Теория Ходжа 5: Оператор Грина

4.1. Самосопряженные дифференциальные операторы

Определение 4.1. Напомним, что дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}:\ F \longrightarrow F$$

называется **самосопряженным**, если для любых гладких сечений $x, y \in F$, имеем

$$(\mathcal{D}(x), y) = (x, \mathcal{D}y).$$

Определение 4.2. Пусть F - эрмитово расслоение со связностью ∇. Рассмотрим грубый лапласиан $D_\nabla :\ \nabla^*\nabla :\ \ F \longrightarrow F$. Напомним, что соболевскую метрику на сечениях F можно определить формулой

$$(f, g)_{L^2_s} := (f + D_\nabla f + D^2_\nabla f + ... + D^s_\nabla f, g)_{L^2_0}, \tag{4.1}$$

где $(\cdot,\cdot)_{L^2_0} = (\cdot,\cdot)$ – обычное скалярное произведение на сечениях F. Обозначим сумму $1 + D_\nabla + D^2_\nabla + ... + D^s_\nabla$ за D_s. Уравнение (4.1) перепишется в таком виде

$$(f, g)_{L^2_s} = (D_s f, g).$$

Задача 4.1. Рассмотрим отображение $D_1 :\ \ L^2_{s+2}(F) \longrightarrow L^2_s(F)$. Воспользовавшись (4.1), докажите, что это изометрическое вложение.

Задача 4.2. Пусть $\mathcal{D} :\ \ F \longrightarrow F$ - самосопряженный дифференциальный оператор порядка i, а $x \in L^2_s(F)$. Докажите, что следующие свойства равносильны

(i) x ортогонален замыканию образа $\mathcal{D}:\ L^2_{s+i}(F) \longrightarrow L^2_s(F)$.

(ii) $x \in \ker \mathcal{D}D_s :\ L^2_s(F) \longrightarrow L^2_0(F)$.

Указание. По определению, $(x, \mathcal{D}(y))_{L^2_s} = 0$ для любого гладкого сечения $y \in F$ тогда и только тогда, когда

$$(D_s x, \mathcal{D}(y)) = 0, \quad \forall y \in F.$$

Из самосопряженности $\mathcal{D}$ следует, что $(\mathcal{D}D_s(x), y) = 0$ для любого $y \in F$.

Задача 4.3 (!). Докажите, что отображение $D_s :\ \ L^2_{s+2}(F) \longrightarrow L^2_s(F)$. задает биективную изометрию гильбертовых пространств

Указание. Воспользуйтесь самосопряженностью D_s.

Задача 4.4 (!). Пусть M - компактное риманово многообразие, а $\Delta: \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$ - оператор Лапласа на формах. Докажите, что

$$\Delta: \ L^2_{s+2}(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_s(\Lambda^*(M))$$

фредгольмов.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, леммой Реллиха и формулой Вайценбека:

$$D_1 - \Delta = R,$$

где R – оператор нулевого порядка на формах.

Задача 4.5. Пусть M - компактное риманово многообразие, а

$$\delta: \ \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$$

- оператор первого порядка на формах, заданный формулой $\delta = d + d^*$

а. Докажите, что δ самосопряжен, и удовлетворяет $\delta^2 = \Delta$.

б. Докажите, что δ эллиптичен.

в. Докажите, что

$$\delta: \ L^2_s(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_{s-1}(\Lambda^*(M))$$

фредгольмов.

г. Докажите, что для гладких форм $\delta(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(x) = 0$.

Задача 4.6 (!). Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{D}: \ F \longrightarrow F$ порядка i фредгольмов, самосопряжен и инъективен. Докажите, что он задает биекцию гильбертовых пространств $\mathcal{D}: \ L^2_{s+i}(F) \longrightarrow L^2_s(F)$.

Задача 4.7 (!). Рассмотрим оператор $1 + \Delta \ \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$, переводящий $x \in \Lambda^*(M)$ в $\Delta(x) + x$. Докажите, что

$$1 + \Delta \ L^2_{s+2}(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_s(\Lambda^*(M))$$

обратим.

Указание. Этот оператор фредгольмов, самосопряжен и инъективен.

4.2. Оператор Грина

Определение 4.3. Рассмотрим обратный оператор

$$(1+\Delta)^{-1}:\ L^2_s(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_{s+2}(\Lambda^*(M))$$

определенный в силу предыдущей задачи. **Оператор Грина, обращающий** $1+\Delta$ есть композиция $(1+\Delta)^{-1}:\ L^2_s(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_{s+2}(\Lambda^*(M))$ с проекцией $L^2_{s+2}(\Lambda^*(M)) \longrightarrow L^2_s(\Lambda^*(M))$. Из леммы Реллиха ясно, что этот оператор компактен. Обозначим его за $G_{1+\Delta}$.

Задача 4.8. Докажите, что оператор Грина $G_{1+\Delta}$ диагонализуем, в некотором ортонормальном базисе.

