Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей, если не оговорено иначе.

2.1. Дифференциальные операторы с коэффициентами в модуле

Определение 2.1. Пусть A, B - модули над кольцом R, которое определено над полем k. Пространство $\operatorname{Diff}^i(A, B)$ дифференциальных операторов порядка i определяется индуктивно.

Дифференциальные операторы нулевого порядка $\operatorname{Diff}^0(A, B)$ - это R-линейные отображения из A в B. k-линейное отображение $D: A \longrightarrow B$ лежит в $\operatorname{Diff}^i(A, B)$, если для любого $r \in R$, коммутатор

$$[D, r](a) = D(ra) - rD(a)$$

лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(A, B)$.

Задача 2.1. Пусть A, B, C – R-модули, а $D_1: A \longrightarrow B$, $D_2: B \longrightarrow C$ - дифференциальные операторы порядка i, j. Докажите, что композиция $D_1 D_2$ - дифференциальный оператор порядка $i + j$.

Задача 2.2. Пусть R – кольцо полиномов $k[t]$, а B - R-модуль, одномерный как векторное пространство над k, с умножением, определенным посредством $tR = 0$. Докажите, что $\operatorname{Diff}^i(R, B)$ - это пространство всех k-линейных отображений из $k[t]$ в k, которые переводят t^{i+j} в 0, для всех $j > 0$.

Задача 2.3 (*). Пусть R это кольцо полиномов $k[t]$, а A и B - R-модули, конечномерные над k. Докажите, что $\operatorname{Diff}^*(A, B)$ - это пространство всех k-линейных отображений из A в B.

Задача 2.4. Рассмотрим пространство всех дифференциальных операторов $\operatorname{Diff}^*(A, B)$ как пространство с фильтрацией, и пусть $S^i(A, B) := \operatorname{Diff}^i(A, B)/\operatorname{Diff}^{i-1}(A, B)$ - присоединенные градуированнные компоненты. Определите на пространстве $\oplus_i S^i(A, B)$ естественную структуру модуля над алгеброй $\oplus_i S^i$ символов дифференциальных операторов.

Определение 2.2. Пространство $\oplus_i S^i(A, B)$ называется **пространством символов дифференциальных операторов, действующих из A в B.**

Задача 2.5 (!). Пусть M - гладкое многообразие, на котором заданы два конечномерных векторных расслоения, а F и G - пространство их сечений. Докажите, что дифференциальные операторы из F в G **локальны**: если $f \in F$ сечение с носителем в $K \subset M$, то носитель $D(f)$ тоже содержится в K, для любого $D \in \operatorname{Diff}^i(F, G)$.

Задача 2.6 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\oplus_i S^i(F,G) \cong \mathsf{Sym}^i TM \otimes \mathrm{Hom}_{C^\infty M}(F,G), \tag{2.1}$$

где $\mathrm{Hom}_{C^\infty M}(F,G)$ - пространство сечений расслоения гомоморфизмов из F в G (также конечномерного).

Указание. Докажите этот факт для случая, когда расслоения F и G тривиальны, а их пространства сечений изоморфны свободным модулям вида $C^\infty M^n$. Если вы можете доказать, что F и G - прямые слагаемые свободных модулей, выведите изоморфизм (2.1) из того, что он выполняется для тривиальных расслоений. Если вы не хотите пользоваться этим фактом, выведите (2.1) из локальности дифференциальных операторов.

Задача 2.7 (*). Пусть $x \in M$ точка, а $\mathfrak{m}_x$ - ее максимальный идеал. Выполнен ли изоморфизм (2.1) в случае $F = C^\infty M$, $G = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$? А в случае $G = C^\infty M$, $F = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$?

2.2. Эллиптические операторы

Определение 2.3. Пусть F, G - векторные расслоения над гладким многообразием M, а $D \in \mathrm{Diff}^i(F,G)$ - дифференциальный оператор порядка i (допуская вольность речи, мы обозначаем пространства сечений той же самой буквой, что и расслоения). Обозначим за $\mathrm{Symb}(D)$ класс D в

$$S^i(F,G) := \mathrm{Diff}^i(F,G)/\,\mathrm{Diff}^{i-1}(F,G)$$

Воспользовавшись изоморфизмом (2.1), мы можем считать $\mathrm{Symb}(D)$ сечением расслоения $\mathsf{Sym}^i TM \otimes \mathrm{Hom}(F,G)$ (символом $\mathsf{Sym}^i TM$ мы обозначаем i-ю симметрическую степень TM).

