Теория Ходжа 1: Дифференциальные операторы

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей, если не оговорено иначе.

1.1. Кольцо $C^\infty(M)$ и дифференциальная геометрия

Пусть задано бесконечно-гладкое многообразие M. $C^\infty(M)$ - это кольцо гладких вещественнозначных функций на M.

Определение 1.1. **Идеалом** в кольце R называется множество $I \subset R$, замкнутое относительно сложения, и такое, что для каждого $r \in R, a \in I$, произведение ra лежит в I. Факторгруппа R/I наделяется естественной структурой кольца. Идеал называется **максимальным**, если R/I это поле.

Определение 1.2. Пусть S - набор элементов R. Идеал вида $r_1a_1+r_2a_2+$ ..., где r_i произвольны, а $a_i \in S$, называется **идеалом, порожденным** S. Если задан идеал $I \subset R$, k**-й степенью** I называется идеал, порожденный произведениями вида $f_1f_2...f_k$, где f_i лежат в I.

Замечание. Если $x \in M$, то идеал всех функций, зануляющихся в x, очевидно, максимален. Этот идеал обозначается $\mathfrak{m}_x$.

Задача 1.1.

а. Пусть в кольце $C^\infty(M)$ задан идеал I. Обозначим за $S(I)$ множество всех общих нулей $f \in I$. Найдите нетривиальный идеал, для которого $S(I)$ пусто.

б. Докажите, что подобного не бывает, если M компактно.

Указание. Если $f_1, ...f_n$ - функции, не имеющие общих нулей, то функция $\sum f_i^2$ обратима.

Задача 1.2 (!). Выведите из этого, что максимальный идеал в кольце $C^\infty(M)$ имеет вид $\mathfrak{m}_x$.

Задача 1.3. Пусть $I \subset C^\infty(M)$ - максимальный идеал, а M не компактно. Докажите, что I не обязательно имеет вид $\mathfrak{m}_x$.

а. [*] Может ли фактор $C^\infty(M)/I$ быть изоморфен $\mathbb{C}$?

б. [**] Заметим, что I и $C^\infty(M)/I$ - векторные пространства над $\mathbb{R}$. Может ли фактор $C^\infty(M)/I$ быть одномерен над $\mathbb{R}$?

Определение 1.3. Модуль над кольцом R - это абелева группа A, наделенная отображением $R \times A \longrightarrow A$ (называется "умножение на элементы R"), и удовлетворяющая аксиомам

1 Ассоциативность умножения: $r_1(r_2a) = r_1r_2a$
2 Дистрибутивность: $(r_1 + r_2)a = r_1a + r_2a, \quad r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2.$

На модулях естественно определена операция **прямой суммы**: если A, B - модули над R, то $A \times B$ тоже наделено структурой модуля, обозначаемого $A \oplus B$. Само кольцо R является модулем над собой. Прямая сумма R с собой n раз называется **свободным модулем**, и обозначается за R^n.

Определение 1.4. Модуль A над кольцом R называется **конечно порожденным**, если существует набор элементов $a_1, ...a_n \in A$ (называемых "образующими") таких, что любой $a \in A$ представляется в виде $\sum r_i a_i$, для каких-то $r \in\in R$.

Задача 1.4.

а. Докажите, что идеал в кольце R является модулем над R.

б. [!] Приведите пример идеала в $C^\infty(M)$, который не конечно порожден.

Указание. Пусть $x \in M$ - точка. Рассмотрите идеал функций, зануляющихся в некоторой окрестности x.

Определение 1.5. Модуль A над кольцом R называется **проективным**, если он является прямым слагаемым свободного, т.е. если $A \oplus B$ свободен для какого-то модуля B.

Задача 1.5 (*). Пусть F - гладкое векторное расслоение над компактным многообразием M. Докажите, что существует расслоение F_1 такое, что $F \oplus F_1$ тривиально.

Задача 1.6 (*). Пусть F - гладкое векторное расслоение над компактным многообразием M. Рассмотрим множество гладких сечений F как $C^\infty(M)$-модуль (мы обозначаем его как F). Докажите, что этот модуль проективный. Докажите, что любой проективный модуль получается таким образом.

1.2. Векторные поля и дифференцирования

Определение 1.6. Пусть R - кольцо над полем k. k-линейное отображение D из кольца R в R-модуль (например, в R) называется **дифференцированием**, если оно удовлетворяет правилу Лейбница:

$$D(xy) = yD(x) + xD(y)$$

Очевидно, любое векторное поле задает дифференцирование на кольце $C^\infty(M)$.

