

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

Все кольца предполагаются коммутативными и с единицей, если не оговорено иначе.

2.1. Дифференциальные операторы с коэффициентами в модуле

Определение 2.1. Пусть A, B - модули над кольцом R , которое определено над полем k . Пространство $\text{Diff}^i(A, B)$ дифференциальных операторов порядка i определяется индуктивно.

Дифференциальные операторы нулевого порядка $\text{Diff}^0(A, B)$ - это R -линейные отображения из A в B . k -линейное отображение $D : A \rightarrow B$ лежит в $\text{Diff}^i(A, B)$, если для любого $r \in R$, коммутатор

$$[D, r](a) = D(ra) - rD(a)$$

лежит в $\text{Diff}^{i-1}(A, B)$.

Задача 2.1. Пусть A, B, C - R -модули, а $D_1 : A \rightarrow B$, $D_2 : B \rightarrow C$ - дифференциальные операторы порядка i, j . Докажите, что композиция $D_1 D_2$ - дифференциальный оператор порядка $i + j$.

Задача 2.2. Пусть R - кольцо полиномов $k[t]$, а B - R -модуль, одномерный как векторное пространство над k , с умножением, определенным посредством $tR = 0$. Докажите, что $\text{Diff}^i(R, B)$ - это пространство всех k -линейных отображений из $k[t]$ в k , которые переводят t^{i+j} в 0, для всех $j > 0$.

Задача 2.3 (*). Пусть R это кольцо полиномов $k[t]$, а A и B - R -модули, конечномерные над k . Докажите, что $\text{Diff}^*(A, B)$ - это пространство всех k -линейных отображений из A в B .

Задача 2.4. Рассмотрим пространство всех дифференциальных операторов $\text{Diff}^*(A, B)$ как пространство с фильтрацией, и пусть $S^i(A, B) := \text{Diff}^i(A, B) / \text{Diff}^{i-1}(A, B)$ - присоединенные градуированные компоненты. Определите на пространстве $\bigoplus_i S^i(A, B)$ естественную структуру модуля над алгеброй $\bigoplus_i S^i$ символов дифференциальных операторов.

Определение 2.2. Пространство $\bigoplus_i S^i(A, B)$ называется **пространством символов дифференциальных операторов, действующих из A в B** .

Задача 2.5 (!). Пусть M - гладкое многообразие, на котором заданы два конечномерных векторных расслоения, а F и G - пространство их сечений. Докажите, что дифференциальные операторы из F в G **локальны**: если $f \in F$ сечение с носителем в $K \subset M$, то носитель $D(f)$ тоже содержится в K , для любого $D \in \text{Diff}^i(F, G)$.

Задача 2.6 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\oplus_i S^i(F, G) \cong \text{Sym}^i TM \otimes \text{Hom}_{C^\infty M}(F, G), \quad (2.1)$$

где $\text{Hom}_{C^\infty M}(F, G)$ - пространство сечений расслоения гомоморфизмов из F в G (также конечномерного).

Указание. Докажите этот факт для случая, когда расслоения F и G тривиальны, а их пространства сечений изоморфны свободным модулям вида $C^\infty M^n$. Если вы можете доказать, что F и G - прямые слагаемые свободных модулей, выведите изоморфизм (2.1) из того, что он выполняется для тривиальных расслоений. Если вы не хотите пользоваться этим фактом, выведите (2.1) из локальности дифференциальных операторов.

Задача 2.7 (*). Пусть $x \in M$ точка, а \mathfrak{m}_x - ее максимальный идеал. Выполнен ли изоморфизм (2.1) в случае $F = C^\infty M$, $G = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$? А в случае $G = C^\infty M$, $F = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$?

2.2. Эллиптические операторы

Определение 2.3. Пусть F, G - векторные расслоения над гладким многообразием M , а $D \in \text{Diff}^i(F, G)$ - дифференциальный оператор порядка i (допуская вольность речи, мы обозначаем пространства сечений той же самой буквой, что и расслоения). Обозначим за $\text{Symb}(D)$ класс D в

$$S^i(F, G) := \text{Diff}^i(F, G) / \text{Diff}^{i-1}(F, G)$$

Воспользовавшись изоморфизмом (2.1), мы можем считать $\text{Symb}(D)$ сечением расслоения $\text{Sym}^i TM \otimes \text{Hom}(F, G)$ (символом $\text{Sym}^i TM$ мы обозначаем i -ю симметрическую степень TM).

