Лекция 18.

Теорема о формальных функциях. Факторизация Штейна. Глакие морфизмы. Теорема Бертини.

Теорема о формальных функциях

Пусть $f : X \to Y$ — проективный морфизм схем, $y \in Y$ — точка, и $X_y = X \otimes k(y)$ — слой схемы X над точкой y. Доказанная нами теорема полунепрерывности позволяет при выполнении некоторых условий отождествить слой пучка $R^i f_*(\mathcal{F})$ в точке $y \in Y$ с пространством $H^i(X_y, \mathcal{F}_{|X_y})$. В общей ситуации такого изоморфизма конечно нет. Однако, в общей ситуации можно построить изоморфизм пополнения пучка $R^i f_*(\mathcal{F})$ в точке y с когомологиями пучка $\mathcal{F}$ на формальной окрестности слоя X_y.

Точнее говоря, пусть $y \in Y$ — точка. Пусть $X_y^{(n)} := X \times_Y \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n)$ — n-ая инфинитезимальная окрестность слоя X_y схемы X над точкой $y \in Y$. Рассмотрим морфизмы замены базы $R^i f_*(\mathcal{F}) \otimes (\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n) \to H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}})$. Переходя к обратному пределу по n получаем морфизм $R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge \to \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}})$.

Теорема 18.1. *Пусть $f : X \to Y$ проективный морфизм, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Естественное отображение $R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge \to \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $X = \mathbb{P}_Y^N$. Для пучков вида $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^N}(q)$ изоморфизм очевидно следует из непосредственного вычисления прямых образов и когомологий. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — произвольный пучок. Воспользуемся убывающей индукцией по i. При $i > N$ обе стороны обращаются в нуль (как прямые образы так и когомологии можно вычислять по Чеху, а комплекс Чеха на проективном пространстве относительно стандартного покрытия сосредоточен в степенях от 0 до N). Предположим, что для $i > k$ изоморфизм доказан и рассмотрим $i = k$. Выберем пучок $\mathcal{E}$ вида $\mathcal{E} = \mathcal{O}(q)^m$ и сюръекцию $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{G} = \mathsf{Ker}(\mathcal{E} \to \mathcal{F})$, так что возникает точная последовательность

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Ограничивая ее на $X_y^{(n)}$ получаем точную последовательность

$$(*) \qquad 0 \to \mathsf{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n) \to \mathcal{G}_{|X_y^{(n)}} \to \mathcal{E}_{|X_y^{(n)}} \to \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}} \to 0.$$

Появление в этой последовательности Tor_1 — основная причина того, что на конечном уровне изоорфизм отсутствует. Однако, сейчас мы увидим, что при переход к обратному пределу Tor_1 и, соответственно, появляется изоморфизм.

Лемма 18.2. *Имеем $\varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathsf{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n)) = 0$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для всякого n найдется $m \ge n$, такое что естественное отображение $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^m) \to \mathsf{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n)$ зануляется. Это утверждение локально, поэтому можно считать, что $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$ — пучки на аффинной схеме $\operatorname{Spec} A$, соответствующие конечно порожденным A-модулям F, E и G соответственно (так что $0 \to G \to E \to F \to 0$ — точная последовательность), причем модуль E — свободный. Тогда легко видеть, что пучок $\mathsf{Tor}_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n)$ соответствует A-модулю $\mathsf{Tor}_1(F, A/\mathfrak{a}^n) = (G \cap \mathfrak{a}^n E)/\mathfrak{a}^n G$ и остается заметить, что по лемме Артина–Риса для всякого n найдется $m \ge n$, так что $G \cap \mathfrak{a}^m E \subset \mathfrak{a}^n G$. □

Продолжим доказательство теоремы. Заметим, что когомологии любого из членов точной последовательности $(*)$ являются конечно порожденным $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n$-модулем (так как X проективно над Y) над артиновым кольцом $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n$.