Задача 2.8 (!). Пусть $D_1 : \ F \longrightarrow G$, $D_2 : \ G \longrightarrow H$ - дифференциальные операторы. Вычислите символ композиции $D_1 D_2$. Докажите, что $D_1 D_2$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда эллиптичны оба оператора D_1 и D_2.

Определение 2.4. Пусть F, G - n-мерные векторные расслоения над гладким многообразием M, $D \in \mathrm{Diff}^i(F,G)$ дифференциальный оператор порядка i, а $\mathrm{Symb}(D) \in \mathsf{Sym}^i TM \otimes \mathrm{Hom}(F,G)$ - его символ. Рассмотрим $\mathrm{Symb}(D)$ как $\mathrm{Hom}(F,G)$-значную функцию на кокасательном пространстве T^*M, полиномиальную на слоях проекции $T^*M \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$, то есть как сечение $s_D \in \pi^* \mathrm{Hom}(F,G)$. Пусть $Z \subset T^*M$ - множество всех $x \in T^*M$ таких, что ограничение

$$s_D\Big|_x \in \mathrm{Hom}(F,G) \in \mathrm{Hom}(F\Big|_{\pi(x)}, G\Big|_{\pi(x)})$$

невырожденно. Оператор D называется **эллиптическим**, если проекция $\pi : \ Z \longrightarrow M$ имеет компактные слои.

Задача 2.9. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, а $\Delta: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ - **классический оператор Лапласа**, заданный формулой

$$\Delta(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i^2}$$

где x_i – стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$. Найдите символ Δ. Докажите, что он эллиптичен.

Задача 2.10 (!). Пусть P - однородный полином степени i от переменных $\frac{d}{dx_i}$, $i = 1, ...n$. Рассмотрим P как дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что символ этого дифференциального оператора равен P.

Задача 2.11. Рассмотрим дифференциал де Рама $d: \ C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1 M$. Найдите его символ.

Замечание. Мы обозначаем дифференциальные i-формы значком $\Lambda^i(M)$.

Определение 2.5. Пусть B - гладкое расслоение над M, а

$$\nabla: \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$$

– оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\nabla(fb) = b \otimes df + f\nabla b,$$

для любой функции $f \in C^\infty M$. Тогда ∇ называется **связностью** на расслоении B.

Задача 2.12 (!). Найдите символ связности. Докажите, что он не зависит от выбора ∇. Выразите символ связности через символ дифференциала де Рама.

Определение 2.6. Связность на TM называется **связностью на многообразии** M. Если задана связность ∇ на TM, пользуясь формулой Лейбница, можно задать связность на всех тензорных расслоениях на TM, в частности $\Lambda^i M$ и $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \otimes ...$ Эта связность обозначается той же буквой ∇.

Задача 2.13. Пусть на расслоении B задана связность ∇_0, а на многообразии M задана связность ∇. Определим связность

$$\nabla_i \ B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}} \longrightarrow B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i+1 \text{ раз}} \qquad (2.2)$$

по формуле Лейбница:

$\nabla_i(b\otimes\xi_1\otimes ...\otimes\xi_i) = \nabla_{i-1}(b\otimes\xi_1\otimes ...\otimes\xi_{i-1})\otimes\xi_i + b\otimes\xi_1\otimes ...\otimes\xi_{i-1}\otimes\nabla\xi_i.$

Обозначим за

$$\nabla^i:\ B\longrightarrow B\otimes\underbrace{\Lambda^1 M\otimes ...}_{i\ \text{раз}}$$

композицию $\nabla_0\circ\nabla_1\circ ...\circ\nabla_i$. Этот оператор называется **i-я степень связности**.

а. Докажите, что ∇^i - дифференциальный оператор порядка i.

б. Докажите, что символ ∇^2, рассмотренный, как элемент

$$\mathsf{Sym}^2 TM\otimes \operatorname{Hom}(B, B\otimes\Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M)$$

симметричен по перестановкам тензорных сомножителей $\Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M$.