Задача 2.8 (!). Пусть $D_1 : F \rightarrow G$, $D_2 : G \rightarrow H$ - дифференциальные операторы. Вычислите символ композиции $D_1 D_2$. Докажите, что $D_1 D_2$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда эллиптичны оба оператора D_1 и D_2 .

Определение 2.4. Пусть F, G - n -мерные векторные расслоения над гладким многообразием M , $D \in \text{Diff}^i(F, G)$ дифференциальный оператор порядка i , а $\text{Symb}(D) \in \text{Sym}^i TM \otimes \text{Hom}(F, G)$ - его символ. Рассмотрим $\text{Symb}(D)$ как $\text{Hom}(F, G)$ -значную функцию на кокасательном пространстве T^*M , полиномиальную на слоях проекции $T^*M \xrightarrow{\pi} M$, то есть как сечение $s_D \in \pi^* \text{Hom}(F, G)$. Пусть $Z \subset T^*M$ - множество всех $x \in T^*M$ таких, что ограничение

$$s_D|_x \in \text{Hom}(F, G) \in \text{Hom}(F|_{\pi(x)}, G|_{\pi(x)})$$

невырожденно. Оператор D называется **эллиптическим**, если проекция $\pi : Z \rightarrow M$ имеет компактные слои.

Задача 2.9. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, а $\Delta : C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ - **классический оператор Лапласа**, заданный формулой

$$\Delta(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i^2}$$

где x_i – стандартные координаты на \mathbb{R}^n . Найдите символ Δ . Докажите, что он эллиптичен.

Задача 2.10 (!). Пусть P - однородный полином степени i от переменных $\frac{d}{dx_i}$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим P как дифференциальный оператор на \mathbb{R}^n . Докажите, что символ этого дифференциального оператора равен P .

Задача 2.11. Рассмотрим дифференциал де Рама $d : C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1 M$. Найдите его символ.

Замечание. Мы обозначаем дифференциальные i -формы значком $\Lambda^i(M)$.

Определение 2.5. Пусть B - гладкое расслоение над M , а

$$\nabla : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$$

– оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\nabla(fb) = b \otimes df + f\nabla b,$$

для любой функции $f \in C^\infty M$. Тогда ∇ называется **связностью** на расслоении B .

Задача 2.12 (!). Найдите символ связности. Докажите, что он не зависит от выбора ∇ . Выразите символ связности через символ дифференциала де Рама.

Определение 2.6. Связность на TM называется **связностью на многообразии M** . Если задана связность ∇ на TM , пользуясь формулой Лейбница, можно задать связность на всех тензорных расслоениях на TM , в частности $\Lambda^i M$ и $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \otimes \dots$. Эта связность обозначается той же буквой ∇ .

Задача 2.13. Пусть на расслоении B задана связность ∇_0 , а на многообразии M задана связность ∇ . Определим связность

$$\nabla_i B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i \text{ раз}} \longrightarrow B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i+1 \text{ раз}} \quad (2.2)$$

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

по формуле Лейбница:

$$\nabla_i(b \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_i) = \nabla_{i-1}(b \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_{i-1}) \otimes \xi_i + b \otimes \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_{i-1} \otimes \nabla \xi_i.$$

Обозначим за

$$\nabla^i : B \longrightarrow B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i \text{ раз}}$$

композицию $\nabla_0 \circ \nabla_1 \circ \dots \circ \nabla_i$. Этот оператор называется ***i*-я степень связности**.

- а. Докажите, что ∇^i - дифференциальный оператор порядка i .
- б. Докажите, что символ ∇^2 , рассмотренный, как элемент

$$\text{Sym}^2 TM \otimes \text{Hom}(B, B \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M)$$

симметричен по перестановкам тензорных сомножителей $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$.