Определение 1.7. Рассмотрим свободный R-модуль $\mathfrak{D}$, порожденный символами вида $d(a)$, $a \in R$ (иначе говоря, $\mathfrak{D}$ есть прямая сумма R с собой $|R|$ раз). Рассмотрим подмодуль $\mathfrak{D}_1 \subset R$, порожденныый векторами вида $d\kappa = 0$, $\kappa \in k$, и $d(ab) - bd(a) - ad(b)$. Фактор $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_1$ называется **пространством кэлеровых дифференциалов**, и обозначается $\Omega^1_k R$.

Задача 1.7. Докажите, что естественное отображение $a \longrightarrow d(a)$ задает дифференцирование $R \xrightarrow{d} \Omega^1_k R$.

Замечание. В алгебраической геометрии, кокасательное расслоение определяется как $\Omega^1_k R$. В этом случае оператор d превращается в дифференциал де Рама.

Задача 1.8 (!). Пусть задано дифференцирование $R \xrightarrow{D} A$ со значениями в R-модуле A. Докажите, что существует гомоморфизм R-модулей $\Omega^1_k R \xrightarrow{\varphi} A$ такой, что $D = d \circ \varphi$. Докажите, что этот гомоморфизм определен однозначно.

Замечание. Это свойство называется **универсальное свойство кэлеровых дифференциалов**. Благодаря универсальному свойству кэлеровых дифференциалов, можно классифицировать дифференцирования со значениями в A: пространство таких дифференцирований изоморфно $\operatorname{Hom}_R(\Omega^1_k R, A)$.

Задача 1.9 (!). Пусть $R = k[t_1, ..., t_n]$ - кольцо полиномов над полем характеристики ноль.

а. Докажите, что $\Omega^1_k R$ - свободный модуль, порожденный

$$dt_1, dt_2, ..., dt_n.$$

б. Выведите из этого, что пространство дифференцирований $\operatorname{Der}_k(R, R)$ - свободный n-мерный модуль, порожденный $\frac{d}{dt_i}$.

Задача 1.10. Пусть R - поле, содержащее поле k характеристики 0.

а. [*] Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R, R)$ равно нулю, если R конечномерно как векторное пространство над k.

б. [**] Докажите, что $\operatorname{Der}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ не равно нулю.

Задача 1.11. Пусть $\mathfrak{m}_x$ - идеал всех функций из $C^\infty M$, зануляющихся в $x \in M$. Докажите, что $\mathfrak{m}_x^2/\mathfrak{m}_x$ изоморфно кокасательному пространству $T_x^* M$.

Задача 1.12. Пусть $D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ - дифференцирование. Докажите, что D переводит $\mathfrak{m}_x^i$ в $\mathfrak{m}_x^{i-1}$.

Задача 1.13.

а. Из предыдущей задачи выведите, что D задает линейное отображение $T_x^* M \ \xrightarrow{D_x}\ \mathbb{R}$ для любой точки $x \in M$ (то есть вектор в $T_x M$).

б. [!] Предположим, что D задано векторным полем $v \in TM$. Докажите, что $D_x(\iota) = (v, \iota)$ для любого $\iota \in T_x^* M$.

Задача 1.14.

а. [!] Пусть задано дифференцирование

$$D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M.$$

Рассмотрим связанные с ним отображения

$$T_x^* M \ \xrightarrow{D_x}\ \mathbb{R}$$

как вектора $D_x \in T_x M$. Докажите, что D_x гладко зависит от $x \in M$ (и таким образом склеиваются в векторное поле $\check{D} \in TM$).

б. [!] Докажите, что $D(f) = \check{D}(f)$.

Замечание. Мы получили, что дифференцирования

$$C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$$

взаимно однозначно соответствуют векторным полям на M.

Задача 1.15.

а. Рассмотрим оператор де Рама $d: \ C^\infty M \longrightarrow T^* M$. Докажите, что это дифференцирование.

б. [!] По универсальному свойству кэлеровых дифференциалов, это дает морфизм $C^\infty M$-модулей $\Omega^1_{\mathbb{R}}(C^\infty M) \longrightarrow T^* M$. Докажите, что это изоморфизм.

Задача 1.16 (*). Пусть M компактно. Докажите, что дифференцирования $C^\infty M \xrightarrow{D} \mathbb{R}$ взаимно однозначно соответствуют векторам $v \in TxM$.