Упражнение 18.1. *Докажите, что обратный предел в категории конечно-порожденных модулей над артиновым кольцом является точным функтором (указание: воспользуйтесь тем, что любая проективная система $\{M_n\}$ конечно-порожденных модулей над артиновым кольцом удовлетворяет условию Миттаг–Лефлера: для любого n существует $m \geq n$, такое что для всех $i, j \geq m$ образы модулей M_i и M_j в M_m совпадают).*

Переходя к обратному пределу и пользуясь леммой 18.2, получаем длинную точную последовательность

$$\varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{G}_{|X_y^{(n)}}) \to \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{E}_{|X_y^{(n)}}) \to \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}}) \to \varprojlim H^{i+1}(X_y^{(n)}, \mathcal{G}_{|X_y^{(n)}}) \to \varprojlim H^{i+1}(X_y^{(n)}, \mathcal{E}_{|X_y^{(n)}})$$

С другой стороны, рассматривая длинную точную последовательность высших прямых образов и переходя к пополнениям в y получаем точную последовательность

$$R^i f_*(\mathcal{G})_y^\wedge \to R^i f_*(\mathcal{E})_y^\wedge \to R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge \to R^{i+1} f_*(\mathcal{G})_y^\wedge \to R^{i+1} f_*(\mathcal{E})_y^\wedge.$$

Легко видеть, что эти последовательности объединяются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
R^i f_*(\mathcal{G})_y^\wedge & \to & R^i f_*(\mathcal{E})_y^\wedge & \to & R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge & \to & R^{i+1} f_*(\mathcal{G})_y^\wedge & \to & R^{i+1} f_*(\mathcal{E})_y^\wedge \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{G}_{|X_y^{(n)}}) & \to & \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{E}_{|X_y^{(n)}}) & \to & \varprojlim H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}}) & \to & \varprojlim H^{i+1}(X_y^{(n)}, \mathcal{G}_{|X_y^{(n)}}) & \to & \varprojlim H^{i+1}(X_y^{(n)}, \mathcal{E}_{|X_y^{(n)}})
\end{array}$$

Заметим, что в этой диаграмме вторая и пятая вертикальные стрелки являются изоморфизмами, так как пучок $\mathcal{E}$ есть прямая сумма пучков $\mathcal{O}(q)$, а четвертая вертикальная стрелка — изоморфизм по предположению индукции. Следовательно третья вертикальная стрелка — эпиморфизм. Но так как $\mathcal{F}$ — произвольный пучок, то первая вертикальная стрелка — тоже эпиморфизм. Но отсюда следует, что третья стрелка — изоморфизм!

Остается свести произвольный случай к случаю $X = \mathbb{P}_Y^N$. Выберем вложение $i : X \to \mathbb{P}_Y^N$, такое что $f = p \circ i$, где $p : \mathbb{P}_Y^N \to Y$ — проекция (оно существует, так как морфизм f проективен) и рассмотрим пучок $i_*\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}_Y^N$. Так как морфизм i — замкнутое вложение имеем $R^{>0} i_* = 0$, поэтому $R^i p_* i_* = R^i (p \circ i)_* = R^i f_*$, то есть $R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge = R^i p_*(i_*\mathcal{F})_y^\wedge$. С другой стороны, в расслоенном квадрате

$$\begin{array}{ccc}
X_Y^{(n)} & \longrightarrow & X \\
{\scriptstyle i}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow \\
(\mathbb{P}_Y^N)_y^{(n)} & \longrightarrow & \mathbb{P}_Y^N
\end{array}$$

все морфизмы аффинны, поэтому можно воспользоваться следующим утверждением

Упражнение 18.2. *Пусть в расслоенном квадрате*

$$\begin{array}{ccc}
X' & \xrightarrow{s} & X \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\
Y' & \xrightarrow{s} & Y
\end{array}$$

морфизмы f и s аффинны. Тогда $s^* f_* \mathcal{F} \cong f_* s^* \mathcal{F}$ для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X.

