Теория Меры 1: Объемы многогранников

1.1. Кольца подмножеств и конечно-аддитивные меры

Определение 1.1. Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - некоторый набор подмножеств S. $\mathfrak{U}$ называется **кольцом**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $A \backslash B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. В этом случае $\mathfrak{U}$ называется **подкольцом** в 2^S.

Задача 1.1. Пусть S конечно. Опишите все подкольца в 2^S и найдите их число для $|S| = 5$ (множества из 5 элементов).

Определение 1.2. Характеристической функцией подмножества $U \subset S$ называется функция

$$\chi_U: \ S \longrightarrow \{0,1\} \ \mid \ \chi_U(x) = 1, \ \text{ если } \ x \in U \qquad\qquad \chi_U(x) = 0, \ \text{ если } \ x \notin U$$

Задача 1.2. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - набор подмножеств, а $R_{\mathfrak{U}} = \{\chi_U\}$ множество всех характеристических функций для всех $U \in \mathfrak{U}$. Рассмотрим $\{0,1\}$ как поле из двух элементов. Это задает естественную аддитивную и мультипликативную структуру на множестве всех отображений из S в $\{0,1\}$ (поточечное сложение и умножение). Докажите, что $R_{\mathfrak{U}}$ образует кольцо (возможно, без единицы) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{U}$ это кольцо.

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{V} \subset 2^S$ - произвольный набор подмножеств. Минимальное подкольцо в 2^S, содержащее $\mathfrak{V}$, называется **подкольцом, порожденным** $\mathfrak{V}$.

Задача 1.3 (*). Пусть в $\mathfrak{V} \subset 2^S$ N элементов. Какая максимальная мощность может быть у подкольца, порожденного $\mathfrak{V}$?

Задача 1.4 (*). Пусть $\mathfrak{U}_1 \subset 2^{S_1}$, $\mathfrak{U}_2 \subset 2^{S_2}$ кольца подмножеств. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{U} \subset 2^{S_1 \times S_2}$, порожденное всеми подмножествами вида $U_1 \times U_2$, $U_1 \in \mathfrak{U}_1, U_2 \in \mathfrak{U}_2$,. Докажите, что соответствующие кольца $R_{\mathfrak{U}_1}$, $R_{\mathfrak{U}_2}$, $R_{\mathfrak{U}}$ связаны как

$$R_{\mathfrak{U}_1} \otimes_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} R_{\mathfrak{U}_2} \cong R_{\mathfrak{U}}.$$

Определение 1.4. Пусть задано подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$. **Выпуклой оболочкой** S называется наименьшее выпуклое подмножество, содержащее S.

Задача 1.5 (!). Докажите, что выпуклая оболочка S это множество всех векторов вида $\sum \alpha_i s_i$, где $\{s_i\}$ это конечный набор точек из S, а α_i вещественные числа, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum \alpha_i = 1$.

Определение 1.5. **Замкнутым симплексом** в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка множества $\{x_0, ... x_n\}$ из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Такой симплекс называется **натянутым на точки** $x_0, ... x_n$. **Симплексом** называется выпуклое множество, замыкание которого есть замкнутый симплекс.

Задача 1.6. Опишите все симплексы в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Определение 1.6. Пусть $\Delta(x_0, ... x_n)$ - симплекс, натянутый на точки $\{x_0, ... x_n\}$. **Гранью** Δ размерности k называется выпуклая оболочка $k+1$ точек из $\{x_0, ... x_n\}$.

Задача 1.7. Ребра (одномерные грани) n-мерного симплекса $\Delta(x_0, ... x_n)$ образуют граф. Предположим, что все x_i попарно различны. Сколько ребер в этом графе? Изобразите его. Сколько разных k-мерных граней есть у $\Delta(x_0, ... x_n)$?

Определение 1.7. Кольцо полиэдров (многогранников) есть кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^n$, порожденное замкнутыми симплексами. Многогранником называется элемент этого кольца.

Задача 1.8. Докажите, что каждый многогранник можно представить в виде конечного объединения непересекающихся симплексов.