Задача 1.17 (*). Пусть $M = \mathbb{R}$ – это вещественная прямая, а I – максимальный идеал в $C^\infty M$, не имеющий вида $\mathfrak{m}_x$ для какой-то точки $x \in M$. Постройте дифференцирование $C^\infty M \xrightarrow{D} k$ со значением в поле $k = C^\infty/I$.

1.3. Дифференциальные операторы

Определение 1.8. Пусть R - кольцо над полем k. **Дифференциальный оператор порядка** 0 — это отображение $R \xrightarrow{v} R$, которое R-линейно, то есть переводит $r \in R$ в $v(1)r$. Множество таких операторов обозначается $\operatorname{Diff}^0(R)$. Дифференциальный оператор порядка $i > 0$ определяется индуктивно, в терминах дифференциальных операторов порядка $i-1$. А именно, считается, что k-линейное отображение $a \in \operatorname{Diff}^i(R)$, если для любого $v \in \operatorname{Diff}^0(R)$, коммутатор $[a, v]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$. Мы имеем цепочку вложений

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Объединение всех $\operatorname{Diff}^i(R)$ называется **множеством дифференциальных операторов**. Как мы увидим немного погодя, $\operatorname{Diff}^*(R)$ образует алгебру (некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей). Дифференциальные операторы на кольце $C^\infty M$ называются **дифференциальными операторами на** M, и обозначаются $\operatorname{Diff}^*(M)$.

Задача 1.18. Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ - дифференциальные операторы. Докажите, что их композиция D^iD^j лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j}(R)$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и тождеством

$$[v, D^iD^j] = [v, D^i]D^j + D^i[v, D^j]$$

Задача 1.19. Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ - дифференциальные операторы. Докажите, что их коммутатор $[D^i, D^j]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j-1}(R)$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и тождеством Якоби:

$$[v, [D^iD^j]] = [[v, D^i], D^j] + [D^i, [v, D^j]].$$

Определение 1.9. Пусть A - ассоциативная алгебра над полем, а

$$A_0 \subset A_1 \subset ...$$

набор вложенных подпространств, таких, что $A = \bigcup_i A_i$. Этот набор подпространств называется **фильтрацией**, если $A_iA_j \subset A_{i+j}$. Из задачи 1.17 ясно, что дифференциальные операторы образуют алгебру с фильтрацией.

Задача 1.20. Пусть $A = \bigcup_i A_i$ - алгебра с фильтрацией. Рассмотрим пространство $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$. Определим умножение на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ таким образом, чтобы произведение классов $a \mod A_{i-1}$ и $b \mod A_{j-1}$ давало $ab \mod A_{i+j-1}$. Докажите, что это определение корректно.

Определение 1.10. Алгебра $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ называется **присоединенной градуированной алгеброй** алгебры с фильтрацией.

Задача 1.21. Рассмотрим алгебру $\operatorname{Diff}^*(R)$ с фильтрацией

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Докажите, что ее присоединенная градуированная алгебра коммутативна.

Указание. Воспользуйтесь задачей 1.18.

Задача 1.22.

а. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^1(R)$ - дифференциальный оператор первого порядка. Докажите, что $D - D(1)$ - дифференцирование R.

б. [!] Выведите из этого, что $\operatorname{Diff}^1(R)/\operatorname{Diff}^0(R)$ изоморфно пространству дифференцирований R.

Замечание. Из этого следует, что для $R = C^\infty(M)$, $\operatorname{Diff}^1(R)/\operatorname{Diff}^0(R)$ изоморфно пространству векторных полей.

Задача 1.23.

а. Пусть $R = k[t]$ - алгебра полиномов над полем k характеристики 0, а $D \in \operatorname{Diff}^k(R)$ - дифференциальный оператор порядка k. Докажите, что D однозначно определяется своим ограничением на полиномы степени $\leqslant k$.

б. [*] Верно ли это в характеристике p?

в. [*] Докажите, что $\operatorname{Diff}^k(R)$ - свободный $k[t]$-модуль, с образующими $\tau_0, \tau_1, ...\tau_k$, причем τ_i переводит все $1, t, t^2, t^3, ...t^k$, кроме t^i, в ноль, а t^i в 1.