Итак, пользуясь упражнением, аключаем, что $i_*(\mathcal{F}_{|X_y^{(n)}}) \cong (i_*\mathcal{F})_{|(\mathbb{P}_Y^N)_y^{(n)}}$, откуда

$$H^i(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_{|X_y^{(n)}}) = H^i((\mathbb{P}_Y^N)_y^{(n)}, i_*(\mathcal{F}_{|X_y^{(n)}})) = H^i((\mathbb{P}_Y^N)_y^{(n)}, (i_*\mathcal{F})_{|(\mathbb{P}_Y^N)_y^{(n)}}),$$

и остается воспользоваться доказанным утверждением про $\mathbb{P}_Y^N$. □

Следствие 18.3. *Если $f : X \to Y$ — морфизм схем и $d = \max\{\dim X_y\}_{y \in Y}$, то $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0$ при $i > d$ для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$.*

Доказательство. По теореме о формальных функциях $R^i f_*(\mathcal{F})_y^\wedge = 0$ для всех y. Но пучок $R^i f_*(\mathcal{F})$ когерентен, поэтому если его пополнение во вской точке равно нулю, то он сам тоже равен нулю. □

Теорема 18.4. *Пусть $f : X \to Y$ — проективный морфизм, такой что $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$. Тогда слои морфизма f связны.*

Доказательство. Предположим слой X_y не связен, $X_y = X_1 \sqcup X_2$. Тогда схема $X_y^{(n)}$ тоже не связна, $X_y^{(n)} = X_1^{(n)} \sqcup X_2^{(n)}$. и $\Gamma(X_y^{(n)}, \mathcal{O}_{X_y^{(n)}}) = \Gamma(X_1^{(n)}, \mathcal{O}_{X_1^{(n)}}) \oplus \Gamma(X_2^{(n)}, \mathcal{O}_{X_2^{(n)}})$ и, значит, $\varprojlim \Gamma(X_y^{(n)}, \mathcal{O}_{X_y^{(n)}}) = \varprojlim \Gamma(X_1^{(n)}, \mathcal{O}_{X_1^{(n)}}) \oplus \varprojlim \Gamma(X_2^{(n)}, \mathcal{O}_{X_2^{(n)}})$. Но по теореме о формальных функциях $\varprojlim \Gamma(X_y^{(n)}, \mathcal{O}_{X_y^{(n)}}) \cong (f_*\mathcal{O}_X)_y^\wedge = (\mathcal{O}_Y)_y^\wedge = \mathcal{O}_y^\wedge$ — пополненное локальное кольцо точки y. Остается заметить, что пополненное локальное кольцо не раскладывается в произведение двух нетривиальных колец (если бы единица представлялась в виде суммы ортогональных идемпотентов, то каждый из них был бы делителем нуля, а значит лежал бы в максимальном идеале, и их сумма не могла бы равняться единице). □

Следствие 18.5 (теорема Зариского о связности). *Если $f : X \to Y$ — проективный бирациональный морфизм целых схем, и схема Y нормальна, то слои f связны.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно проверить, что $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$. Вопрос локален, так что можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$. Положим $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(Y, f_*\mathcal{O}_X)$. Надо проверить, что $B = A$. Но B является конечно-порожденным A-модулем (так как морфизм f проективен), причем поле частных B равно полю частных A (так как f бирационален) и, наконец, кольцо A целозамкнуто (так как Y нормально). Значит, действительно, $B = A$. □

Следствие 18.6 (факторизация Штейна). *Пусть $f : X \to Y$ — проективный морфизм. Существует разложение морфизма f в композицию $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, где g — конечный морфизм, а f' имеет связные слои.*

Доказательство. Рассмотрим пучок алгебр $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ на Y. Он является пучком конечно порожденных $\mathcal{O}_Y$-алгебр (так как f проективен). Рассмотрим его относительный спектр $Y' := \operatorname{Spec}_Y \mathcal{A}$ и пусть $g : Y' \to Y$ — естественная проекция. Легко видеть, что морфизм пропускается через Y', то есть $f = g \circ f'$, $f' : X \to Y'$, причем $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}'_Y$. Значит f' имеет связные слои. □

Гладкость морфизмов

Одна из основополагающих идей Гротендика в алгебраической геометрии состоит в том, что всякое абсолютное понятие или утверждение (для некоторой схемы) должно иметь аналог в относительной ситуации (то есть для морфизма схем). Например, понятие проективности схемы в относительной ситуации становится понятием проективности морфизма, относительный вариант когомологий пучка — высшие прямые образы, а относительный вариант теоремы о конечномерности когомологий на проективной схеме — теорема о когерентности высших прямых образов при проективном морфизме. Сегодня мы поговорим об относительном варианте понятия гладкости.