в. [*] Пусть S - символ ∇^i,

$$S\in\mathsf{Sym}^2 TM\otimes\operatorname{Hom}\left(B, B\otimes\underbrace{\Lambda^1 M\otimes ...}_{i\ \text{раз}}\right)$$

Докажите, что S симметричен по перестановкам сомножителей $\Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M\otimes ...$

Задача 2.14 (!). Пусть

$$\underbrace{\Lambda^1 M\otimes ...}_{i\ \text{раз}}\ \xrightarrow{\Psi}\ C^\infty M$$

- $C^\infty M$-линейное отображение, а P - его симметризация, рассмотренная как элемент в $\mathsf{Sym}^i TM$. Рассмотрим расслоение B со связностью, и пусть

$$\nabla^i:\ B\longrightarrow B\otimes\underbrace{\Lambda^1 M\otimes ...}_{i\ \text{раз}}$$

ее i-я степень. Рассмотрим композицию

$$\nabla^i\circ(\mathsf{Id}_B\otimes\Psi):\ B\longrightarrow B$$

Докажите, что символ $\nabla^i\circ(\mathsf{Id}_B\otimes\Psi)$ равен $P\otimes\mathsf{Id}_B$.

Задача 2.15. Пусть M - риманово многообразие, а

$$\Psi:\ \Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M\longrightarrow C^\infty M$$

– метрический тензор. Рассмотрим дифференциальный оператор $\nabla^i\circ(-\mathsf{Id}_B\otimes\Psi):\ B\longrightarrow B$, построенный как выше. Докажите, что он эллиптичен.

Определение 2.7. Этот оператор называется **грубый оператор Лапласа** на B.

2.3. Грубый оператор Лапласа

Отныне и до конца этого листка, M - ориентированное n-мерное риманово многообразие, снабженное связностью Леви-Чивита. Метрический тензор на M индуцирует метрику на расслоении $\Lambda^n M$ форм объема. Положительное сечение $\Lambda^n M$ длины 1 называется **форма риманова объема** M, оно однозначно определяется метрикой и ориентацией. Мы обозначаем риманов объем за $\operatorname{Vol} M$.

Задача 2.16. Пусть v - векторное поле на M, а ψ - функция, полученная из $\nabla v \in TM \otimes \Lambda^1 M$ спариванием. Обозначим за $\operatorname{Vol} M \lrcorner v$ $(n-1)$-форму, полученную подстановкой v в $\operatorname{Vol} M$. Докажите, что $\psi \operatorname{Vol} = d(\operatorname{Vol} M \lrcorner v)$.

Указание. Поскольку ∇ - связность Леви-Чивита, она не имеет кручения, и мы имеем

$$d = \nabla \circ e,$$

где $e: \ \Lambda^k(M) \otimes \Lambda^1 M$ обозначает внешнее умножение (проверьте это). Из этой формулы получаем

$$d\,(\operatorname{Vol} M \lrcorner v) = e(\nabla(\operatorname{Vol} M \lrcorner v)) = e(\operatorname{Vol} \lrcorner \nabla v),$$

что как раз равно $\psi \operatorname{Vol}$ (проверьте).

Задача 2.17 (!). Пусть $\theta \in \Lambda^1 M$ - 1-форма с компактным носителем, а $\Psi_g: \ \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow C^\infty M$ - отображение, определенное метрическим тензором M. Докажите, что

$$\int_M \Psi_g(\nabla\theta) \operatorname{Vol} M = 0$$

Указание. Рассмотрим векторное поле $\theta^\sharp$, двойственное θ. Применив результат предыдущей задачи, докажите, что

$$\Psi_g(\nabla\theta) \operatorname{Vol} M = d(\operatorname{Vol} M \lrcorner \theta^\sharp)$$

и воспользуйтесь формулой Стокса.

Задача 2.18 (!). Пусть B - расслоение с метрикой и связностью, сохраняющей метрику. Рассмотрим оператор

$$\nabla^*: \ B \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow B,$$

полученный как композиция связности (2.2)

$$\nabla_1: \ B \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

со спариванием $b \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \longrightarrow -g(\xi_1, \xi_2) b$. Обозначим за $(\cdot,\cdot)_1$ метрику на $B \otimes \Lambda^1 M$, естественно индуцированную с B и M. Пусть a - сечение $B \otimes \Lambda^1 M$. Докажите, что

$$\int_M (\nabla^* a, b) \operatorname{Vol} M = \int_M (a, \nabla b)_1 \operatorname{Vol} M$$

для любого сечения $b \in B$ с компактным носителем.