- в. [*] Пусть S - символ ∇^i ,

$$S \in \text{Sym}^2 TM \otimes \text{Hom} \left(B, B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i \text{ раз}} \right)$$

Докажите, что S симметричен по перестановкам сомножителей $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \otimes \dots$

Задача 2.14 (!). Пусть

$$\underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i \text{ раз}} \xrightarrow{\Psi} C^\infty M$$

- $C^\infty M$ -линейное отображение, а P - его симметризация, рассмотренная как элемент в $\text{Sym}^i TM$. Рассмотрим расслоение B со связностью, и пусть

$$\nabla^i : B \longrightarrow B \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes \dots}_{i \text{ раз}}$$

ее i -я степень. Рассмотрим композицию

$$\nabla^i \circ (\text{Id}_B \otimes \Psi) : B \longrightarrow B$$

Докажите, что символ $\nabla^i \circ (\text{Id}_B \otimes \Psi)$ равен $P \otimes \text{Id}_B$.

Задача 2.15. Пусть M - риманово многообразие, а

$$\Psi : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow C^\infty M$$

- метрический тензор. Рассмотрим дифференциальный оператор $\nabla^i \circ (-\text{Id}_B \otimes \Psi) : B \longrightarrow B$, построенный как выше. Докажите, что он эллиптический.

Определение 2.7. Этот оператор называется **грубый оператор Лапласа на B** .

2.3. Грубый оператор Лапласа

Отныне и до конца этого листка, M - ориентированное n -мерное риманово многообразие, снабженное связностью Леви-Чивита. Метрический тензор на M индуцирует метрику на расслоении $\Lambda^n M$ форм объема. Положительное сечение $\Lambda^n M$ длины 1 называется **форма риманова объема** M , оно однозначно определяется метрикой и ориентацией. Мы обозначаем риманов объем за $\text{Vol } M$.

Задача 2.16. Пусть v - векторное поле на M , а ψ - функция, полученная из $\nabla v \in TM \otimes \Lambda^1 M$ спариванием. Обозначим за $\text{Vol } M \lrcorner v$ $(n-1)$ -форму, полученную подстановкой v в $\text{Vol } M$. Докажите, что $\psi \text{Vol} = d(\text{Vol } M \lrcorner v)$.

Указание. Поскольку ∇ - связность Леви-Чивита, она не имеет кручения, и мы имеем

$$d = \nabla \circ e,$$

где $e : \Lambda^k(M) \otimes \Lambda^1 M$ обозначает внешнее умножение (проверьте это). Из этой формулы получаем

$$d(\text{Vol } M \lrcorner v) = e(\nabla(\text{Vol } M \lrcorner v)) = e(\text{Vol} \lrcorner \nabla v),$$

что как раз равно ψVol (проверьте).

Задача 2.17 (!). Пусть $\theta \in \Lambda^1 M$ - 1-форма с компактным носителем, а $\Psi_g : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \rightarrow C^\infty M$ - отображение, определенное метрическим тензором M . Докажите, что

$$\int_M \Psi_g(\nabla \theta) \text{Vol } M = 0$$

Указание. Рассмотрим векторное поле θ^\sharp , двойственное θ . Применив результат предыдущей задачи, докажите, что

$$\Psi_g(\nabla \theta) \text{Vol } M = d(\text{Vol } M \lrcorner \theta^\sharp)$$

и воспользуйтесь формулой Стокса.

Задача 2.18 (!). Пусть B - расслоение с метрикой и связностью, сохраняющей метрику. Рассмотрим оператор

$$\nabla^* : B \otimes \Lambda^1 M \rightarrow B,$$

полученный как композиция связности (2.2)

$$\nabla_1 : B \otimes \Lambda^1 M \rightarrow B \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

со спариванием $b \otimes \xi_1 \otimes \xi_2 \rightarrow -g(\xi_1, \xi_2)b$. Обозначим за $(\cdot, \cdot)_1$ метрику на $B \otimes \Lambda^1 M$, естественно индуцированную с B и M . Пусть a - сечение $B \otimes \Lambda^1 M$. Докажите, что

$$\int_M (\nabla^* a, b) \text{Vol } M = \int_M (a, \nabla b)_1 \text{Vol } M$$

для любого сечения $b \in B$ с компактным носителем.