Напомним вначале определение гладкости в абсолютной ситуации. Здесь есть два подхода — через регулярность локальных колец и через плоскость пучка дифференциалов. В характеристике нуль они эквивалентны, а в положительной характеристике, вообще говоря, нет.

Определение 18.7. Схема называется *неособой*, если она целая, отделимая и все ее локальные кольца регулярны. Схема X над полем k называется *гладкой размерности* n, если все ее неприводимые компоненты имеют размерность n, и для всякой точки $x \in X$ выполняется равенство $\mathsf{dim}_{k(x)}(\Omega_{X/k} \otimes k(x)) = n$.

Заметим, что в силу доказанного на прошлой лекции для приведенной схемы условие гладкости равносильно тому, что пучок $\Omega_{X/k}$ локально свободный ранга $\mathsf{dim}\, X$. Заметим также, что если поле k алгебраически замкнуто или имеет нулевую характеристику, а схема цела, то неособость эквивалентна гладкости. При этом для незамкнутого поля положительной характеристики легко видеть, что гладкость и регулярность неэквивалентны.

Упражнение 18.3. (i) *Пусть* $\mathsf{char}(k) = 0$. *Покажите, что схема* $\operatorname{Spec} k[x]/x^2$ *— гладкая.*
(ii) *Пусть* F *— поле положительной характеристики* p, $k = F(t)$ *и* $K = k[x]/(x^p - t)$. *Покажите, что схема* $\operatorname{Spec} K$ *неособа, но не является гладкой над* k.

Определение 18.8. Морфизм схем $f : X \to Y$ называется *гладким относительной размерности* n, если выполнены следующие условия
(i) f — плоский;
(ii) если $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ — неприводимые компоненты, $f(X') \subset Y'$, то $\mathsf{dim}\, X' = \mathsf{dim}\, Y' + n$;
(iii) для всякой точки $x \in X$ выполняется равенство $\mathsf{dim}_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n$.

Если схема X приведена, то условие (iii) равносильно тому, что пучок $\Omega_{X/k}$ локально свободный ранга $\mathsf{dim}\, X$. Если же X — схема над полем k, $Y = \operatorname{Spec} k$ и f — структурный морфизм, то определение гладкости f совпадает с определением гладкости X над k.

Лемма 18.9. *Если* $f : X \to Y$ *— плоский морфизм, то условие* (ii) *из определения гладкости морфизма эквивалентно условию*
(ii') *всякая неприводимая компонента любого слоя* X *над* Y *имеет размерность* n.

Доказательство. Пусть Z — неприводимая компонента слоя X_y над точкой y. Пусть $x \in Z$ — замкнутая точка, не лежащая ни в какой другой компоненте. Тогда поле $k(x)$ — алгебраическое расширение поля $k(y)$, то есть $\mathsf{deg\,tr}\, k(x) = \mathsf{deg\,tr}\, k(y)$. Согласно теории размерности имеем $\mathsf{dim}\, X = \mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{X,x} - \mathsf{deg\,tr}\, k(x)$ и $\mathsf{dim}\, Y = \mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{Y,y} - \mathsf{deg\,tr}\, k(y)$. Отсюда следует, что $\mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{X,x} - \mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{Y,y} = \mathsf{dim}\, X - \mathsf{dim}\, Y = n$. Но так как морфизм f плоский, левая часть равна $\mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{Z,x}$ по лемме 16.2. Остается заметить, что так как x — замкнутая точка Z, то $\mathsf{dim}\, \mathcal{O}_{Z,x} = \mathsf{dim}\, Z$. □

Предложение 18.10. (*a*) *Открытое вложение — гладко относитльной размерности* 0.
(*b*) *Если $f : X \to Y$ — гладкий относительной размерности n и $Y' \to Y$ — замена базы, то морфизм $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ — гладкий относительной размерности n.*
(*c*) *Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — гладкие, то $g \circ f : X \to Z$ — гладкий.*
(*d*) *Если $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z$ — гладкие, то $f \times g : X \times_Z Y \to Z$ — гладкий.*

Доказательство. (*a*) Открытое вложение $X \to Y$ плоско; слои либо пусты, либо нульмерны; и $\Omega_{X/Y} = 0$ (надо проверить, что $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$ — действительно $d(1/s) = -ds/s^2 = 0$).