Указание. Обозначим за $(\cdot,\cdot)_\circ$ спаривание, переводящее элементы

$$\Lambda^i M\otimes B, \quad \Lambda^j M\otimes B$$

в $\Lambda^i M\otimes\Lambda^j M$, и индуцированное метрикой на B. Поскольку связность сохраняет метрику, мы имеем

$$\nabla(a,b)_\circ = (a,\nabla b)_\circ + (\nabla a, b)_\circ \in \Lambda^1 M\otimes\Lambda^1 M$$

Применив Ψ_g к обеим частям этого уравнения, получите

$$\Psi_g(\nabla(a,b)_\circ) = -(\nabla^* a, b) + (\nabla a, b).$$

Поскольку $(a,b)_\circ$ - это 1-форма, $\int_M \Psi_g(\nabla(a,b)_\circ)\operatorname{Vol} M = 0$ в силу предыдущей задачи.

Замечание. Мы доказали, что ∇^* сопряжен с ∇ в смысле L^2-метрики на B-значных формах, заданной по формуле

$$(x,y) = \int_M (x,y)\operatorname{Vol} M$$

Замечание. Ясно, что оператор $\nabla^*\nabla: \ B\longrightarrow B$ равен грубому лапласиану на B, определенному выше. По построению, этот оператор эллиптичен, а его символ равен $-g\otimes \mathsf{Id}_B$, где $g\in\mathsf{Sym}^2 TM$ - метрический тензор.

2.4. Оператор Ходжа $*$

С помощью римановой метрики на M строится естественная метрика на всех тензорных расслоениях над M, в частности, на расслоении дифференциальных форм $\Lambda^k M$. Выберем ортонормированный базис $\xi_1, ...\xi_n$ в $\Lambda^1 M$. Мы нормируем метрику на $\Lambda^k M$ таким образом, что базис

$$\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge ...\wedge\xi_{i_k}, \quad i_1<i_2<...<i_k$$

– ортонормированный.

Задача 2.19. Пусть $\eta\in\Lambda^k M$ - дифференциальная форма, а $*\eta\in\Lambda^{n-k}M$ удовлетворяет

$$(\eta,\xi)\operatorname{Vol} M = *\eta\wedge\xi.$$

для любого $\xi\in\Lambda^k M$.

а. Докажите, что $*\eta$ определяется этим соотношением однозначно.

б. Докажите, что $*\eta$ существует для каждого η

в. Докажите, что в базисе $\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}$, определенном выше, $*$ записывается так:

$$*\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k} = \sigma \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}}$$

где $j_1, j_2, ... j_{n-k}$ - все индексы от 1 до n, не входящие в множество $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$, и упорядоченные по возрастанию, а $\sigma = \pm 1$ - сигнатура подстановки $(j_1, j_2, ... j_{n-k}, i_1, i_2, ..., i_k)$.

Задача 2.20. Пусть ξ — k-форма, η - $(n-k)$-форма. Докажите, что

а. $(*\eta, \xi) = (-1)^{k(n-k)}(\eta, *\xi)$

б. $*(*\eta) = (-1)^{k(n-k)}\eta$.

Задача 2.21 (*). Найдите собственные значения η на $\Lambda^{\frac{n}{2}} M$, для четномерного M.

Задача 2.22 (*). Пусть M — псевдориманово многообразие с метрикой сигнатуры s. Определите $*$ формулой, приведенной выше. Докажите, что $*(*\eta) = (-1)^{k(n-k)+s}\eta$.

Задача 2.23 (!). Определим $d^* : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(M)$ формулой $d^* = - * d *$. Докажите, что для любой формы ξ с компактным носителем, имеем

$$\int_M (d^*\eta, \xi) \operatorname{Vol} M = \int_M (\eta, d\xi) \operatorname{Vol} M$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Стокса:

$$\begin{aligned}\int_M (d^*\eta, \xi) \operatorname{Vol} M &= \int_M (d^*\eta, \xi) \operatorname{Vol} M = -\int_M d * \eta \wedge \xi \\ &= \int_M *\eta \wedge d\xi = \int_M (\eta, d\xi) \operatorname{Vol} M\end{aligned}$$

Замечание. Мы получили, что d^* сопряжен с d в смысле L^2-метрики на дифференциальных формах, заданной по формуле

$$(x, y) = \int_M (x, y) \operatorname{Vol} M$$

2.5. Оператор Лапласа на дифференциальных формах

Определение 2.8. Определим оператор Лапласа на дифференциальных формах формулой

$$\Delta \eta := dd^*\eta + d^*d\eta.$$

Замечание. На функциях этот оператор совпадает с грубым лапласианом, определенным выше.

