Теория Меры 5: Мера на гладких многообразиях

5.1. Мера Лебега и дифференциальные формы

Замечание. Пусть M, N - открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $\phi: M \longrightarrow N$ - гладкое отображение. Дифференциал $D\phi: T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N$ лежит в пространстве $\mathrm{Hom}(T_xM, T_{\phi(x)}N)$. Пользуясь евклидовой метрикой на $T_xM, T_{\phi(x)}N$, можно определить метрику на $\mathrm{Hom}(T_xM, T_{\phi(x)}N)$ (тензорное произведение пространств с метрикой наделено естественной метрикой). Аналогичным образом определяется метрика на $\mathrm{Hom}(T_{\phi(x)}N, T_xM)$ и других подобных пространствах.

Задача 5.1. Зафиксируем константу C. Пусть задано гладкое отображение $\phi: M \longrightarrow N$ открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$, причем дифференциал $D\phi: T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N$ удовлетворяет $|D\phi| < C$ по отношению к естественной евклидовой метрике $|\cdot|$ на пространстве $\mathrm{Hom}(T_xM, T_{\phi(x)}N)$. Докажите, что $Cd(x,y) \geq d(\phi(x), \phi(y))$, где d есть естественная (евклидова) метрическая структура на $\mathbb{R}^n$.

Задача 5.2 (*). В условиях предыдущей задачи, обозначим за μ меру Лебега, и пусть μ^* соответствующая внешняя мера. Докажите, что $\mu^*(\phi(A)) \leq C^n\mu(A)$, для любого измеримого множества A.

Задача 5.3 (!). В условиях задачи **??**, предположим, что ϕ биективно, и $D\phi$ всюду невырожден. Докажите, что ϕ^{-1} измеримо, и, более того, $\phi_*^{-1}\mu \leq C^n\mu$.

Задача 5.4. Из предыдущей задачи следует, что $\phi_*^{-1}\mu$ абсолютно непрерывно относительно μ. По теореме Радона-Никодима, $\phi_*^{-1}\mu = f\mu$, где f измеримая функция. Найти f для обратимого линейного отображения $\phi \in GL(n, \mathbb{R})$.

Задача 5.5. Пусть задано гладкое биективное отображение $\phi: M \longrightarrow N$ открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Пользуясь линейной структурой на M и N, отождествим касательные пространства $T_xM, T_{\phi(x)}N$. Обозначим тождественное отображение $\mathsf{Id} \in \mathrm{Hom}(T_xM, T_{\phi(x)}N)$ за $\mathbb{I}$. Предположим, что $|D\phi - \mathbb{I}| < \epsilon$ (т.е. $D\phi$ близок к тождественному).

а. Докажите, что $|D\phi| < 1 + \epsilon$ и $|D\phi^{-1}| < \frac{1}{1-\epsilon}$.

б. Докажите, что
$$\frac{1}{(1-\epsilon)^n}\mu \leq \phi_*^{-1}\mu \leq (1+\epsilon)^n\mu$$

в. Пользуясь Задачей **??** и теоремой Радона-Никодима, запишем $\phi_*^{-1}\mu = f\mu$, где f - измеримая функция. Докажите, что вне множества меры нуль
$$\frac{1}{(1-\epsilon)^n} \leq f \leq (1+\epsilon)^n.$$

Задача 5.6 (!). Пусть задано гладкое биективное отображение $\phi: M \longrightarrow N$ открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Пользуясь линейной структурой на M и N, отождествим касательные пространства $T_xM, T_{\phi(x)}N$. По теореме Радона-Никодима, запишем $\phi_*^{-1}\mu = f\mu$, где f - измеримая функция. Докажите, что вне множества меры нуль, $f = \det(D\phi)$.

Задача 5.7. В условиях предыдущей задачи, обозначим за Vol_N единичное сечение детерминантного расслоения. Другими словами, Vol_N есть дифференциальная n-форма на N, которая в естественных координатах $x_1, ...x_n$ на $N \subset \mathbb{R}^n$ записывается в виде $dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n$. Докажите, что $\phi_*^{-1}\mu = \phi^*\mu$, где $\phi^*\mu$ есть обратный образ дифференциальной формы.

Задача 5.8. Пусть (N, ω) - n-многообразие с заданной на нем n-формой ω, а $\phi: \quad M \longrightarrow N$ обратимая гладкая биекция из открытого подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ в N. Обозначим единичную дифференциальную форму на M за $\det_M$. Запишем $\phi^*(\omega)$ в виде $f \det_M$.

а. Докажите, что $f(x) = \det(D\phi\big|_x)$.

б. Рассмотрим меру $|f|\phi_*\mu$ на N. Докажите, что эта мера не зависит от выбора отображения ϕ.

Определение 5.1. Пусть (N, ω) - ориентированное n-многообразие с заданной на нем положительной n-формой ω, $\phi_i: \quad U_i \longrightarrow N$ некоторый атлас, где U_i реализованы как открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $u_i: \quad N \longrightarrow \mathbb{R}$ соответствующее этому атласу разбиение единицы. Запишем обратный образ формы $u_i\omega$ в виде $f_i \det_{U_i} = \phi_i^*(u_i\omega)$. Определим меру μ_ω на N таком образом:

$$\mu_\omega = \sum_i |f_i|\phi_*\mu$$

Эта мера называется **мерой, связанной с формой** ω**.** Расслоение $\Lambda^n(M)$ n-форм на n-многообразии называется **расслоением форм объема**.

