Теория Ходжа 3: Пространства Соболева

3.1. Бесконечномерные векторные пространства

Определение 3.1. Пусть H - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu : H \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

а. $\nu(h) > 0$, если $h \neq 0$.

б. $\nu(\lambda h) = |\lambda|\nu(h)$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

в. (неравенство треугольника) $\nu(h_1 + h_2) \leqslant \nu(h_1) + \nu(h_2)$

Тогда ν называется **нормой** на пространстве H. Норму обыкновенно записывают как $|v|$.

Задача 3.1. Пусть $g : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{R}$ - билинейная, положительно определенная форма над H. Докажите, что $h \longrightarrow \sqrt{g(h,h)}$ задает норму на H.

Задача 3.2. Докажите, что пространство с нормой наделено естественной метрикой, по формуле $d(a,b) = \nu(a-b)$.

Замечание. Поскольку пространство с нормой является также метрическим, на нем определена естественная топология. Базой окрестностей в этой топологии являются открытые шары.

Определение 3.2. Если H полно как метрическое пространство, то (H,ν) называется **банаховым пространством**. Если, к тому же, ν задана посредством билинейной положительно определенной формы как указано выше, банахово пространство H называется **гильбертовым**. В большинстве приложений гильбертовы пространства определены над $\mathbb{C}$, а метрика задается эрмитовой формой $g : H \otimes H \longrightarrow \mathbb{R}$.

Задача 3.3. **Единичной сферой** в пространстве с нормой называется множество всех векторов, для которых $|x| = 1$.

а. [*] Докажите, что единичная сфера в бесконечномерном гильбертовом пространстве стягиваема (допускает гомотопическую эквивалентность с точкой).

б. [**] Верно ли это в произвольном бесконечномерном пространстве с нормой?

Определение 3.3. **Базисом** банахова пространства H называется набор S линейно независимых векторов таких, что их замыкание равно H. Если, к тому же, H гильбертово, а вектора базиса попарно ортогональны, S называется **ортогональным базисом**. Если к тому же все элементы S имеют длину 1, этот базис называется **ортонормированным**.

Задача 3.4. Рассмотрим пространство комплекснозначных функций на n-мерном торе $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, с метрикой, заданной $|f|^2 = \int |f|^2 \operatorname{Vol} T^n$, где $\operatorname{Vol} T^n$ - стандартная форма объема на торе, индуцированная с $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $L^2(T^n)$ гильбертово пространство, полученное пополнением из $C^\infty(T^n)$ по такой метрике. Докажите, что следующие функции образуют базис в $L^2(T^n)$:

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i}$$

где $\{k_i \in \mathbb{Z}\}$ пробегают все n-ки целых чисел.

Замечание. В силу предыдущей задачи, любая гладкая функция представляется в виде

$$f = \sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k_1,\dots k_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i}$$

где $\tau_{k_1,\dots k_n}$ - набор комплексных чисел. Это разложение называется **рядом Фурье** для функции f.

Определение 3.4. Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Линейный оператор $E: \ V_1 \longrightarrow V_2$ называется **ограниченным**, если существует константа C такая, что

$$\frac{|E(v)|}{|v|} < C$$

для любого ненулевого $v \in V_1$.

Задача 3.5. Докажите, что ограниченные операторы из V_1 в V_2 образуют линейное пространство. Докажите, что оператор ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен в топологии, заданной нормой.

Замечание. Довольно часто термин *непрерывный оператор* употребляют как синоним к *ограниченный оператор*.

Задача 3.6. Рассмотрим функцию $\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ на пространстве $\mathcal{E}(V_1, V_2)$ ограниченных операторов из V_1 в V_2

$$E \longrightarrow \sup_{v \in (V_1 \backslash 0)} \frac{|E(v)|}{v}$$

а. Докажите, что это норма

б. [!] Предположим, что пространства V_1, V_2 банаховы. Докажите, что $\mathcal{E}(V_1, V_2)$ тоже банахово.

в. [*] Пусть пространства V_1, V_2 гильбертовы. Будет ли $\mathcal{E}(V_1, V_2)$ гильбертовым?

Замечание. Единичный шар в пространстве с нормой - это множество точек $v \in V$ таких, что $|v| \leqslant 1$ ("замкнутый шар") или $|v| < 1$ ("открытый шар"). "Шар радиуса r" в пространстве с нормой - множество точек $v \in V$ таких, что $|v| \leqslant r$ или $|v| < r$. "Ограниченное множество" - подмножество V, содержащееся в каком-то шаре. В этих терминах, определение ограниченного оператора можно переговорить так: "ограниченный оператор это оператор, переводящий ограниченые множества в ограниченные".

Задача 3.7.

а. Пусть V - бесконечномерное пространство с нормой, которая определяется как корень из скалярного произведения. Докажите, что единичный шар в V не содержится в компакте.

б. [*] Теорема Рисса (Riesz). Докажите то же без предположения, что норма определена скалярным произведением.

Замечание. Множества, содержащиеся в компакте, называются **прекомпактными**.