(*b*) Плоскость инвариантна относительно замены базы, поэтому f' плоский; слои у морфизма f' такие же как и у f; наконец, если $x' = (x, y') \in X \times_Y Y'$, и $y = f(x)$, то имеем $\Omega_{X'/Y'} \otimes k(x') = \Omega_{X/Y} \otimes k(y') \otimes k(x') = \Omega_{X/Y} \otimes k(y) \otimes k(x) = \Omega_{X/Y} \otimes k(x)$.

(*c*) Плоскость сохраняется при композиции, поэтому $g \circ f$ — плоский. Размерность всякой компоненты $X' \subset X$ на n больше размерности компоненты $Y' \subset Y$, содержащей $f(X')$, которая в свою очередь на m больше размерности компоненты $Z' \subset Z$, содержащей $g(Y')$. Значит $\dim X' = \dim Z' + n + m$. Пусть теперь $x \in X$. Найдем $\dim \Omega_{X/Z} \otimes k(x)$. Рассмотрим точную последовательность

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0.$$

Домножая ее на $k(x)$ получаем неравенство

$$\dim \Omega_{X/Z} \otimes k(x) \geq \dim f^*\Omega_{Y/Z} \otimes k(x) = \dim \Omega_{X/Y} \otimes k(x) = m + n.$$

С другой стороны, если $z = g(f(x))$, то $\dim \Omega_{X/Z} \otimes k(x) = \dim \Omega_{X_z/z} \otimes k(x)$, что в силу полунепрерывности не меньше, чем $\dim_K \Omega_{K/k(z)}$, где K — поле функций неприводимой компоненты X_z, содержащей x. Остается заметить, что согласно приведенному ниже упражнению это не меньше, чем $\operatorname{deg tr} K/k(z) = \dim X_z = n + m$. Сравнивая неравенства, видим, что $\dim \Omega_{X/Z} \otimes k(x) = m + n$, значит $g \circ f$ — гладкий.

(*d*) Разложим морфизм $f \times g : X \times_Z Y \to Z$ в композицию проекции $p : X \times_Z Y \to Y$ и морфизма $g : Y \to Z$. Ясно, что p получается заменой базы из f, поэтому гладкий по пункту (*b*). Применяя пункт (*c*), заключаем, что их композиция — тоже гладкая. □

Упражнение 18.4. *Пусть K/k — конечно порожденное расширение полей. Докажите, что $\dim_K \Omega_{K/k} \geq \operatorname{deg tr}(K/k)$, причем равенство достигается только если K сепарабельно порождено над k, то есть представляется как сепарабельное расширение чисто трансцендентного расширения поля k.*

Следствие 18.11. *Если морфизмы $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — гладкие, а схема X приведена, то последовательность*

$$0 \to f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0 \qquad (\dagger)$$

точна с обеих сторон. В частности $\omega_{X/Z} \cong \omega_{X/Y} \otimes f^*\omega_{Y/Z}$.

Доказательство. Действительно, пучок $f^*\Omega_{Y/Z}$ в этом случае локально свободен (в частности не имеет кручения), и из доказательства пункта (*c*) видно, что морфизм пучков $f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z}$ является вложением в общей точке любой компоненты схемы X. □

Упражнение 18.5. *Покажите, что плоский морфизм схем $f : X \to Y$ — гладкий тогда и только тогда, когда для всякой точки $y \in Y$ схема $X \otimes \overline{k(y)}$ регулярна и n-мерна.*

Отсюда можно вывести геометрически наглядный критерий гладкости морфизма.

