Теория Меры 7: Мера Хаара на локально компактных группах

7.1. Топологические группы

Определение 7.1. Пусть G хаусдорфово топологическое пространство, снабженное структурой группы. G называется **топологической группой**, если отображение

$$G \stackrel{g \mapsto g^{-1}}{\longrightarrow} G$$

непрерывно, и отображение

$$G \times G \stackrel{f, g \mapsto fg}{\longrightarrow} G$$

тоже непрерывно.

Задача 7.1. В этой ситуации, докажите, что отображение

$$G \stackrel{g \mapsto g^{-1}}{\longrightarrow} G$$

это гомеоморфизм. Докажите, что отображение

$$G \times G \stackrel{f, g \mapsto f, fg}{\longrightarrow} G \times G$$

это гомеоморфизм.

Задача 7.2. Пусть G топологическое пространство, снабженное структурой группы, таким образом, что

$$G \times G \stackrel{f, g \mapsto f, fg}{\longrightarrow} G \times G$$

это гомеоморфизм. Докажите, что G - топологическая группа.

Задача 7.3. Докажите, что $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(1 + p\mathbb{Z}_p, *)$ компактные топологические группы ($\mathbb{Z}_p$ обозначает p-адические числа)

Задача 7.4. Рассмотрим группу обратимых матриц $GL(n, \mathbb{R})$, группу ортогональных матриц $O(n)$, группу $SL(n)$ матриц с детерминантом 1, с топологией, индуцированной из вложение в пространство матриц. Докажите, что это локально компактые топологические группы.

Задача 7.5. Рассмотрим группу $GL(n, \mathbb{Q}_p)$ с топологией, индуцированной из вложения

$$GL(n, \mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p^{n^2}.$$

Докажите, что это локально компактная топологическая группа.

Задача 7.6 (*). Пусть $G_1 \subset G_2$ замкнутая нормальная подгруппа локально компактной топологической группы. Введем на факторгруппе G_1/G_2 топологию таким образом, что $U \subset G_1/G_2$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз ц G_1 открыт. Докажите, что G_1/G_2 - локально компактная топологическая группа.

Задача 7.7 (!). Постройте нетривиальный непрерывный гомоморфизм $\mathbb{Z}_p \longrightarrow S^1$, либо докажите, что такого не существует.

7.2. Мера Хаара

Определение 7.2. Пусть $(M, \mu), (N, \nu)$ - пространства с мерой. **Морфизмом** пространств с мерой называется измеримое отображение $\phi: M \longrightarrow N$ такое, что $\phi_* \mu = \nu$. **Изоморфизмом** пространств с мерой называется такой морфизм $\phi: M \longrightarrow N$, что существует морфизм $\psi: N \longrightarrow M$, причем $\psi \circ \phi$ и $\phi \circ \psi$ тождественные.

Задача 7.8. Докажите, что композиция изоморфизмов - опять изоморфизм.

Задача 7.9 (*). Постройте изоморфизм отрезка с мерой Лебега и квадрата.

Задача 7.10 (*). Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана мера $\nu = f\mu$, где f гладкая функция, принимающая значения в $[\epsilon, \infty[$, $\epsilon > 0$, а μ - мера Лебега. Постройте изоморфизм $(\mathbb{R}^n, \nu)$ и $(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Задача 7.11. Решите приведенную выше задачу в случае $n = 1$.

Определение 7.3. Пусть группа G действует на пространстве (M, μ) с мерой. Мы говорим, что μ **G-инвариантна**, если для любого $g \in G$, отображение $m \longrightarrow g(m)$ задает изоморфизм из (M, μ) в себя.

Определение 7.4. Мера μ называется **локально конечной**, если у каждой точки есть окрестность U, которая удовлетворяет $mu(U) < \infty$.

Пусть G это группа. **Левое действие группы на себе** задается формулой $g, x \longrightarrow gx$, **правое действие** - $g, x \longrightarrow xg$. **(Левая) мера Хаара** это ненулевая, локально конечная мера Бореля на G, инвариантная относительно левого действия группы, и положительная на каждом непустом открытом множестве. Правая мера Хаара - мера, инвариантная относительно правого действия.

Задача 7.12. Пусть G компактная топологическая группа, а μ мера Хаара. Докажите, что $\mu(G)$ конечно.

Задача 7.13 (!). Пусть G топологическая группа, а μ, ν меры Хаара, такие, что $\mu(G) < \infty$, $\nu(G) < \infty$.

а. Докажите, что $\nu \ll \mu + \nu$.

б. Воспользовавшись теоремой Радона-Никодима, докажите, что $\nu = f(\mu + \nu)$, где $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ измерима.

в. Докажите, что f постоянна вне $\mu + \nu$-пренебрежимого множества.

г. Выведите из этого, что $\nu = c\mu$, для какой-то константы c.

Определение 7.5. Напомним, что подмножество $V \subset M$ хаусдорфова топологического пространства называется **ограниченным**, или **предкомпактным**, если V содержится в компактном множестве.

Задача 7.14. Докажите, что $V \subset M$ предкомпактно тогда и только тогда, когда замыкание V компактно.

Задача 7.15. Пусть $U \subset G$ предкомпактное открытое подмножество топологической группы. Докажите, что для любой меры Хаара, $\mu(U) < \infty$

Задача 7.16 (*). Пусть E - борелевское множество в локально компактной, хаусдорфовой группе G, со счетной базой, а μ - мера Хаара на G. Обозначим за E^{-1} множество элементов вида g^{-1}, $g \in E$. Докажите, что E имеет меру нуль тогда и только тогда, когда E^{-1} имеет меру нуль.

