\mathcal{F}$ на $i_*\mathcal{F}$, сводим все к случаю $X = \mathbb{P}^N_A$.

Итак, пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^N_A$. В прошлом семестре мы доказывали, что найдется целое число n_0, такое что пучок $\mathcal{F}(n_0)$ порождается глобальными сечениями. Следовательно, существует эпиморфизм $\mathcal{O}(-n_0)^{m_0} \to \mathcal{F}$. Применяя ту же конструкцию к его ядру, получаем точную последовательность $\mathcal{O}(-n_1)^{m_1} \to \mathcal{O}(-n_0)^{m_0} \to \mathcal{F} \to 0$. Продолжая таким же образом, строим левую резольвенту пучка $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}$, в которой все пучки являются кратностями обратимых $\mathcal{F}^p = \mathcal{O}(-n_p)^{m_p}$. Рассмотрим теперь спектральные последовательности гиперкогомологий комплекса $\mathcal{F}^\bullet$ (см. упр. 17.2). Имеем $''E_2^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{H}^p(\mathcal{F}^\bullet)) = H^q(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$ при $p = 0$ и нулю при $p \neq 0$. Поэтому вторая спектральная последовательность вырождается во втором члене и дает изоморфизм $\mathbb{H}^n(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}^\bullet) = H^n(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$. С другой стороны, $'E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F}^p) = H^q(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{O}(-n_p)^m_p)$. Когомологии пучков $\mathcal{O}(-n)$ на проективном пространстве были нами посчитаны явно, из этих вычислений в частности следует, что они являются конечно порожденными A-модулями. Таким образом, мы построили спектральную последовательность, первый член которой состоит из конечно порожденных A-модулей, и которая сходится к $H^n(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$. Отсюда очевидно следует конечная порожденность $H^n(\mathbb{P}^N_A, \mathcal{F})$. □

Теорема полунепрерывности

Напомним теорему о замене базы, доказанную на прошлой лекции. Пусть $f : X \to Y$ — проективный морфизм нетеровых схем, $s : Y' \to Y$ — замена базы и $X' = X \times_Y Y'$. Рассмотрим диаграмму замены базы

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{s} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

Теорема 17.5. *Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X плоский над Y, то морфизм функторов дает изоморфизм $Ls^*Rf_*\mathcal{F} \cong Rf_*s^*\mathcal{F}$.*

Эта теорема была доказана при условии, что f — плоский морфизм, а пучок $\mathcal{F}$ на X плоский. На самом деле, доказательство (на основе комплекса Чеха) полностью переносится на случай произвольного морфизма и пучка, плоского над Y.

Рассмотрим теперь специальную ситуацию. Пусть $Y' = y$ — точка схемы Y, так что $X' = X_y$ — слой схемы X над точкой y. Диаграмма замены базы в этом случае принимает вид

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{s} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ y & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

а изоморфизм замены базы принимает вид $Ls^*Rf_*\mathcal{F} \cong R\Gamma(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$. Таким образом, мы можем сравнивать когомологии пучка $\mathcal{F}_{|X_y}$ со слоями пучков $R^if_*\mathcal{F}$ в точке y. Чтобы сформулировать точное утверждение нам понадобится:

Определение 17.6. Функция $\varphi : Y \to \mathbb{Z}$ на топологическом пространстве Y называется *полунепрерывной сверху*, если для всякой точки $y \in Y$ найдется окрестность $y \in U \subset Y$, такая что $\varphi(y') \le \varphi(y)$ для всех $y' \in U$.

Заметим, что непрерывная целочисленная функция обязательно локально постоянна.

Лемма 17.7. *Если F — когерентный пучок на схеме Y, то функция $\varphi(y) = \mathsf{dim}_{k(y)}(F \otimes k(y))$ полунепрерывна сверху. Более того, если эта функция локально постоянна, то пучок F локально свободен.*

