Теория Ходжа 4: Фредгольмовы операторы и спектральная теорема

4.1. Топология на гильбертовых пространствах

Задача 4.1 (!). Пусть $F: \ H_1 \longrightarrow H_2$ — ограниченное отображение гильбертовых пространств, а $\{x_i\}$ - базис в H_1. Предположим, что

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \frac{|F(x_i)|}{|x_i|} = 0.$$

Докажите, что F компактен.

Задача 4.2. Пусть $F: \ H_1 \longrightarrow H_2$ - компактный оператор, H_2 бесконечномерно. Докажите, что F не сюрьективен.

Указание. Рассмотрим отображение проективных пространств

$$\mathbb{P}(H_1/\ker F) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{P}H_2,$$

индуцированное F. Докажите, что образ Ψ совпадает с проективизацией $F(R)$, где $R = \{x \in H_1 : \ \ | \ 1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$, а значит компактен. Воспользуйтесь теоремой Рисса, чтобы убедиться, что $\mathbb{P}H_2$ не может быть компактен.

Задача 4.3 (!). Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ биективный ограниченный оператор на гильбертовых пространствах. Докажите, что обратный оператор тоже ограничен.

Указание. В предположении, что не существует $C > 0$ такого, что $|F(x)| \geqslant C|x|$, постройте подпространство $H_1' \subset H_1$, в ограничении на которое F компактен. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что F не может отображаться сюрьективно на замыкание $F(H_1')$.

Задача 4.4. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ ограниченный оператор на гильбертовых пространствах. Докажите, что следующие условия равносильны.

(i) Существует оператор $F': H_2 \longrightarrow H_1$, такой, что $FF' = \mathsf{Id}_{H_1}$ (в таком случае, F называется **обратимым слева**).

(ii) существует число $C > 0$ такое, что $|F(x)| \geqslant C|x|$, для любого $x \in H_1$.

(iii) $\ker F = 0$, а $\operatorname{im} F$ замкнут.

Указание. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна из определений (в качестве C возьмем норму F'). Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) тоже очевидна, ибо из $|F(x)| \geqslant C|x|$ следует, что для любой последовательности Коши вида $\{F(z_i)\}$, $z_i \in H_1$, $\{z_i\}$ – тоже последовательность Коши. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i), следует из предыдущей задачи.

Задача 4.5 (!). Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - ограниченное, биективное отображение гильбертовых пространств. Докажите, что F - гомеоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 4.1. Последовательность $\{x_i\}$ в гильбертовом пространстве H называется **слабо сходящейся**, если для любого непрерывного функционала $\mu \in H^*$, последовательность $\mu(x_i) \in \mathbb{C}$ сходится. Обычную сходимость последовательности называют **сильной сходимостью**. Топологию, которая индуцирует слабую сходимость, называют **слабой топологией**.

Задача 4.6. Приведите пример последовательности, которая сходится в слабой топологии, но не в сильной.

Задача 4.7 (*). Существует ли линейное отображение гильбертовых пространств $H \longrightarrow H_1$, которое не непрерывно в слабой топологии?

Задача 4.8 (*). Докажите, что ограниченный оператор $H \longrightarrow H_1$ компактен тогда и только тогда, когда он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

4.2. Фредгольмовы операторы

Определение 4.2. Ограниченный оператор $F: H_1 \longrightarrow H_2$ на гильбертовых пространствах называется **фредгольмовым** (Fredholm), если его ядро и коядро конечномерны.

Задача 4.9. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - фредгольмов оператор. Докажите, что он индуцирует гомеоморфизм из $H_1/\ker F$ в $\operatorname{im} F$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.5.

Задача 4.10. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - фредгольмов оператор. Докажите, что существует фредгольмов оператор $F_1: H_2 \longrightarrow H_1$ такой, что оператор $\mathsf{Id}_{H_1} - FF_1$ конечномерен (имеет конечномерный образ).

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Замечание. Из этого утверждения следует, в частности, что $\mathsf{Id}_{H_1} - FF_1$ компактен.

Определение 4.3. Назовем линейную форму $\lambda: H \longrightarrow \mathbb{R}$ на гильбертовом пространствве **ограниченной**, если существует $C > 0$ такое, что $|\lambda(x)| < C|x|$.

Задача 4.11. Пусть H - гильбертово пространство, H_1 - пространство ограниченных форм на H, а $x \longrightarrow (\cdot, x)$ естественное отображение из H в H_1, переводящее x в форму $y \mapsto (y, x)$. Докажите, что это изоморфизм.