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

Указание. Обозначим за $(\cdot, \cdot)_\circ$ спаривание, переводящее элементы

$$\Lambda^i M \otimes B, \quad \Lambda^j M \otimes B$$

в $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M$, и индуцированное метрикой на B . Поскольку связность сохраняет метрику, мы имеем

$$\nabla(a, b)_\circ = (a, \nabla b)_\circ + (\nabla a, b)_\circ \in \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Применив Ψ_g к обеим частям этого уравнения, получите

$$\Psi_g(\nabla(a, b)_\circ) = -(\nabla^* a, b) + (\nabla a, b).$$

Поскольку $(a, b)_\circ$ - это 1-форма, $\int_M \Psi_g(\nabla(a, b)_\circ) \text{Vol } M = 0$ в силу предыдущей задачи.

Замечание. Мы доказали, что ∇^* сопряжен с ∇ в смысле L^2 -метрики на B -значных формах, заданной по формуле

$$(x, y) = \int_M (x, y) \text{Vol } M$$

Замечание. Ясно, что оператор $\nabla^* \nabla : B \rightarrow B$ равен грубому лапласиану на B , определенному выше. По построению, этот оператор эллиптивен, а его символ равен $-g \otimes \text{Id}_B$, где $g \in \text{Sym}^2 TM$ - метрический тензор.

2.4. Оператор Ходжа *

С помощью римановой метрики на M строится естественная метрика на всех тензорных расслоениях над M , в частности, на расслоении дифференциальных форм $\Lambda^k M$. Выберем ортонормированный базис ξ_1, \dots, ξ_n в $\Lambda^1 M$. Мы нормируем метрику на $\Lambda^k M$ таким образом, что базис

$$\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

– ортонормированный.

Задача 2.19. Пусть $\eta \in \Lambda^k M$ - дифференциальная форма, а $*\eta \in \Lambda^{n-k} M$ удовлетворяет

$$(\eta, \xi) \text{Vol } M = *\eta \wedge \xi.$$

для любого $\xi \in \Lambda^k M$.

- а. Докажите, что $*\eta$ определяется этим соотношением однозначно.
- б. Докажите, что $*\eta$ существует для каждого η

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

в. Докажите, что в базисе $\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k}$, определенном выше, $*$ записывается так:

$$*\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_k} = \sigma \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \dots \wedge \xi_{j_{n-k}}$$

где j_1, j_2, \dots, j_{n-k} - все индексы от 1 до n , не входящие в множество $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, и упорядоченные по возрастанию, а $\sigma = \pm 1$ - сигнатура подстановки $(j_1, j_2, \dots, j_{n-k}, i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Задача 2.20. Пусть ξ — k -форма, η — $(n-k)$ -форма. Докажите, что

а. $(*\eta, \xi) = (-1)^{k(n-k)}(\eta, *\xi)$

б. $*(*\eta) = (-1)^{k(n-k)}\eta$.

Задача 2.21 (*). Найдите собственные значения η на $\Lambda^{\frac{n}{2}}M$, для четномерного M .

Задача 2.22 (*). Пусть M — псевдориманово многообразие с метрикой сигнатуры s . Определите $*$ формулой, приведенной выше. Докажите, что $*(*\eta) = (-1)^{k(n-k)+s}\eta$.

Задача 2.23 (!). Определим $d^* : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k-1}(M)$ формулой $d^* = - * d *$. Докажите, что для любой формы ξ с компактным носителем, имеем

$$\int_M (d^*\eta, \xi) \text{Vol } M = \int_M (\eta, d\xi) \text{Vol } M$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Стокса:

$$\begin{aligned} \int_M (d^*\eta, \xi) \text{Vol } M &= \int_M (d^*\eta, \xi) \text{Vol } M = - \int_M d * \eta \wedge \xi \\ &= \int_M * \eta \wedge d\xi = \int_M (\eta, d\xi) \text{Vol } M \end{aligned}$$

Замечание. Мы получили, что d^* сопряжен с d в смысле L^2 -метрики на дифференциальных формах, заданной по формуле

$$(x, y) = \int_M (x, y) \text{Vol } M$$

2.5. Оператор Лапласа на дифференциальных формах

Определение 2.8. Определим оператор Лапласа на дифференциальных формах формулой

$$\Delta\eta := dd^*\eta + d^*d\eta.$$

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

Замечание. На функциях этот оператор совпадает с грубым лапласианом, определенным выше.