Задача 1.9 (*). Докажите, что каждый выпуклый многогранник можно представить в виде конечного пересечения симплексов.

Определение 1.8. Два многогранника A, B называются **равносоставленными**, если их можно разрезать на симплексы $A_1, ...A_k$, $B_1, ...B_k$ таким образом, что замыкание A_i конгруэнтно замыканию B_i для любого i.

Задача 1.10. Докажите, что равносоставленность это соотношение эквивалентности

Задача 1.11. Докажите, что любой треугольник A равносоставлен паралеллограмму с таким же основанием и высотой в половину высоты A.

Задача 1.12. Докажите, что любой паралеллограмм равносоставлен прямоугольнику с таким же основанием и же высотой

Задача 1.13. (*) Докажите, что прямоугольник со сторонами a и b и прямоугольник со сторонами c и d равносоставлены, при условии $ab = cd$.

Определение 1.9. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ кольцо подмножеств. Отображение $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **конечно аддитивной мерой**, или же **аддитивной функцией множества**, или **валюацией**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Валюация называется **неотрицательной**, если она принимает неотрицательные значения. Очевидно, валюации образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Задача 1.14. Пусть S это отрезок $[0, 1]$, а $\mathfrak{U}$ множество конечных объединений отрезков и интервалов. Докажите, что $\mathfrak{U}$ это кольцо. Докажите, что отображение $\coprod_i A_i \longrightarrow \sum |A_i|$ (несвязное объединение отрезков переводится в сумму их длин) это неотрицательная конечно-аддитивная мера.

Задача 1.15 (!). Пусть $\mathfrak{U} = 2^S$, где S это конечное множество. Обозначим за L линейное пространство всех конечно-аддитивных мер на $\mathfrak{U}$. Найдите размерность L над $\mathbb{R}$.

Задача 1.16. Пусть дан $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\mathbb{R} \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$,[1] множество S и кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$. Докажите, что для любой конечно-аддитивной меры $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, композиция $\mu \circ \xi$ это опять конечно-аддитивная мера.

Задача 1.17. Пусть задана точка $x \in S$, кольцо подмножеств $\mathfrak{U} \subset 2^S$, и функция $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающая значения $\mu(U) = 1$ для $x \in U$ и $\mu(U) = 0$ для $x \notin U$. Докажите, что это конечно-аддитивная мера.

Замечание. Напомним, что движением в $\mathbb{R}^n$ (или любом другом метрическом пространстве) называется любая изометрическая биекция. Два подмножества называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением.

[1] Здесь $\mathbb{R}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

Определение 1.10. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ некоторое кольцо множеств. Конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **инвариантной**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 1.18. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ кольцо многогранников, и пусть $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ инвариантная неотрицательная конечно-аддитивная мера.

а. **Вырожденный симплекс**, это симплекс, лежащий внутри какой-то гиперплоскости. Докажите, что симплекс $\Delta(x_0, x_1, ...x_n)$ вырожденный тогда и только тогда, когда вектора $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0$ линейно зависимы.

б. Докажите, что $\mu(I) = 0$, где I это вырожденный симплекс.

в. Докажите, что $\mu(A) = \mu(\bar{A})$, где A многогранник, а $\bar{A}$ - его замыкание.

г. Докажите, что $\mu(A) = \mu(B)$, если A и B равносоставлены.

Задача 1.19 (*). Верны ли утверждения предыдущей задачи без предположения о неотрицательности μ?

1.2. Объем

Определение 1.11. Пусть V n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$. Рассмотрим одномерное векторное пространство $\Lambda^n(V)$ анти-симметричных форм старшей степени. Это пространство также называется **пространством форм объема**.

Зафиксируем ненулевой вектор $\nu \in \Lambda^n(V)$.