Задача 7.17 (!). Пусть G - локально компактная топологическая группа со счетной базой, μ, ν меры Хаара, а U предкомпактная окрестность единицы.

а. Докажите, что существует измеримая функция $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ такая, что $\nu = f(\mu + \nu)$.

б. Докажите, что вне $\mu + \nu$-пренебрежимого подмножества U, f равна константе: $f = c$.

в. Выведите из этого, что
$$\nu\big|_U = c\mu\big|_U, \tag{1}$$
для какой-то константы $c \in \mathbb{R}$, и для любой предкомпактной окрестности единицы в G.

г. Воспользовавшись наличием счетной базы, выведите из (??) равенство $\nu(A) = c\mu(A)$ для любого борелевского A.

Указание. (к последнему пункту): воспользовавшись наличием счетной базы, докажите, что каждое борелевское подмножество G есть объединение счетного числа компактов.

Замечание. Мы доказали, что на локально компактной топологической группе со счетной базой мера Хаара единственна, с точностью до константы.

Задача 7.18 (!). Пусть G коммутативная локально компактная топологическая группа со счетной базой. Докажите, что левая мера Хаара на G равна правой.

Задача 7.19 (**). Приведите пример, когда левая мера Хаара на группе не пропорциональна правой.

7.3. Построение меры Хаара

Замечание. Как следует из результатов листка 6, чтобы сконструировать меру Хаара на локально компактной топологической группе G, достаточно сконструировать левоинвариантный объем $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ на компактных подмножествах G.

Определение 7.6. Пусть $E \subset G$ предкомпактное подмножество, $F \subset G$ подмножество с непустой внутренностью. F-сеть на E это такой конечный набор точек $\{x_i\} \subset G$ (называемых узлами F-сети), что $\bigcup x_i F$ покрывает E. Минимальное число узлов в F-сети обозначается $E : F$.

Задача 7.20. Докажите, что в этих условиях F-сеть всегда существует.

Задача 7.21. Пусть A предкомпактное и с непустой внутренностью. Докажите, что $(E : A)(A : F) \geq E : F$.

Задача 7.22. Зафиксируем предкомпактное подмножество $A \subset G$ с непустой внутренностью. Для заданного открытого подмножества $U \subset G$, определим функцию $\lambda_U : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ на множестве всех компактов $C \subset G$,
$$\lambda_U(C) := \frac{C : U}{A : U}.$$

Докажите, что эта функция счетно-полуаддитивна, левоинвариантна, и для любых C, D, таких, что $CU^{-1} \cap DU^{-1} = \emptyset$, имеем

$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D)$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что для каждого x такого, что C пересекает xU, D не пересекает xU.

Задача 7.23 (*). В условиях предыдущей задачи, рассмотрим произведение $\mathcal{K} := \prod_{C\in\mathbf{C}} I_C$ отрезков $I_C := [0, C : A]$, проиндексированное всеми компактными множествами $C \in \mathbf{C}$, с топологией тихоновского произведения. Можно рассматривать $\mathcal{K}$ как пространство функций $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, принимающих значения в $[0, C : A]$, с топологией поточечной сходимости. Это пространство компактно, по теореме Тихонова.

Обозначим за Δ_U множество всех $\lambda_V \in \mathcal{K}$ таких, что $V \subset U$.

а. Докажите, что $\bigcap \Delta_{U_i} = \Delta_{\cap U_i}$, где пересечение берется по конечному набору окрестностей единицы $U_i \subset G$. Докажите, что это множество непусто.

б. Обозначим за $\overline{\Delta_U}$ замыкание Δ_U в $\mathcal{C}$. Это множество компактно, по по теореме Тихонова. Докажите, что $\bigcap_U \overline{\Delta_U}$ непусто, где пересечение берется по всем открытым окрестностям единицы в G.

в. Пусть $\lambda : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ лежит в $\bigcap_U \overline{\Delta_U}$. Докажите, что λ - ненулевой, левоинвариантный объем на $\mathbf{C}$

Указание. Проверьте, что левоинвариантность, монотонность и полуаддитивность это замкнутые условия в $\mathcal{K}$. Выведите из этого, что им удовлетворяют все $f \in \overline{\Delta_U}$. Чтобы доказать, что λ это объем, надо проверить аддитивность. Из локальной компактности выведите, что для любых непересекающихся компактов C и D существует окрестность U единицы в G такая, что CU^{-1} не пересекается с DU^{-1}. Условие $f(C \coprod D) = f(C) + f(D)$ замкнутое, и ему в силу задачи **??** удовлетворяют все $f \in \Delta_U$. Выведите из этого, что λ тоже удовлетворяет этому условию.

Задача 7.24. Пусть μ - мера Хаара на локально компактной топологической группе G. Докажите, что $\mu(e) \neq 0$ тогда и только тогда, когда G дискретна.

Задача 7.25. Рассмотрим мультипликативную группу $\mathbb{R}^{>0}$ как локально компактную топологическую группу. Докажите, что мера Хаара λ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ на $\mathbb{R}^{>0}$. Выведите из этого соотношение $\lambda = f\mu$ и найдите функцию f.

Задача 7.26. Решите такую же задачу для мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел.

Задача 7.27 (*). Рассмотрим группу $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ с топологией и мерой Лебега μ, индуцированной из $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Докажите, что мера Хаара λ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $GL(n, \mathbb{R})$. Выведите из этого соотношение $\lambda = f\mu$ и найдите функцию f.

Задача 7.28 (*). То же самое для $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$.