Задача 4.12. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - ограниченный оператор, а $F^*: H_2 \longrightarrow H_1$ - оператор, переводящий $x \in H_2$ в вектор $y \in H_1$, который удовлетворяет

$$(x, F(h)) = (y, h)$$

для любого $h \in H_1$.

а. Докажите, что это уравнение определяет F^* однозначно.

б. Докажите, что такой оператор F^* всегда существует.

в. Докажите, что F^* - ограниченный оператор.

г. Докажите, что F фредгольмов тогда и только тогда, когда F^* фредгольмов.

д. Докажите, что F компактен тогда и только тогда, когда F^* компактен.

Указание. Для того, чтобы доказать существование сопряженного оператора, воспользуйтесь предыдущей задачей

Замечание. В этих условиях, F^* называется **сопряженным оператором** к F.

Задача 4.13. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - ограниченный оператор, F^* - его сопряженный. Докажите, что $\ker F^* = H_2/\overline{\operatorname{im} F}$, где $/\overline{\operatorname{im} F}$ - замыкание образа F.

Задача 4.14 (!). Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$, $G: H_2 \longrightarrow H_3$ - ограниченные операторы.

а. Докажите, что GF фредгольмов, если F и G фредгольмовы.

б. Пусть GF и FG фредгольмовы. Докажите, что F и G оба фредгольмовы.

Задача 4.15. Пусть GF фредгольмов. Верно ли, что F и G фредгольмовы?

Задача 4.16. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ - фредгольмов оператор. Докажите, что гильбертовы пространства H_1 и H_2 изоморфны.

Замечание. Для упрощения обозначений, отныне мы будем рассматривать только фредгольмовы операторы, действующие из пространства H в себя. В силу предыдущей задачи, это не ограничивает общности.

Задача 4.17. Пусть $K : H \longrightarrow H$ - компактный оператор. Докажите, что образ $\mathsf{Id}_H + K$ замкнут.

Указание. Предположим, что z лежит в замыкании образа $\mathsf{Id}_H + K$, то есть является пределом последовательности $z_i = y_i + K(y_i)$. Поскольку K ограничен, последовательность $\{y_i\}$ ограничена. Заменив y_i на подпоследовательность, можно считать, что $K(y_i)$ сходится к k. Это значит, что $y_i = z_i - K(y_i)$ сходится к $y = z - k \in H$. Выведите из этого, что $z = y + K(y)$.

Задача 4.18 (!). Пусть $K : H \longrightarrow H$ - компактный оператор. Докажите, что $\mathsf{Id}_H + K$ фредгольмов.

Указание. Конечномерность ядра $\mathsf{Id}_H + K$ очевидна, поскольку K действует на этом ядре как $-\mathsf{Id}$, и этот оператор может быть компактен только если $\ker(\mathsf{Id}_H + K)$ конечномерно, по теореме Рисса. Фактор H по замыканию образа $\mathsf{Id}_H + K$ отождествляется с ядром $\mathsf{Id}_H + K^*$, а K^* компактен в силу задачи 4.12. Чтобы доказать замкнутость образа $\mathsf{Id}_H + K$, воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 4.4. Двусторонний идеал в алгебре A это такое подпространство $I \subset A$, что $aI \subset I$ и $Ia \subset I$ для всех $a \in A$. Факторпространство A/I по двустороннему идеалу наделено естественной структурой алгебры.

Задача 4.19. Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H, а $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ - пространство всех компактных операторов. Докажите, что $\mathcal{K}$ - двусторонний идеал.

Определение 4.5. Факторалгебра $\mathcal{C}/\mathcal{K}$ называется **алгеброй Калкина** гильбертова пространства H (Calkin).

Задача 4.20 (*). Докажите, что алгебра Калкина проста (не содержит нетривиальных двусторонних идеалов).

Задача 4.21 (!). Пусть $F : H \longrightarrow H$ - ограниченный оператор. Докажите, что F фредгольмов тогда и только тогда, когда его класс $[F]$ в алгебре Калкина обратим.[1]

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.10 и задачей 4.14.

Задача 4.22 (!). Пусть $F_1 F = \mathsf{Id}_H + K$, где K компактен. Всегда ли F фредгольмов?

[1] Это значит, что существует $G_1, G_2 : H \longrightarrow H$, что $FG_1 - 1$ и $G_2 F - 1$ компактны.

Определение 4.6. Напомним, что **обратимым оператором** на гильбертовом пространстве называется ограниченный оператор $F \in \operatorname{End}(H)$ такой, что существует ограниченный оператор $F_1 : \ H \longrightarrow H$, причем $FF_1 = F_1F = \mathsf{Id}_H$.