Если в V задан симплекс $\Delta = \Delta(x_0, ...x_n)$, **объемом** Δ называется неотрицательное вещественное число

$$\int_\Delta \nu := |\nu(x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0)|.$$

Задача 1.20. (!) В этих условиях, докажите, что

а. $\int_\Delta \nu > 0$ тогда и только тогда, когда Δ невырожден

б.
$$\int_{\Delta(x_0, ...x_n)} \nu = \int_{\Delta(x_{\sigma_0}, ...x_{\sigma_n})} \nu,$$
где $(x_0, ...x_n) \longrightarrow (x_{\sigma_0}, ...x_{\sigma_n})$ произвольная перестановка

в. Если симплексы Δ и Δ' конгруэнтны, то $\int_\Delta \nu = \int_{\Delta'} \nu$

г. Если симплекс Δ представлен в виде объединения непересекающихся симплексов $\Delta = \Delta_1 \coprod \Delta_2$, то
$$\int_\Delta \nu = \int_{\Delta_1} \nu + \int_{\Delta_2} \nu.$$

Указание. Все эти свойства формально вытекают из известных свойств определителя

Задача 1.21. Пусть симплекс Δ представлен в виде объединения непересекающихся симплексов $\Delta = \coprod_i \Delta_i$. Докажите, что

$$\int_\Delta \nu = \sum \int_{\Delta_i} \nu.$$

Указание. Это свойство формально следует из свойств объема, перечисленных в задаче 1.20.

Задача 1.22 (*). Докажите, что свойства объема, перечисленные в задаче 1.20, задают отображение $\Delta \longrightarrow \int_\Delta \nu$ единственным образом, с точностью до постоянного положительного множителя.

Задача 1.23 (!). Пусть задан многогранник $C \subset V$, и $C = \coprod A_i = \coprod B_i$ его разбиение на непересекающиеся симплексы. Докажите, что

$$\sum \int_{A_i} \nu = \sum \int_{B_i} \nu.$$

Это число называется **объемом многогранника** C, и обозначается $\int_C \nu$. Докажите, что эта функция задает неотрицательную, инвариантную конечно-аддитивную меру на кольце многогранников.

Задача 1.24 (!). Пусть V евклидово векторное пространство, а C единичный куб (куб с ребром 1).[2] Докажите, что существует единственная инвариантная неотрицательная конечно-аддитивная мера μ на кольце многогранников, такая, что $\mu(C) = 1$. Запишите ее явно.

Определение 1.12. Эта конечно-аддитивная мера называется **евклидов объем многогранника**.

1.3. Третья проблема Гильберта

Определение 1.13. Два многогранника называются **равновеликими**, если они имеют одинаковый объем. Легко видеть, что равносоставленные многогранники равновелики.

Третья проблема Гильберта формулируется так

Гаусс в двух своих письмах к Герлингу выражает сожаление по поводу того, что некоторые известные положения стереометрии зависят от метода исчерпывания, т.е., говоря современным языком, от аксиомы непрерывности (или от аксиомы Архимеда).

Гаусс специально отмечает теорему Евклида, согласно которой объемы треугольных пирамид, имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований. Аналогичная задача планиметрии ныне полностью решена. Герлингу удалось также доказать равенство объемов симметричных многогранников при помощи разбиения их на конгруэнтные части.

Тем не менее, как мне кажется, в общем случае доказательство упомянутой теоремы Евклида этим способом провести невозможно и это, по-видимому, может быть подтверждено строгим доказательством невозможности.

Такое доказательство можно было бы получить, если бы удалось указать такие два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые никаким способом не могут быть разложены на конгруэнтные тетраэдры и которые также не могут быть дополнены конгруэнтными тетраэдрами до таких многогранников, для которыхй разложение на конгруэнтные тетраэдры невозможно.

(цитируется по книге В. Г. Болтянского "Третья проблема Гильберта", издательство "Наука", Москва, 1977)

[2] Куб можно определить, например, следующим образом. Выберем ортонормальный базис $\{\xi_1, ...\xi_n\}$ в V. Рассмотрим множество линейных комбинаций вида $\sum \alpha_i \xi_i$, где $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Это множество называется **единичный куб** в V.

Немного упростив, это же самое можно изложить так

Третья проблема Гильберта Постройте два равновеликих многогранника, которые не равносоставлены.

Задача 1.25 (*). Пусть A и B равновеликие многогранники на плоскости (многогранники на плоскости называются **многоугольники**, или **полигоны**). Докажите, что они равносоставлены.