Указание. Воспользуйтесь спектральной теоремой.

Задача 4.9 (!). Пусть $\eta \in L^2_s(\Lambda^*(M))$ – собственный вектор оператора Грина, $G_{1+\Delta}(\eta) = \alpha\eta$. Докажите, что η лежит в

$$L^2_{s+2}(\Lambda^*(M)) \subset L^2_s(\Lambda^*(M)),$$

и является собственным для действия $G_{1+\Delta}$ на $L^2_{s+2}(\Lambda^*(M))$.

Указание. Пусть $\{\eta_i\}$ - последовательность гладких форм, сходящихся к η в L^2_s. По определению оператора Грина, $\{G_{1+\Delta}(\eta_i)\}$ сходится к $\alpha\eta$ в L^2_{s+2}.

Задача 4.10. В условиях предыдущей задачи, докажите, что η лежит в $\bigcap_s L^2_s(\Lambda^*(M))$.

Замечание. В силу леммы Соболева, это значит, что η представимо гладкой формой.

Задача 4.11. Пусть $\{\tilde{\eta}_i\}$ - ортонормальный базис в $L^2_0(\Lambda^*(M))$, диагонализующий $G_{1+\Delta}$, а $\eta_i \in \Lambda^*(M)$ - гладкие функции, представляющие $\tilde{\eta}_i$.

а. Докажите, что $\{\eta_i\}$ является ортонормальным базисом в пространстве гладких форм.

б. Докажите, что Δ действует диагонально на пространстве $\Lambda^*(M)$ гладких форм, имеет конечномерные собственные пространства, вещественные собственные значения, и его множество собственных значений дискретно.

Замечание. Замыкание множества собственных значений оператора D, диагонально действующего на каком-то бесконечномерном векторном пространстве, называется его **спектром**. Спектр оператора Лапласа, действующего на гладких функциях, дискретен, как доказано выше.

Задача 4.12 (*). Пусть $\mathcal{D}: \ F \longrightarrow F$ самосопряженный дифференциальный оператор порядка $i > 0$, причем $\mathcal{D}: \ L^2_{s+i}(F) \longrightarrow L^2_s(F)$ фредгольмов для каждого i. Докажите, что $\mathcal{D}$ диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства гладких сечений F, и имеет дискретный спектр.

Задача 4.13 (*). Пусть $\mathcal{D}: \ F \longrightarrow F$ - дифференциальный оператор порядка $i > 0$. Предположим, что для каждого $s \geqslant i$ существуют константы C_1, $C_2 > 0$ такие, что $\forall x \in L^2_s(F)$, имеем

$$|x|^2_s \leqslant C_1 |\mathcal{D}(x)|^2_{s-i} + C_2|x|_0. \tag{4.2}$$

Докажите, что $\mathcal{D}$ фредгольмов.[1]

Задача 4.14 (**). Докажите, что любой эллиптический оператор на компактном многообразии удовлетворяет неравенству Гординга.

Определение 4.4. Пусть M - компактное риманово многообразие, Δ лапласиан, а $\{\eta_i\}$ - ортонормальный базис в $\Lambda^*(M)$, диагонализующий Δ. **Оператор Грина для** Δ есть эндоморфизм $G_\Delta: \ \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$, действующий диагонально в этом же базисе, следующим образом. Если $\eta_i \in \ker\Delta$, то $G_\Delta(\eta_i) = 0$. Если же $\Delta(\eta_i) = \alpha_i\eta_i$, с ненулевым собственным значением α_i, то $G_\Delta(\eta_i) = \alpha_i^{-1}\eta_i$.

Определение 4.5. Форма называется **гармонической**, если она лежит в ядре Δ.

Задача 4.15. Докажите, что пространство гармонических форм на M конечномерно. Докажите, что пространство гармонических функций (0-форм) одномерно.

Задача 4.16. Докажите, что $\Delta G_\Delta = G_\Delta \Delta = \mathsf{Id} - \Pi$, где Π - ортогональная проекция на пространство гармонических форм.

4.3. Гармонические формы и когомологии

Пусть M - компактное риманово многообразие, d дифференциал де Рама, $d^* = - * d *$ - сопряженный оператор, $\Delta = dd^* + d^*d$ оператор Лапласа, действующий на дифференциальных формах.

Задача 4.17. Докажите, что образ d ортогонален образу d^*.

Указание.

$$(d\eta, d^*\xi) = (d^2\eta, \xi).$$

[1] Это неравенство называется **неравенством Гординга** (Gårding).