Определение 3.5. Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Оператор $E;\ V_1 \longrightarrow V_2$ называется **компактным**, если образ любого ограниченного множества прекомпактен.

Определение 3.6. Гильбертово пространство называется **сепарабельным**, если у него есть конечный или счетный базис.

Задача 3.8 (*). Пусть H - гильбертово пространство. Докажите, что H сепарабельно тогда и только тогда, когда H содержит плотное счетное подмножество.

Задача 3.9. Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство,

$$\{z_i\}, i = 0, 1, 2, ...$$

его ортонормированный базис, а $K:\ H \longrightarrow H$ оператор, переводящий z_i в $\alpha_i z_i$. Докажите, что K компактный тогда и только тогда, когда $\lim |\alpha_i| = 0$.

Задача 3.10 (*). Пусть $A:\ H \longrightarrow H$ - компактный оператор, а B_1 - замкнутый шар радиуса 1 в H. Для каких A его образ $A(B_1)$ компактен?

Задача 3.11 (!). Пусть $E;\ V_1 \longrightarrow V_2$ - биективный линейный оператор. Докажите, что E является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда существуют константы C_1, C_2, такие, что выполнено

$$C_1|v| < |E(v)| < C_2|v|,$$

для любого $v \in V_1$.

Задача 3.12. Пусть $E = E_1 + K$ - биективный линейный оператор, такой, что E_1 это гомеоморфизм, а K компактно. Докажите, что E - тоже гомеоморфизм.

Определение 3.7. Пусть V - векторное пространство (вообще говоря, бесконечномерное), а $|\ |_1, |\ |_2$ - две нормы на H. Они называются **эквивалентными**, если тождественный оператор

$$(H, |\ |_1) \longrightarrow (V, |\ |_2)$$

является гомеоморфизмом.

Задача 3.13 (*). Докажите, что на конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

3.2. Соболевские пространства

Определение 3.8. Пусть $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция с компактным носителем. Для каждого монома

$$P_\alpha = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_1^{k_n}}$$

рассмотрим соответствующую частную производную f

$$P_\alpha(f) = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} \cdots \frac{\partial^{k_n}}{\partial x_1^{k_n}} f$$

s**-я соболевская норма** $|f|_s$ определяется так:

$$|f|_s^2 = \sum_{\deg P_\alpha \leqslant s} \int |P_\alpha(f)|^2 \operatorname{Vol}$$

где сумма пробегает все мономы степени от нуля до s, а $\operatorname{Vol} = dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... dx_n$ - стандартная форма объема. Очевидно, что это билинейная, квадратичная форма на пространстве функций; ее корень и задает соболевскую норму.

Пусть теперь вместо функции берется тривиальное расслоение F с метрикой. Соболевская норма на сечениях F вычисляется по той же самой формуле, где частные производные определяются посредством тривиализации, а $|\ |^2$ вычисляется с использованием метрики на F.

Задача 3.14. Естественное отображение $\mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ из $\mathbb{R}^n$ в тор инъективно на шаре B радиуса $1/2$. Это позволяет рассматривать функции с носителем в B как функции на T^n. Рассмотрим ряд Фурье для функции f:

$$f = \sum_{k_1, \dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k_1, \dots k_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i}$$

Докажите, что

$$|f|_s^2 = \sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \left(|\tau_{k_1,\dots k_n}|^2 \sum_{i=1}^n (1 + k_i^2 + k_i^4 + \dots + k_i^{2s} \right)$$

Задача 3.15. (Лемма Реллиха) Докажите, что естественное отображение $L^2_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2_{s-i}(\mathbb{R}^n)$ компактно на функциях со значениями в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, для любого $i > 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 3.16. Рассмотрим ряд Фурье от одной переменной t,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_k e^{2\pi\sqrt{-1}kt} \tag{3.1}$$

Предположим, что $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{2+2l}|\tau_k|^2$ сходится. Докажите, что (3.1) сходится к функции класса C^l (l-кратно дифференцируемой).

Задача 3.17. Пусть коэффициенты ряда Фурье

$$\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k_1,\dots k_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i} \tag{3.2}$$

таковы, что ряд

$$\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \left(|\tau_{k_1,\dots k_n}|^2 \sum k_i^{\frac{n}{2}+1} \right)$$

сходится. Докажите, что (3.2) сходится к непрерывной функции.

Указание. Воспользуйтесь неравенством

$$\left(\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \frac{|\gamma_{k_1,\dots k_n}|}{\sum k_i^{\frac{n}{2}+1}} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} |\gamma_{k_1,\dots k_n}|^2) \right)^2 \left(\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{\sum k_i^{n+2}}) \right)^2$$

которое следует из неравенства $|(a,b)|^2 < |a|^2|b|^2$, выполненного в любом гильбертовом пространстве.