Задача 4.23 (*). Пусть $F : \ H \longrightarrow H$ - фредгольмов оператор, $[F]$ - его класс в алгебре Калкина. Всегда ли у $[F]$ существует представитель F', который обратим?

Указание. **Индексом** фредгольмова оператора F называется число

$$\dim\ker F - \dim\operatorname{coker} F.$$

Докажите, что индекс F' не зависит от выбора представителя в классе $[F]$.

Задача 4.24 (!). Пусть оператор $F : \ H \longrightarrow H$ фредгольмов. Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого оператора $G \in \operatorname{End}(H)$, удовлетворяющего $|G - F| < \varepsilon$, оператор G также фредгольмов.

Указание. Проверьте это для случая тождественного F, записав

$$(Id_H + G_1)^{-1} = Id_H - G_1 + G_1^2 - G_1^3 + ...$$

где $G_1 = G - F$. Затем воспользуйтесь тем, что

$$GF_1 = \mathsf{Id}_H + G_1F + G_1K$$

где F_1 - оператор, удовлетворяющий $FF_1 = \mathsf{Id}_H + K$.

Задача 4.25 (*). Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве, а $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ - множество всех фредгольмовых операторов. Из предыдущей задачи следует, что $\mathcal{F}$ открыто, в топологии, заданной нормой. Найдите все связные компоненты $\mathcal{F}$.

Указание. Попробуйте доказать, что множество фредгольмовых операторов с фиксированным индексом связно.

4.3. Спектральная теорема

Определение 4.7. Пусть $F : \ H \longrightarrow H$ - ограниченный оператор на гильбертовом пространстве. **Спектром** F называется множество

$$\operatorname{Spec} F \subset \mathbb{C}$$

всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $F - \lambda\,\mathsf{Id}_H$ не обратим.

Задача 4.26. Пусть $F : \ H \longrightarrow H$ - ограниченный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$ число. Докажите, что следующие условия равносильны.

(i) $\lambda \notin \operatorname{Spec} F$

(ii) Ядро $F - \lambda \operatorname{Id}_H$ пусто, а образ $F - \lambda \operatorname{Id} H$ совпадает с H

Задача 4.27 (!). Пусть $F: H \longrightarrow H$ - ограниченный оператор, а $\lambda \in \mathbb{C}$ число, не лежащее в его спектре. Докажите, что существует $C > 0$ такое, что $|F(x) - \lambda x| > c|x|$, для любого $x \in H$.

Задача 4.28 (!). Докажите, что $\operatorname{Spec} F$ замкнут в $\mathbb{C}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.24.

Задача 4.29 (!). Докажите, что $\operatorname{Spec} F$ ограничен (содержится в круге).

Задача 4.30 (*). Постройте оператор, спектр которого - это замкнутый круг.

Задача 4.31 (!). Пусть $K: H \longrightarrow H$ компактен, $\lambda \in \operatorname{Spec} K$, $\lambda \neq 0$. Докажите, что пространство $H_{\lambda,n} := \ker(K - \lambda \operatorname{Id}_H)^n$ непусто и конечномерно, для любого целого n, причем его размерность ограничена константой $\operatorname{mult}(\lambda)$, не зависящей от n. Докажите, что $K(H_{\lambda,n}) \subset H_{\lambda,n}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $K - \lambda \operatorname{Id}_H$ фредгольмов.

Задача 4.32. Пусть ε - положительное вещественное число, а K - компактный оператор. Докажите, что множество $\{\lambda \in \operatorname{Spec} K \quad | \quad |\lambda| > \varepsilon\}$ конечно.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Рисса.

Замечание. Согласно предыдущей задаче, спектр компактного оператора счетен и не имеет предельных точек, кроме нуля. Согласно задаче 4.31, каждое ненулевое число $\alpha \in \operatorname{Spec} K$ является собственным значением K. Эти утверждения в совокупности называют "спектральной теоремой для компактных операторов".

Задача 4.33 (*). Докажите, что компактный оператор является пределом последовательности конечномерных, в топологии, заданной стандартной нормой на пространстве ограниченных операторов.

Задача 4.34 (*). Пусть K - компактный оператор, а s — супремум функции $x \longrightarrow |K(x)|$ на единичном шаре B_1. Докажите, что $s = |K(x_0)|$ для какого-то $x_0 \in B_1$

Задача 4.35 (*). Постройте инъективный компактный оператор $K: H \longrightarrow H$ с нулевым спектром. Может ли образ K быть плотен в H?

Задача 4.36. Пусть K – инъективный оператор на гильбертовом пространстве, квадрат которого компактен. Верно ли, что K тоже компактен?