Доказательство. Вопрос локален, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, A — локальное кольцо, и F соответствует A-модулю M. Предположим, что значение функции φ в замкнутой точке $y \in Y$ равно d. Выберем базис в $M \otimes k(y)$, поднимем его в M и рассмотрим соответствующий гомоморфизм $A^d \to M$. Он сюръективен по лемме Накаямы. Пусть R — его ядро. Для всякой точки $y' \in Y$ получаем точную последовательность

$$R \otimes k(y') \to k(y')^d \to M \otimes k(y') \to 0$$

векторных пространств над $k(y')$. Отсюда $\mathsf{dim}(M \otimes k(y')) \le d$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $\varphi(y') = d$ для всех $y' \in Y$. Морфизм $k(y')^d \to M \otimes k(y')$ является сюръективным морфизмом векторных пространств одинаковой размерности, значит он изоморфизм. Поскольку это верно для любой точки y', получаем изоморфизм $A^d \cong M$, значит M свободен. □

Теорема 17.8. *Если $f : X \to Y$ — проективный морфизм схем, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X плоский над Y, то функция $h^i(y, \mathcal{F}) = \mathsf{dim}_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$ полунепрерывна сверху на Y. Если же функция $h^i(y, \mathcal{F})$ постоянна, то пучок $R^i f_*(\mathcal{F})$ локально свободен и для всякой точки $y \in Y$ имеем изоморфизм $R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes k(y) \cong H^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$.*

Доказательство. Выберем аффинное покрытие схемы X и рассмотрим прямой образ комплекса Чеха $C^\bullet := f_* C^\bullet(\{U_\alpha\}, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$. По теореме о замене базы имеем $h^i(y, \mathcal{F}) \cong \mathsf{dim}_{k(y)} \mathcal{H}^i(C^\bullet \otimes k(y))$. Заметим, что комплекс $C^\bullet$ в этой формуле можно заменить на некоторый комплекс $L^\bullet$, составленный из локально свободных пучков конечного ранга. Построить его можно индуктивно. Про комплекс $C^\bullet$ достаточно знать лишь то, что он ограничен сверху и имеет когерентные когомологии.

Пусть $C^k = 0$ при $k \ge n_0$. Положим $L^k = 0$ при $k \ge n_0$. Предположим, что мы уже построили L^k при $k \ge n$, и морфизм комплексов $g : L^\bullet \to C^\bullet$, так, что $\mathcal{H}^k(g) : \mathcal{H}^k(L^\bullet) \to \mathcal{H}^k(C^\bullet)$ — изоморфизм при $k \ge n+1$ и сюръекция при $k = n$. Построим теперь L^{n-1}. Пусть $F = \mathsf{Ker}\, \mathcal{H}^n(g)$. Заметим, что $\mathcal{H}^n(L^\bullet) = \mathsf{Ker}(L^n \to L^{n+1}) \subset L^n$, и что $g(F) \subset \mathsf{Im}(C^{n-1} \to C^n)$. Пусть $G = \mathsf{Ker}(C^{n-1} \oplus F \to \mathsf{Im}(C^{n-1} \to C^n))$. Заметим, что проекция $G \to F$ — сюръективна, а пучок F когерентен (как подпучок когерентного пучка L^n). Воспользуемся упражнением

Упражнение 17.3. *Если $G \to F$ — сюръективный морфизм из квазикогерентного пучка G в когерентный пучок F, то найдется когерентный подпучок $H \subset G$, такой что композиция $H \to G \to F$ сюръективна.*

Поскольку схема Y аффинна, найдется также локально свободный пучок конечного ранга M и морфизм $M \to G$, такой что композиция $M \to G \to F$ сюръективна. Применяя тот же метод к сюръекции $\mathsf{Ker}(C^{n-1} \to C^n) \to \mathcal{H}^{n-1}(C^\bullet)$ найдем локально свободный пучок конечного ранга M' и морфизм $M' \to \mathsf{Ker}(C^{n-1} \to C^n)$, такой что композиция $M' \to \mathcal{H}^{n-1}(C^\bullet)$ сюръективна. Возьмем теперь $L^{n-1} = M \oplus M'$ и определим теперь дифференциал $L^{n-1} \to L^n$ как комопозицию $M \oplus M' \to M \to F \subset L^n$, а морфизм $g^{n-1} : L^{n-1} \to C^{n-1}$ как сумму композиции $M \to G \to C^{n-1}$ и $M' \to \mathsf{Ker}(C^{n-1} \to C^n) \subset C^{n-1}$. Легко видеть, что теперь $\mathcal{H}^n(g) : \mathcal{H}^n(L^\bullet) \to \mathcal{H}^n(C^\bullet)$ — изоморфизм, а $\mathcal{H}^{n-1}(g) : \mathcal{H}^{n-1}(L^\bullet) \to \mathcal{H}^{n-1}(C^\bullet)$ — сюръекция.