Задача 2.24. Пусть

$$\Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \xrightarrow{i} \Lambda^{k-1} M$$

оператор "внутреннего умножения", переводящий тензор $\eta \otimes \theta$ в $\eta \lrcorner \theta^\sharp$, где θ^\sharp - векторное поле, двойственное θ . Докажите, что

$$\iota(\eta \otimes \theta) = - * (*\eta \wedge \theta)$$

Задача 2.25. Рассмотрим оператор внешнего умножения

$$\Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \xrightarrow{e} \Lambda^{k+1} M.$$

а. Докажите, что $d\eta = e(\nabla\eta)$.

б. Докажите, что $d^*\eta = \iota(\nabla\eta)$.

Замечание. Свойство $d\eta = e(\nabla\eta)$ равносильно отсутствию кручения у связности ∇ .

Задача 2.26 (!). Рассмотрим квадрат связности на $\Lambda^k M$,

$$\nabla^2 : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M,$$

определенный выше. Докажите, что $\Delta(\eta) = V(\nabla^2\eta)$, где

$$V : \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^k M$$

– тензор, определенный следующим образом:

$$V(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = \iota(e(\xi \otimes \theta_1) \otimes \theta_2) + \iota(e(\xi \otimes \theta_2) \otimes \theta_1)$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.27. Докажите, что $V(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = -V(\xi \otimes \theta_2 \otimes \theta_1)$ если θ_1 ортогонально θ_2 .

Задача 2.28 (!). Рассмотрим тензор

$$V_0 : \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^k M$$

определенный формулой

$$V_0(\xi \otimes \theta_1 \otimes \theta_2) = \xi \otimes g(\theta_1, \theta_2)$$

где g - это риманова форма.

Теория Ходжа 2: Эллиптические операторы

- а. Докажите, что $V - V_0$ кососимметричен по последним двум аргументам
- б. Докажите, что $V_0(\nabla^2\eta) = \nabla^*\nabla\eta$.

Задача 2.29.

- а. Пусть

$$W : \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow B$$

кососимметричное по последним двум аргументом линейное отображение со значениями в B . Докажите, что

$$\nabla^2 \circ W : \Lambda^k M \longrightarrow B$$

равно $B(R)$, где R - тензор кривизны $\Lambda^k M$.

- б. [!] Выведите из этого такую формулу:

$$\Delta - \nabla^*\nabla = W(R),$$

где $W = V - V_0$, а R - кривизна расслоения $\Lambda^k M$, рассматриваемая тут как сечение

$$\Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^k M \otimes \Lambda^2 M \subset \Lambda^k M \otimes \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Замечание. Эта формула называется **формулой Вайценбека** (Weitzenböck). Вообще говоря, "формула Вайценбека" это общее название для тождеств вида $\Delta_1 - \Delta_2 = R$, где Δ_i - какие-либо естественные операторы Лапласа на тензорных или спинорных полях, а R - полином от кривизны касательного расслоения.

Замечание. Из формулы Вайценбека немедленно следует, что лапласиан эллиптичен. Убедитесь в этом.

Задача 2.30. Рассмотрим оператор $d+d^* : \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*M$. Докажите, что $d + d^*$ эллиптический.

Указание. Докажите, что $(d + d^*)^2 = \Delta$ и воспользуйтесь задачей 2.8.

Задача 2.31 (*). Рассмотрим формулу Вайценбека на 1-формах:

$$\Delta - \nabla^*\nabla = W(R).$$

В этом случае, $R \in \text{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M)$, а W отображает R в эндоморфизм $\Lambda^1 M$. Докажите, что $W(R)$ переводит θ в след в $\text{Tr}_{1,3} R(\theta)$, где след кривизны берется по первому и третьему аргументу. Это отображение называется "тензор Риччи", Ric. Таким образом, для 1-форм формула Вайценбека превращается в **тождество Бохнера**:

$$\Delta - \nabla^*\nabla = \text{Ric}.$$