4.4. Самосопряженные компактные операторы

Определение 4.8. Оператор $A : H \longrightarrow H$ на гильбертовом пространстве называется **самосопряженным**, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in H$.

]

Задача 4.37. Пусть $A : H \longrightarrow H$ самосопряженный. Докажите, что $(A(x), x)$ вещественно для любого $x \in H$.

Задача 4.38. Пусть $H_1 \subset H$ - подпространство в гильбертовом пространстве, A самосопряженный оператор, причем $A(H_1) \subset H_1$. Докажите, что A сохраняет ортогональное дополнение $H_1^\perp$.

Задача 4.39 (!). Докажите, что спектр самосопряженного оператора **вещественный**, то есть лежит в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Указание. Из вещественности $(A(x), x)$ получите, что

$$|\mathsf{Im}(A(x) - \lambda x, x)| > |\mathsf{Im}(\lambda)| \cdot |x|.$$

Выведите из этого, что $|A(x) - \lambda x| > C|x|$, для какого-то $C > 0$. Из этого получите, что образ A замкнут, а ядро пусто. Теперь воспользутесь тем, что коядро A равно ядру A^*.

Определение 4.9. Самосопряженный оператор A называется **положительным**, если $(A(x), x) \geqslant 0$, и **строго положительным**, если это неравенство строгое для любого ненулевого x.

Задача 4.40. Докажите, что квадрат самосопряженного оператора всегда положителен.

Задача 4.41. Докажите, что спектр положительного компактного оператора лежит на положительной вещественной оси.

Указание. Воспользуйтесь спектральной теоремой

Задача 4.42 (!). Пусть A - положительный, самосопряженный фредгольмов оператор, причем $\ker A = 0$. Докажите, что существует $\varepsilon \in \mathbb{R}$, такое, что $A - \varepsilon\, \mathsf{Id}_H$ тоже положителен.

Указание. Возьмите $\varepsilon := |A^{-1}|$.

Задача 4.43 (!). Пусть A - самосопряженный, компактный оператор, причем $\operatorname{Spec} A$ лежит на положительной вещественной оси. Докажите, что A положителен.

Указание. Докажите, что $A + \lambda \operatorname{\mathsf{Id}}_H$ положителен для достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим за λ_0 инфинум всех λ, для которых $A + \lambda \operatorname{\mathsf{Id}}_H$ положителен. Докажите, что $-\lambda_0$ лежит в спектре A. Для этого воспользуйтесь предыдущей задачей,

Замечание. Мы доказали, что спектр компактного самосопряженного оператора лежит в $[0, \infty[$ *тогда и только тогда*, когда он положителен.

Задача 4.44. Пусть A - самосопряженный компактный оператор с нулевым спектром. Докажите, что $A = 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.45 (!). Пусть A - компактный, самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве H. Обозначим за H_α пространство

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(A - \alpha \operatorname{\mathsf{Id}}_H)^n$$

(поскольку A компактен, это объединение стабилизируется на конечном шаге, а, значит, все H_α конечномерны). Докажите, что

$$\bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Spec} A} H_\alpha$$

плотно в H.

Указание. Воспользуйтесь спектральной теоремой, и примените предыдущую задачу.

Задача 4.46 (*). Верно ли это без предположения о самосопряженности A?

Задача 4.47 (!). Пусть $A: H \longrightarrow H$ - компактный, самосопряженный оператор. Докажите **спектральную теорему для самосопряженных операторов**: в каком-то ортонормальном базисе базисе $x_1, x_2, \ldots$, действие A записывается диагонально: $A(x_i) = \alpha_i x_i$.

Указание. Докажите аналогичную теорему для самосопряженных операторов в конечномерных пространствах, и воспользуйтесь разложением

$$\bigoplus_{\alpha \in \operatorname{Spec} A} H_\alpha.$$

Задача 4.48 (*). Пусть A_α - семейство попарно коммутирующих самосопряженных операторов (возможно, бесконечное). Докажите, что найдется ортонормированный базис, в котором все A_α диагональны.

Задача 4.49 (*). Оператор U на гильбертовом пространстве называется **унитарным**, если $UU^* = U^*U = \mathsf{Id}$. Докажите, что спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности.

Указание. Докажите, что

$$(U + \alpha Id(x), U - \bar{\alpha} Id(x)) = (1 - |\alpha|^2)|x|^2$$

Задача 4.50 (*). Пусть U - унитарный оператор, такой, что $U - \mathsf{Id}$ компактно. Докажите, что U диагонализуем в каком-то ортонормированном базисе.

Задача 4.51 (*). Верно ли это без предположения, что $U - \mathsf{Id}$ компактно?