Лемма 18.12. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм неособых многообразий над алгебраически замкнутым полем k. Тогда f гладкий тогда и только тогда, когда для всякой замкнутой точки $x \in X$ отображение $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ сюръективно.*

Доказательство. ($\Rightarrow$): домножая точную последовательность (†) на $k(x)$ и пользуясь тем, что $\Omega_{X/Y}$ локально свободный (и, следовательно, плоский), получаем точную последовательность

$$(\star) \qquad 0 \to \Omega_{Y/k} \otimes k(f(x)) \to \Omega_{X/k} \otimes k(x) \to \Omega_{X/Y} \otimes k(x) \to 0.$$

В частности, первое отображение инъективно. Остается заметить, что $d_x f$ двойственно к нему, и, значит, сюръективно.

($\Leftarrow$): прежде всего, надо проверить, что f — плоский морфизм. Для этого достаточно проверить, что локальное кольцо $\mathcal{O}_{x,X}$ всякой замкнутой точки $x \in X$ плоско над $\mathcal{O}_{f(x),Y}$. Так как кольцо $\mathcal{O}_{f(x),Y}$ регулярно, для него существует регулярная последовательность $t_1, t_2, \dots, t_r$, порождающая идеал $\mathfrak{m}_{f(x)}$. Так как t_i образуют базис в $\mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}^2_{f(x)}$, и так как отображение $f^* : \mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}^2_{f(x)} \to \mathfrak{m}_x \mathfrak{m}_x^2$ двойственно к отображению $d_x f$ и, следовательно, инъективно, то $f^*t_1, f^*t_2, \dots, f^*t_r$ — линейно независимы в $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, то есть образуют часть регулярной последовательности для кольца $\mathcal{O}_{x,X}$. Применяя приведенное ниже упражнение, сводим проверку к проверке плоскости кольца $\mathcal{O}_{x,X}/(f^*t_1, \dots, f^*t_r)$ над $\mathcal{O}_{f(x),Y}/(t_1, \dots, t_r)$. Но второе кольцо равно k, следовательно первое над ним автоматически плоско.

Остается заметить, что первое отображение в последовательности ($\star$) по условию инъективно, поэтому $\operatorname{dim} \Omega_{X/Y} \otimes k(x) = \operatorname{dim} \Omega_{X/k} \otimes k(x) - \operatorname{dim} \Omega_{Y/k} \otimes k(f(x)) = \operatorname{dim} X - \operatorname{dim} Y$. □

Упражнение 18.6. *Пусть A — локальное кольцо, M — A-модуль и $t \in A$ — не делитель нуля. Покажите, что M — плоский тогда и только тогда, когда t не является делителем нуля в M и M/tM — плоский A/tA-модуль (указание: $M \otimes_A k = (M \otimes_A A/tA) \otimes_{A/tA} k$).*

Покажем теперь, что гладкость является открытым свойством в нулевой характеристике.

Лемма 18.13. *Пусть $f : X \to Y$ — доминантный морфизм целых схем над полем k характеристики нуль, то существует непустое открытое подмножество $U \subset X$, такое что $f_{|U} : U \to Y$ — гладкий морфизм.*

Доказательство. Выкинем из X и Y особые точки и будем считать их гладкими. Заметим, что пучок $\Omega_{X/Y}$ в общей точке схемы X равен $\Omega_{K(X)/K(Y)}$ (поле $K(Y)$ является подполем в $K(X)$ так как морфизм f доминантен!). Но так как $\operatorname{char} k = 0$, то расширение $K(X)/K(Y)$ сепарабельно порождено, поэтому $\operatorname{dim}_{K(X)} \Omega_{K(X)/K(Y)} = \operatorname{deg} \operatorname{tr}(K(X)/K(Y)) = \operatorname{dim} X - \operatorname{dim} Y$. Но так как $\Omega_{X/Y}$ — когерентный пучок на схеме X, то существует непустое открытое подмножество $U \subset X$, на котором он локально свободен и имеет такой же ранг, как и в общей точке. Ясно, что на этом открытом подмножестве морфизм f гладкий. □

В положительной характеристике это, а также и все последующие утверждения не выполняются. Контрпримеры можно построить с помощью морфизма Фробениуса. А именно, пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики $p > 0$. Рассмотрим морфизм $F : X \to X$, тождественный на точках, а на функциях, заданный формулой $F^*(f) = f^p$. Так как $d(f^p) = pf^{p-1}df = 0$, получаем $\Omega_F = \Omega_X$, то есть Ω_F является локально свободным ранга $\operatorname{dim} X$, в то время как относительная размерность равна нулю.