Задача 3.18 (!). Пусть коэффициенты ряда Фурье

$$f = \sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} \tau_{k_1,\dots k_n} e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n k_i t_i}$$

таковы, что сумма

$$\sum_{k_1,\dots k_n \in \mathbb{Z}^n} |\tau_{k_1,\dots k_n}|^2 \sum_{i=1}^n k_i^{\frac{n}{2}+1+l}$$

сходится. Докажите, что этот ряд сходится к функции из $C^l(T^n)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.19 (!). (Лемма Соболева) Пусть последовательность $\{f_i\}$ гладких функций с носителем в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, которая сходится в соболевской норме $L^2_s(\mathbb{R}^n)$, причем $s > l + \frac{n}{2}$. Докажите, что $\{f_i\}$ сходится в $L^2_s(\mathbb{R}^n)$-топологии к функции из $C^l(\mathbb{R}^n)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

3.3. Соболевские нормы на многообразии

Определение 3.9. Пусть F - расслоение со связностью на M, а g - метрика на M (не обязательно плоская). Определим **соболевскую норму, ассоциированную со связностью и метрикой** по формуле

$$|f|^2_s = \sum_{i=0}^{s} \int |\nabla^i f| \operatorname{Vol}$$

где

$$\nabla^i: \ F \longrightarrow F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$$

i-я степень связности (см. листок "Теория Ходжа 2") а $|\cdot|$ - естественная метрика на расслоении $F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$, индуцированная метрикой на M и F. Соответствующее гильбертово пространство обозначается $L^2_s(F)$. Если $M = \mathbb{R}^n$, а связность на F тривиальна, это определение совпадает с приведенным выше.

Задача 3.20. Пусть F - тривиальное расслоение на $\mathbb{R}^n$, снабженное нетривиальной связностью, ${}^1|\ |^2_s$ - метрика Соболева, связанная с тривиальной связностью на F, а ${}^2|\ |^2_s$ - метрика, связанная с нетривиальной связностью. Докажите, что для сечений с носителем в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$,

$${}^2|f|^2_s = {}^1|f|^2_s + C\,{}^1|f|^2_{s-1}$$

где константа C выражается через форму связности на F.

Задача 3.21. Пусть F - расслоение со связностью на M, g_1, g_2 - метрики на TM, ${}^1|\ |^2_s$, ${}^2|\ |^2_s$ - нормы Соболева, связанные с g_1, g_2. Докажите, что для сечений с носителем в компакте $B \subset M$, имеет место

$$C_2\,{}^1|f|^2_s \leqslant {}^2|f|^2_s \leqslant C_1\,{}^1|f|^2_s$$

где константы C_1, C_2 выбраны таким образом, чтобы в любой точке B имело место неравенство

$$C_2|T|_{g_1} \leqslant |T|_{g_2} \leqslant C_1|T|_{g_1}$$

для любого тензора T над $\Lambda^1(M)$ валентности не больше s.

Задача 3.22 (!). Выведите из этого, что на $\mathbb{R}^n$ соболевские нормы на F, определенные по связности на F и римановой метрике на $\mathbb{R}^n$, эквивалентны.

Задача 3.23 (!). (Лемма Реллиха) Пусть M - компактное многообразие. Тогда естественное вложение $L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i}(F)$ компактно, для любого $i > 0$.

Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы и леммой Реллиха для $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.24 (*). Верно ли это для некомпактного многообразия?

Задача 3.25 (!). Пусть последовательность $\{f_i\}$ гладких сечений F на компактном многообразии M сходится в соболевской норме $L^2_s(F)$, причем $s > l + \frac{n}{2}$. Докажите, что $\{f_i\}$ сходится в $L^2_s(M)$-топологии к функции из $C^l(M)$.

Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы и леммой Соболева для $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.26 (*). Верно ли это для некомпактного многообразия?

Задача 3.27 (!). Пусть $D : \ F \longrightarrow G$ - дифференциальный оператор порядка i на компактном многообразии. Докажите, что он непрерывно отображает $L^2_s(F)$ в $L^2_{s-i}(G)$.

Задача 3.28 (*). Верно ли это для некомпактного многообразия?

Задача 3.29 (!). Пусть $\psi \in L^2_s(F)$ лежит в пересечении всех $L^2_s(F)$, то есть для каждого s есть последовательность ψ_i^s, сходящаяся к ψ в $L^2_p(F)$, для всех $p \leqslant s$. Докажите, что есть последовательность ψ_i гладких функций, сходящаяся к ψ в любой из этих топологий. Докажите, что эта последовательность равномерно сходится к гладкой, L^2-интегрируемой функции.

Задача 3.30 (*). Обозначим $L^2_s(C^\infty M)$ за $L^2_s(M)$. Пусть $x \in M$ точка, а $L^2_s(M)_x$ - пространство всех обобщенных функций $\psi \in L^2_s(M)$ с носителем в x, то есть обладающих тем свойством, что $(\psi, v) = 0$ для любой гладкой функции v, зануляющейся в окрестности x. Найдите размерность $L^2_s(M)_x$.

Задача 3.31. Пусть D_1, $D_2 : \ F \longrightarrow F$ - дифференциальные операторы порядка i, j на расслоении F на компактном многообразии. Докажите, что коммутатор $[D_1, D_2] : \ L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i-j}(F)$ компактен.