Задача 4.18. Пусть η - дифференциальная форма. Докажите, что следующие условия равносильны

(i) $\Delta(\eta) = 0$

(ii) $d\eta = d^*\eta = 0$

Указание.

$$(\Delta\eta, \eta) = (dd^*\eta, \eta) + (d^*d\eta, \eta) = (d\eta, d\eta) + (d^*\eta, d^*\eta)$$

Задача 4.19. Докажите попарную ортогональность следующих подпространств $\Lambda^*(M)$:

$$\operatorname{im} d, \quad \operatorname{im} d^*, \quad \ker \Delta.$$

Задача 4.20 (!). Обозначим за $\Lambda^*_{\alpha_i}(M)$ собственное пространсво Лапласа, которое соответствует собственному значению α_i. Рассмотрим разложение $\Lambda^*(M) = \oplus \Lambda^*_{\alpha_i}(M)$. построенное выше. Докажите, что операторы d, d^* сохраняют это разложение.

Указание. Операторы d, d^* коммутируют с Δ.

Задача 4.21. Пусть α_i - ненулевое собственное значение Лапласа, а $\Lambda^*_{\alpha_i}(M)$ – соответствующее собственное пространство. Докажите, что

$$\Lambda^*_{\alpha_i}(M) = d\left(\Lambda^*_{\alpha_i}(M)\right) \oplus d^*\left(\Lambda^*_{\alpha_i}(M)\right)$$

Указание.

$$\eta = \alpha_i^{-1} dd^*\eta + \alpha_i^{-1} d^*d\eta$$

Замечание. Мы получили разложение такого вида

$$\Lambda^*(M) = \Lambda^*_0(M) \oplus \bigoplus_{\alpha_i \neq 0} d\left(\Lambda^*_{\alpha_i}(M)\right) \oplus \bigoplus_{\alpha_i \neq 0} d^*\left(\Lambda^*_{\alpha_i}(M)\right)$$

Задача 4.22 (!). Докажите, что имеет место следующее ортогональное разложение на пространстве гладких форм

$$\Lambda^*(M) = \Lambda^*_0(M) \oplus \operatorname{im} d \oplus \operatorname{im} d^*.$$

где $\Lambda^*_0(M)$ - пространство гармонических форм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.23. Пусть α_i - ненулевое собственное значение Лапласа. Рассмотрим комплекс

$$\Lambda^0_{\alpha_i}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1_{\alpha_i}(M) \xrightarrow{d} \ldots$$

Докажите, что он точен.

Указание. Воспользуйтесь формулой $Gd + dG = 1$, где G действует на $\Lambda^*_{\alpha_i}(M)$ как $\alpha^{-1}d^*$.

Задача 4.24 (!). Докажите, что когомологии d изоморфны пространству гармонических форм $\Lambda^*_0(M)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

4.4. Дзета-функция многообразия

Задача 4.25 (*). Пусть M - компактное риманово многообразие, размерности d. Обозначим за $C^0(M)$ пространство непрерывных функций, с топологией, заданной нормой $|f|_{C^0} = \sup_M |f|$.

а. Воспользовавшись леммой Соболева, докажите, что L^2_d-интегрируемые функции непрерывны.

б. Выведите из этого, что естественное отображение

$$L^2_d(M) \longrightarrow C^0(M)$$

непрерывно.

в. Пусть $m \in M$. δ-функция Дирака есть отображение из непрерывных функций в числа, переводящее f в $f(m)$. Докажите, что δ-функция непрерывна в L^2_d-топологии.

Задача 4.26 (*). Обозначим за $t := \left[\frac{d+1}{2}\right]$ целую часть $\frac{d+1}{2}$.

а. Пусть G_Δ - оператор Грина, $m \in M$ - любая точка. Докажите, что функция $L^2(M) \longrightarrow \mathbb{C}$, переводящая f в $(G_\Delta)^t f(m)$ непрерывна в L^2-топологии.

б. Пусть η_i - ортонормированный базис, диагинализующий лапласиан Δ, а α_i - соответствующие собственные значения. Докажите, что ряд

$$\sum_i \alpha^{-t}\eta_i(m)\eta_i$$

сходится, для любого $m \in M$

в. Выведите из этого, что ряд $\sum \alpha^t$ сходится.

Определение 4.6. Пусть $K: \ H \longrightarrow H$ - компактный, самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве, η_i базис, в котором K диагонализуется, α_i - соответствующие собственные значения. Компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве называется **ядерным**, если ряд $\sum \alpha_i$, составленный из его собственных значений, абсолютно сходится.

Задача 4.27 (*). В предположениях предыдущей задачи, докажите, что оператор $(G_\Delta)^t$ ядерный.

Определение 4.7. Пусть M - компактное риманово многообразие, η_i - ортонормированный базис в $C^\infty(M)$, диагонализующий лапласиан Δ, а α_i - все ненулевые собственные значения Δ (с кратностями). Определим **ζ-функцию многообразия** M формулой

$$\zeta_M(s) = \sum_i \alpha_i^{-\frac{s}{2}}.$$

Задача 4.28 (*). Докажите, что ζ-функция сходится для $\mathsf{Re}(s) > t$

Задача 4.29 (*). Докажите, что ζ-функция окружности равна ζ-функции Римана:

$$\zeta_{S^1}(s) = \sum_i \frac{1}{i^s}.$$