Применяя индуктивно описанную конструкцию мы получим комплекс $L^\bullet$, составленный из локально свободных пучков конечного ранга и морфизм комплексов $g : L^\bullet \to C^\bullet$, индуцирующий изоморфизм на когомологиях. Заметим, что для всякой точки $y \in Y$ морфизм $g_y : L^\bullet \otimes k(y) \to C^\bullet \otimes k(y)$ — квазиизоморфизм.

Упражнение 17.4. *Пусть $g : B^\bullet \to C^\bullet$ — квазиизоморфизм комплексов плоских A-модулей. Докажите, что для любого A-модуля M морфизм комплексов $g \otimes 1_M : B^\bullet \otimes_A M \to C^\bullet \otimes_A M$ — квазиизоморфизм.*

Таким образом, мы построили комплекс, состоящий из локально свободных пучков конечного ранга $L^\bullet$, такой что

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^i(L^\bullet), \qquad \text{и} \qquad H^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y}) = \mathcal{H}^i(L^\bullet \otimes k(y)),$$

для всякой точки $y \in Y$.

Разрежем комплексы $L^\bullet$ и $L^\bullet \otimes k(y)$ на короткие точные последовательности

$$\begin{array}{ll} 0 \to B^k \to L^k \to W^k \to 0, & 0 \to \mathcal{H}^k(L^\bullet) \to W^{k-1} \to B^k \to 0, \\ 0 \to B^k_y \to L^k \otimes k(y) \to W^k_y \to 0, & 0 \to \mathcal{H}^k(L^\bullet \otimes k(y)) \to W^{k-1}_y \to B^k_y \to 0, \end{array}$$

где $B^k = \mathsf{Im}(L^{k-1} \to L^k)$, $W^k = \mathsf{Coker}(L^{k-1} \to L^k)$, $B^k_y = \mathsf{Im}(L^{k-1} \otimes k(y) \to L^k \otimes k(y))$, $W^k_y = \mathsf{Coker}(L^{k-1} \otimes k(y) \to L^k \otimes k(y))$. Поскольку фукнктор тензорного умножения точен справа, заключаем, что $W^k_y = W^k \otimes k(y)$. Комбинируя последние две последовательности, получаем точную последовательность

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{H}^i(L^\bullet \otimes k(y)) \to W^{i-1} \otimes k(y) \to L^i \otimes k(y) \to W^i \otimes k(y) \to 0.$$

Отсюда $h^i(y, \mathcal{F}) = \mathsf{dim}(W^{i-1} \otimes k(y)) + \mathsf{dim}(W^i \otimes k(y)) - \mathsf{dim}(L^i \otimes k(y))$. Заметим, что первые два слагаемых полунепрерывны сверху по лемме 17.7, а третье слагаемое постоянно, так как L^i — локально свободный пучок. Следовательно, функция $h^i(y, \mathcal{F})$ полунепрерывна сверху.

Если же функция $h^i(y, \mathcal{F})$ постоянна, то функции $\mathsf{dim}(W^{i-1} \otimes k(y))$ и $\mathsf{dim}(W^i \otimes k(y))$ тоже должны быть постоянны. Применяя лемму 17.7 заключаем, что пучки W^{i-1} и W^i локально свободны. Пользуясь точной последовательностью

$$0 \to \mathcal{H}^i(L^\bullet) \to W^{i-1} \to L^i \to W^i \to 0$$

заключаем, что пучок $R^i f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^i(L^\bullet)$ локально свободен.

Упражнение 17.5. *Пусть A — локальное кольцо, а M — конечно порожденный A-модуль, обладающий конечной правой свободной резольвентой $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$. Докажите, что M свободен.*

Наконец, умножая предыдущую последовательность на $k(y)$ получаем

$$0 \to R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes k(y) \to W^{i-1} \otimes k(y) \to L^i \otimes k(y) \to W^i \otimes k(y) \to 0.$$

Сравнивая ее с последовательностью $(*)$, получаем

$$H^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y}) = \mathcal{H}^i(L^\bullet \otimes k(y)) \cong R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes k(y),$$

что и требовалось. $\square$