Лемма 18.14. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм целых схем над полем k характеристики нуль. Пусть $X_r = \{x \in X \mid \operatorname{rk}(d_x f : T_x T \to T_{f(x)} Y) \le r$. Тогда $\operatorname{dim} f(X_r) \le r$.*

Доказательство. Пусть Y' — неприводимая компонента $f(X_r)$, а X' — реприводиамая компонента X_r, доминирующая над Y' с приведенной структурой. По предыдущей лемме найдется непустое открытое $U \subset X'$, такое что $f_{|U} : U \to Y'$ — гладкий. Тогда для всякой точки $x \in U$ морфизм $d_x(f_{|U})$ сюръективен. Значит $\mathsf{dim}\, T_{f(x)}Y' \leq \mathsf{rk}(d_x(f_{|U})) \leq \mathsf{rk}\, d_x f \leq r$, а значит и $\mathsf{dim}\, Y' \leq r$. □

Отсюда легко вывести следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Сарда.

Теорема 18.15. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий над полем характеристики нуль, причем X неособо. Тогда существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, такое что $f : f^{-1}(U) \to U$ — гладкое.*

Доказательство. Пусть $r = \mathsf{dim}\, Y - 1$ и положим $U = Y_{\mathrm{sm}} \setminus f(X_r)$. Тогда на $f^{-1}(U)$ отображение $d_x f$ имеет ранг равный $\mathsf{dim}\, Y$, поэтому морфизм f гладкий. □

Отсюда легко также вывести следующую теорему.

Теорема 18.16 (Теорема Бертини). *Пусть X — неособое многообразие над полем k характеристики нуль. Пусть δ — конечномерная линейная система на X. Тогда почти всякий элемент из δ не имеет особенностей вне множества $B(\delta)$ базисных точек линейной системы.*

Доказательство. Рассматривая $X \setminus B(\delta)$ можно считать, что δ не имеет базисных точек. Пусть $Y = |\delta|$ — проективное пространство, параметризующее элементы линейной системы. Рассмотрим в произведении $X \times Y$ дивизор D, слой которого над точкой Y совпадает с соответствующим дивизором линейной системы δ (если δ задается пространством $V \subset H^0(X, L)$, где L — линейное расслоение на X, так что $Y = \mathbb{P}(V)$, то D — дивизор, соответствующий каноническому сечению линейного расслоения $L \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ на $X \times \mathbb{P}(V)$) и проекцию $p : D \to X$ и $q : D \to Y$. Слой проекции p над точкой $x \in X$ — это все дивизоры из линейной системы δ, проходящие через x, и так как линейная система не имеет базисных точек, то стало быть данный слой является гиперплоскостью в проективном пространстве Y. Из упражнения 18.5 следует гладкость морфизма p, а значит многообразие D тоже гладко. Применяя теперь теорему 18.15 к проекции $q : D \to Y$ находим открытое подмножество $U \subset Y$, над которым проекция q гладкая. Тогда для всякой точки $y \in Y$ слой проекции q над точкой y гладок, так что остается заметить, что он совпадает с соответствующим дивизором линейной системы δ. □

Следующий случай применения теоремы Бертини является наиболее употребительным.

Следствие 18.17. *Пусть k — поле характеристики нуль и $X \subset \mathbb{P}^N_k$ — неособое подмногообразие. Тогда для почти всех гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}^N_k$ пересечение $X \cap H$ — гладко.*

Доказательство. Линейная система гиперплоских сечений многообразия X не имеет базисных точек. □

Упражнение 18.7. *Докажите, что утверждение* 18.17 *выполняется и над любым алгебраически замкнутым полем (в том числе и положительной характеристики) (указание: рассмотрите множество $Z \subset X \times (\mathbb{P}^N_k)^\vee$, состоящее из всех пар (x, H), таких что $X \cap H$ особо в точке x, и покажите, что Z — многообразие размерности не больше чем $N - 1$).*