Замечание. Это утверждение называется **теорема Бойяи-Гервина**.

Замечание. Предположим, что существует конечно-аддитивная мера $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ на кольце многогранников, такая, что $\mu(A) \neq \mu(B)$, а A и B равновелики. Тогда A и B не равносоставлены.

Задача 1.26. (!) Выведите из теоремы Бойяи-Гервина следующее утверждение. Пусть задана конечно-аддитивная мера $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\mathfrak{U}$ - кольцо многоугольников (многогранников в $\mathbb{R}^2$). Докажите, что $\mu = \mathrm{Vol} \circ \xi$, где $\mathrm{Vol} : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ конечно-аддитивная мера, заданная объемом, а $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм абелевых групп.

Задача 1.27 (*). Постройте нетривиальный (не $\mathbb{R}$-линейный) $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Используйте аксиому выбора.

Задача 1.28. Докажите, что такой гомоморфизм обязательно переводит некоторые положительные числа в отрицательные.

Определение 1.14. Пусть задан $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм, переводящий π в 0, а C - многогранник в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ...d_n$ и прилежащими им двугранными углами, выраженными (в радианах) как $\alpha_1, ...\alpha_n$. Инвариант Дена $D_\phi(C)$ записывается как

$$D_\phi(C) := \sum_{i=1}^{n} d_i \phi(\alpha_i).$$

Задача 1.29. (!) Докажите, что пространство $\mathbb{Q}$-линейных гомоморфизмов, переводящих π в 0, отождествляется с тензорным произведением $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi)^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Определение 1.15. Это множество наделяется структурой векторного пространства над $\mathbb{R}$:

$$\lambda(\phi)(c) = \lambda\phi(c).$$

Оно называется **пространством инвариантов Дена**.

Задача 1.30. (*) Докажите, что пространство инвариантов Дена бесконечномерно над $\mathbb{R}$. Докажите, что для любого числа $\lambda \in R$ существует гомоморфизм $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, такой, что $\phi(\lambda) \neq 0$, при условии, что λ/π иррационально. Воспользуйтесь аксиомой выбора.

Задача 1.31. (!) Пусть симплекс Δ представлен в виде объединения непересекающихся симплексов $\Delta = \coprod_i \Delta_i$. Докажите, что

$$D_\phi(\Delta) = \sum_i D_\phi(\Delta_i)$$

Задача 1.32 (*). Выведите из этого, что инвариант Дена D_ϕ является конечно-аддитивной мерой на пространстве многогранников в $\mathbb{R}^3$.

Задача 1.33. Рассмотрим правильный тетраэдр. Докажите, что его двугранные углы равны $\arccos(1/3)$.

Задача 1.34. Пусть $\cos(\pi\alpha) = 1/n$, а α рационально. Выведите из этого, что

$$e^{\sqrt{-1}\pi k\alpha} = \left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1.$$

для какого-то целого $k > 0$.

Задача 1.35 (*). Пусть $n = 3$, а $\left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1$. Докажите, что $k = 0$.

Указание. Докажите однозначность разложения на множители в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ и воспользуйтесь ею.

Задача 1.36 (*). Обозначим за α двугранный угол правильного тетраэдра. Докажите, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально.

Задача 1.37 (*). Найдите такое ϕ в пространстве инвариантов Дена $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}\pi)^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, что $\phi(\alpha) \neq 0$, где α - двугранный угол правильного тетраэдра.

Задача 1.38 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $D_\phi(\Delta) \neq 0$, где Δ есть правильный тетраэдр.

Задача 1.39. Докажите, что $D_\phi(C) = 0$ для любого параллелепипеда.

Задача 1.40 (*). Докажите, что равновеликие правильный тетраэдр и правильный куб не равносоставлены.

Задача 1.41 (**). (теорема Дена-Сидлера) Пусть два многогранника A и B в $\mathbb{R}^3$ равновелики, и $D_\phi(A) = D_\phi(B)$ для любого инварианта Дена. Докажите, что A иB равносоставлены.