г. [*] Докажите, что алгебра $\operatorname{Diff}^*(R)$ порождена двумя образующими t и $\frac{d}{dt}$, с единственным соотношением $[t, \frac{d}{dt}] = 1$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией

Задача 1.24 (!). Пусть $I \subset R$ - идеал, а $D \in \operatorname{Diff}^k(R)$ - дифференциальный оператор порядка k. Докажите, что $D(I^{k+1}) \subset I$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией.

Определение 1.11. Пусть $f \in C^\infty M$ - гладкая функция на M. **Носитель** f (обозначается $\mathsf{Sup}\, f$) - это множество всех $x \in M$ таких, что ограничение $f\big|_U$ - ненулевая функция для любой окрестности $U \ni x$. Иначе говоря, $x \notin \mathsf{Sup}\, f$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ тождественно в некоторой окрестности x.

Задача 1.25. Докажите, что носитель любой функции замкнут.

Задача 1.26. Докажите, что $\mathsf{Sup}\, fg = \mathsf{Sup}\, f \cap \mathsf{Sup}\, g$. Докажите, что

$$\mathsf{Sup}\, f + g \subset \mathsf{Sup}\, f \cup \mathsf{Sup}\, g.$$

Определение 1.12. Пусть $f, g \in C^\infty M$ - две функции. Мы говорим, что f **делится на** g, если $f = gf'$ для другой функции $f' \in C^\infty M$.

Задача 1.27. Пусть $U \subset M$ открытое подмножество с гладкой границей, а $\bar{U}$ - ее замыкание.

а. [!] Докажите, что существует функция $h_U \in C^\infty M$, с носителем в $\bar{U}$, такая, что для любой $f \in C^\infty M$, с носителем $\mathsf{Sup}\, f \subset \bar{U}$, f делится на h_U.

б. Докажите, что носитель f содержится в $\bar{U}$ тогда и только тогда, когда f делится на h_U.

Задача 1.28.

а. В условиях предыдущей задачи, пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор. Докажите, что $D(h_U^{i+1} f)$ имеет носитель в $\bar{U}$.

б. [!] Докажите, что $\mathsf{Sup}\, D(f) \subset \bar{U}$, если $\mathsf{Sup}\, f \subset \bar{U}$.

Задача 1.29 (!). Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор, $f \in C^\infty M$ - любая функция. Докажите, что $\mathsf{Sup}\, D(f) \subset \mathsf{Sup}\, f$.

Замечание. Свойство

$$\mathsf{Sup}\, D(f) \subset \mathsf{Sup}\, f$$

называется **локальностью** дифференциального оператора D.

1.4. Кольцо символов дифференциальных операторов

Определение 1.13. Пусть R - кольцо, $\operatorname{Diff}^*(R)$ - алгебра дифференциальных операторов, $\oplus S^i \bigoplus_i \operatorname{Diff}^i(R)/\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$ - присоединенное градуированное кольцо. Это кольцо называется **кольцом символов дифференциальных операторов**. Его нулевая компонента S^0 отождествляется с R, таким образом, кольцо символов является R-алгеброй.

Определение 1.14. Тензорное произведение $A \otimes_R B$ модулей A и B над R — это факторгруппа абелевой группы, свободно порожденной парами вида $a \otimes b$ для всех $a \in A, b \in B$, по соотношениям вида $ra \otimes b - a \otimes rb$, где $r \in R$. Тензорное произведение R-модулей это снова R-модуль. **Симметрическая степень** $\mathsf{Sym}^i_R A$ это множество всех

$$x \in \underbrace{A \otimes A \otimes ...A}_{i \text{ раз}}$$

инвариантных относительно естественного действия симметрической группы. Прямая сумма $\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R A$ наделена естественной структурой коммутативного кольца.

Задача 1.30. Пусть заданы векторные расслоения над M, а F, G их пространства гладких сечений, рассмотренные как $C^\infty M$-модули. Докажите, что пространство сечений их тензорного произведения это $F \otimes_{C^\infty M} G$. Докажите, что пространство сечений симметрической степени F это $\mathsf{Sym}^i_{C^\infty M} F$

Задача 1.31 (!). Пусть $\bigoplus_i L^i$ - коммутативная, градуированная R-алгебра, где $L^0 = R$. Докажите, что тождественное отображение $L^1 \longrightarrow L^1$ продолжается до гомоморфизма алгебр

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(L^1) \longrightarrow \bigoplus_i L^i.$$

Замечание. Это свойство часто выражают словами *"алгебра $\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(L^1)$ является свободной коммутативной алгеброй, натянутой на L^1"*.