Задача 2.24. Пусть

$$\Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \xrightarrow{\ i\ } \Lambda^{k-1} M$$

оператор "внутреннего умножения", переводящий тензор $\eta \otimes \theta$ в $\eta \lrcorner \theta^\sharp$, где $\theta^\sharp$ - векторное поле, двойственное θ. Докажите, что

$$\iota(\eta \otimes \theta) = - * (*\eta \wedge \theta)$$

Задача 2.25. Рассмотрим оператор внешнего умножения

$$\Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \xrightarrow{\ e\ } \Lambda^{k+1} M.$$

а. Докажите, что $d\eta = e(\nabla\eta)$.

б. Докажите, что $d^*\eta = \iota(\nabla\eta)$.

Замечание. Свойство $d\eta = e(\nabla\eta)$ равносильно отсутствию кручения у связности ∇.

Задача 2.26 (!). Рассмотрим квадрат связности на $\Lambda^k M$,

$$\nabla^2 : \ \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M,$$

определенный выше. Докажите, что $\Delta(\eta) = V(\nabla^2\eta)$, где

$$V : \ \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^k M$$

– тензор, определенный следующим образом:

$$V(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = \iota(e(\xi \otimes \theta_1) \otimes \theta_2) + \iota(e(\xi \otimes \theta_2) \otimes \theta_1)$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.27. Докажите, что $V(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = -V(\xi \otimes \theta_2 \otimes \theta_1)$ если θ_1 ортогонально θ_2.

Задача 2.28 (!). Рассмотрим тензор

$$V_0 : \ \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^k M$$

определенный формулой

$$V_0(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = \xi \otimes g(\theta_1, \theta_2)$$

где g - это риманова форма.

а. Докажите, что $V - V_0$ кососимметричен по последним двум аргументам

б. Докажите, что $V_0(\nabla^2\eta) = \nabla^*\nabla\eta$.

Задача 2.29.

а. Пусть
$$W: \ \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow B$$
кососимметричное по последним двум аргументом линейное отображение со значениями в B. Докажите, что
$$\nabla^2 \circ W: \ \Lambda^k M \longrightarrow B$$
равно $B(R)$, где R - тензор кривизны $\Lambda^k M$.

б. [!] Выведите из этого такую формулу:
$$\Delta - \nabla^*\nabla = W(R),$$
где $W = V - V_0$, а R – кривизна расслоения $\Lambda^k M$, рассматриваемая тут как сечение
$$\Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^k M \otimes \Lambda^2 M \subset \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Замечание. Эта формула называется **формулой Вайценбека** (Weitzenböck). Вообще говоря, "формула Вайценбека" это общее название для тождеств вида $\Delta_1 - \Delta_2 = R$, где Δ_i - какие-либо естественные операторы Лапласа на тензорных или спинорных полях, а R - полином от кривизны касательного расслоения.

Замечание. Из формулы Вайценбека немедленно следует, что лапласиан эллиптичен. Убедитесь в этом.

Задача 2.30. Рассмотрим оператор $d+d^*: \ \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^* M$. Докажите, что $d + d^*$ эллиптический.

Указание. Докажите, что $(d + d^*)^2 = \Delta$ и воспользуйтесь задачей 2.8.

Задача 2.31 (*). Рассмотрим формулу Вайценбека на 1-формах:
$$\Delta - \nabla^*\nabla = W(R).$$
В этом случае, $R \in \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M)$, а W отображает R в эндоморфизм $\Lambda^1 M$. Докажите, что $W(R)$ переводит θ в след в $\operatorname{Tr}_{1,3} R(\theta)$, где след кривизны берется по первому и третьему аргументу. Это отображение называется "тензор Риччи", Ric. Таким образом, для 1-форм формула Вайценбека превращается в **тождество Бохнера**:
$$\Delta - \nabla^*\nabla = \operatorname{Ric}.$$