Задача 5.9 (*). Пусть (N, ω) - n-многообразие с заданной на нем n-формой ω. Докажите, что мера μ_ω корректно определена и не зависит от выбора разбиения единицы и атласа на N.

5.2. Производная Ли

Задача 5.10. Пусть M ориентируемое многообразие, а $\omega \in \Lambda^n(M)$ форма объема (не обязательно положительная и невырожденная). Представим ω в виде $\omega = \omega_1 - \omega_2$, где ω_1 и ω_2 положительные и невырожденные формы. Докажите, что заряд

$$\mu_\omega := \mu_{\omega_1} - \mu_{\omega_2}$$

не зависит от выбора ω_1, ω_2.

Определение 5.2. В такой ситуации $\int_M \mu_\omega$ обозначается как $\int_M \omega$ и называется **интегралом дифференциальной формы** ω **по многообразию** M

Задача 5.11. Пусть $\phi: \quad \longrightarrow M$ - диффеоморфизм многообразия M. Докажите, что $\int_M \omega = \int_M \phi^*\omega$ для любой формы объема ω.

Определение 5.3. Пусть ϕ_t - однопараметрическое семейство диффеоморфизмов многообразия M, такое, что $\frac{d\phi_t}{dt}\big|_{t=0} = \vec{X}$, где $\vec{X}$ - векторное поле. Производная Ли дифференциальной формы ν вдоль векторного поля $\vec{X}$ определяется так:

$$\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \nu := \frac{d\phi_t}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^*\nu.$$

Задача 5.12. Докажите, что производная Ли $\mathrm{Lie}_{\vec{X}} f$ функции (рассмотренной как 0-форма) равна ее производной вдоль $\vec{X}$.

Задача 5.13. Докажите, что производная Ли удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\mathrm{Lie}_{\vec{X}}(\nu \wedge \eta) = \mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \nu \wedge \eta + \nu \wedge \mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \eta$$

Задача 5.14. Докажите, что производная Ли коммутирует с дифференциалом де Рама:

$$\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, d\eta = d(\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \eta).$$

Задача 5.15 (!). Докажите, что производную Ли можно записать так

$$\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \nu = d\nu \lrcorner \vec{X} - d(\nu \lrcorner \vec{X}), \tag{1}$$

где $\eta \lrcorner \vec{X}$ это подстановка в η векторного поля $\vec{X}$.

Указание. Воспользовавшись правилом Лейбница, докажите, что формулу (**??**) достаточно проверить для функций и замкнутых 1-форм (это следует из того, что обе части уравнения (**??**) удовлетворяют правилу Лейбница). Из леммы Пуанкаре и тождества $\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, d\eta = d(\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\, \eta)$ выведите, что достаточно проверять для функций. Для функций воспользуйтесь определением дифференциала де Рама.

Замечание. Из этой задачи следует, что производная Ли не зависит от выбора однопараметрического потока диффеоморфизмов ϕ_t.

Задача 5.16 (!). Пусть M компактное n-многообразие

а. Докажите, что $\int d(\omega \lrcorner \vec{X}) = 0$ для любой формы объема ω и любого векторного поля $\vec{X}$.

б. Докажите, что $\int d\eta = 0$ для любой $n-1$-формы η.

5.3. Гладкие меры

Определение 5.4. Пусть M есть ориентируемое многообразие с мерой μ_ω, определенной как выше, исходя из нигде невырожденной гладкой формы объема ω. Такая мера называется **мерой Лебега на многообразии**. L_1-топология на интегрируемых функциях задается посредством нормы $|f|_1 \longrightarrow \int_M |f|\mu$.

Задача 5.17. Пусть M - компактное многообразие с мерой μ_ω. Докажите, что гладкие функции на интегрируемы. Докажите, что L_1-топология на пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций не зависит от выбора формы объема ω.

Задача 5.18 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что гладкие функции плотны в пространстве $L_1(M)$ интегрируемых функций на M с L_1-топологией.

Задача 5.19 (*). Пусть задан линейный функционал ν на пространстве ограниченных ступенчатых интегрируемых функций. Докажите, что ν непрерывен в L_1-топологии тогда и только тогда, когде ν получается из заряда μ на M как $\nu(f) = \int_M f\mu$.

Задача 5.20 (*). Пусть M гладкое компактное многообразие, а $(C^\infty(M), L_1)$ пространство гладких функций на с L^1-топологией. Докажите, что пространство зарядов на M это $(C^\infty(M), L_1)^*$

Определение 5.5. Заряд μ на гладком многообразии M называется **C^1-гладким**, если для любого векторного поля $\vec{X} \in TM$, функционал

$$f \longrightarrow \int \vec{X}(f)\mu$$

заданный на гладких функциях с компактным носителем, непрерывен в L_1-топологии. В этой ситуации

$$f \longrightarrow \int \vec{X}(f)\mu$$

это опять заряд, как показывает предыдущая задача. Заряд называется C^k-гладким, если для любого векторного поля $\vec{X} \in TM$, заряд

$$f \longrightarrow \int \vec{X}(f)\mu$$

C^k-гладкий. Заряд называется C^∞-гладким, если он C^k-гладкий, для любого k.

Задача 5.21 (!). Пусть задана гладкая положительная форма объема ω на компактном многообрзии M. Докажите, что форма μ_ω гладкая.

Указание. Докажите, что

$$\int \vec{X}(f)\mu_\omega = -\int f\mu_{\mathrm{Lie}_{\vec{X}}\,\omega}.$$

Задача 5.22 (**). Пусть задана гладкая мера μ на ориентируемом многообразии. Докажите, что $\mu = \mu_\omega$ для какой-то неотрицательной формы ω.