Задача 1.32. Обозначим за $\operatorname{Der}(R)$ пространство дифференцирований R, наделенное естественной структурой R-модуля. Постройте гомоморфизм колец

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(\operatorname{Der}(R)) \longrightarrow \bigoplus_i S^i,$$

тождественный на $\operatorname{Der}(R)$.

Задача 1.33 (*). Докажите, что гомоморфизм

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(\operatorname{Der}(R)) \longrightarrow \bigoplus_i S^i,$$

изоморфизм для $R = k[t]$

Указание. Воспользуйтесь задачей 1.23

1.5. Кольцо символов дифференциальных операторов на многообразии

Задача 1.34.

а. Пусть $R = C^\infty M$. Докажите, что $\mathsf{Sym}^i_R(\operatorname{Der}(R))$ изоморфно пространству однородных полиномов степени i на T^*M.

б. Выведите из этого, что алгебра $\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i_R(\operatorname{Der}(R))$ это алгебра гладких функций на тотальном пространстве расслоения T^*M, полиномиальных на слоях этого расслоения.

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом $\operatorname{Der} R \cong TM$.

Задача 1.35 (!). Пусть $x \in M$ - любая точка. Докажите, что пространство $\mathfrak{m}_x^i/\mathfrak{m}_x^{i+1}$ изоморфно симметрической степени $\mathsf{Sym}^i T^*_x M$.

Задача 1.36. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор порядка $\leqslant i$.

а. Докажите, что D переводит $\mathfrak{m}_x^{i+1}$ в $\mathfrak{m}_x$, и таким образом задает отображение $\mathsf{Sym}^i T^*_x M \longrightarrow \mathbb{R}$, то есть элемент в $\mathsf{Sym}^i T_x M$.

б. Докажите, что это отображение зануляется на

$$\operatorname{Diff}^{i-1}(M) \subset \operatorname{Diff}^i(M).$$

в. [!] Докажите, что таким образом, для каждой точки $x \in M$, возникает гомоморфизм алгебр $\bigoplus S^i \xrightarrow{\Psi_x} \bigoplus \mathsf{Sym}^i T_x M$.

г. [!] Докажите, что $\Psi_x S^i$ гладко зависит от x

Замечание. Эта конструкция задает гомоморфизм алгебр

$$\bigoplus_i S^i \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM \tag{1.1}$$

Задача 1.37 (!). Пусть $v = \Phi(u) \in \bigoplus S^i$ лежит в образе гомоморфизма

$$\bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_i S^i, \qquad (1.2)$$

построенного в задаче 1.32. Докажите, что $\Psi(v) = u$.

Замечание. Мы получили, что $\Psi \circ \Phi = \mathsf{Id}$.

Задача 1.38.

а. Пусть $D \in \mathrm{Diff}^i(M)$ - такой дифференциальный оператор, что

$$D(\mathfrak{m}_x^i) \subset \mathfrak{m}_x$$

для любой точки x. Докажите, для любого $f \in \mathrm{Diff}^0(M)$, коммутатор $[D, f]$ переводит $D(\mathfrak{m}_x^{i-1})$ в $\mathfrak{m}_x$.

б. Воспользовавшись индукцией, выведите из этого, что D лежит в

$$\mathrm{Diff}^{i-1}(M).$$

Задача 1.39 (!). Докажите, что отображение $\bigoplus_i S^i \xrightarrow{\Psi} \bigoplus_i \mathsf{Sym}^i TM$ не имеет ядра.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 1.40 (!). Докажите, что отображение (1.2) - изоморфизм.

Задача 1.41 (**). Может ли случиться, что алгебра $\mathrm{Diff}^*(R)$ не порождена $\mathrm{Diff}^1(R)$?

Задача 1.42 (*). Пусть $R = k[t_1, ..t_n]$ - кольцо полиномов. Докажите, что алгебра $\mathrm{Diff}^*(R)$ порождена образующими $t_1, t_2, ...t_n, \frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, ... \frac{d}{dt_n}$, с соотношениями

$$[t_i, t_j] = 0, \quad [\frac{d}{dt_i}, \frac{d}{dt_j}] = 0, \qquad (i,\ j \text{ - любые})$$
$$[t_i, \frac{d}{dt_i}] = 1, \quad [\frac{d}{dt_i}, \frac{d}{dt_j}] = 0 \qquad (i \neq j)$$