# 1 Лекция 1.

Пусть $V$, $W$ – конечномерные векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Грубо говоря, анализ многих переменных изучает отображения $f : V \to W$ – или, иными словами, $W$-значные функции на $V$. Такие отображения могут появляться из других областей математики, из физики и т.д. Однако произвольное отображение может быть устроено невероятно сложно; поэтому первая задача – выделить класс отображений, которые ведут себя "достаточно хорошо". При этом класс этот должен быть достаточно большим, чтобы включать в себя все "естественные" примеры.

Анализ отличается от других дисциплин тем, что функции в нем изучаются локально – требуется, чтобы функция $f$ "вблизи" каждой точки $x \in V$ близка к "хорошей". Требуется понять, что такое "вблизи" и что такое "хорошая функция".

Исторически, "анализ" это сокращение от "анализ бесконечно малых" – что происходит с функцией при малом изменении параметра. Сейчас про бесконечно малые предпочитают не говорить, но какой-то способ отличать "малые" изменения параметра нужен. Поэтому предполагают, что на $V$ и на $W$ заданы евклидовы метрики, так что оба становятся метрическими пространствами. Теперь можно, например, выбрать вещественное число $\varepsilon > 0$, и сказать, что близкие точки $V$ – это точки, расстояние между которыми меньше $\varepsilon$.

Какие же функции на $V$ признать "хорошими"? Самые хорошие функции это конечно постоянные. Функция, близкая к постоянной возле каждой точки $x \in V$ – это непрерывная функция (напомним определение: $f : V \to W$ непрерывна в точке $x \in V$, если $f(x) = \lim_{v\to 0} f(x + v)$, что в свою очередь значит "для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\|v\| < \delta$ следует $\|f(x + v) - f(x)\| < \varepsilon$"). Однако непрерывные функции тоже могут быть устроены слишком сложно – например, существует непрерывное сюръективное отображение из отрезка в квадрат (кривая Пеано). Требуется более тонкое условие: функция должа быть близка к хорошей в более сильном смысле. Чтобы такое условие было применимо на практике, надо расширить класс хороших функций – кроме констант, "хорошими" объявлают линейные отображения $P : V \to W$.

**Определение 1.1.** Говорят, что функция $f : V \to W$ *дифференцируема в точке* $x \in V$, если для некоторого линейного отображения $P : V \to W$ верно следующее: для любой константы $C > 0$ есть такое $\delta > 0$, что

$$\|f(x + v) - f(x) - P(v)\| < C\|v\| \tag{1.1}$$

при $\|v\| < \delta$.

**Замечание 1.2.** В этом определении на самом деле не требуется, чтобы $f$ была определена на всем $V$; на практике, часто рассматривают функции, определенные только на каком-то открытом множестве $U \subset V$.

**Замечание 1.3.** Определение требует введения евклидовых метрик на $V$ и $W$, но *не зависит от этого выбора*: действительно, если даны две метрики $\| - \|_1$, $\| - \|_2$, то существуют такие константы $C_2 > C_1 > 0$, что $C_1\|v\|_2 < \|v_2\|_1 < C_2\|v\|_2$ (почему? – упражнение).

**Замечание 1.4.** Пусть есть две величины $A(h)$, $B(h)$, зависящие от параметра $h$, и вещественнозначная положительная функция $G(h) < 0$. Говорят – точнее, пишут – что

$$A(h) = B(h) + o(G(h))$$

при $h \to h_0$, если для любого $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|A(h) - B(h)\| < CG(h)$ при $\|h - h_0\| < \delta$. При аккуратном использовании, эти обозначения позволяют сильно упросить формулы. Условие (1.1) в них запишется так:

$$f(x+v) = f(x) + P(v) + o(\|v\|)$$

при $v \to 0$.

**Лемма 1.5.** *Пусть дано линейное отображение $P : V \to W$. Если $P(v) = o(\|v\|)$ при $v \to 0$, то $P(v)$ тождественно равно 0.*

*Доказательство.* Для любого $\lambda > 0$ имеем

$$P(v) = \frac{P(\lambda(v))}{\lambda}.$$

Т.к. $P(v) = o(\|v\|)$ при $v \to 0$, то правая часть есть $o(1)$ при $\lambda \to 0$. Т.к. левая часть от $\lambda$ не зависит, обе тождественно равны 0. □

В силу этой Леммы, линейное отображение $P$ в Определении 1.1 определено однозначно; оно называется *производной отображения $f$ в точке $x \in V$*, и обозначается

$$D(f)_x \in \mathsf{Hom}(V, W).$$

Например, пусть $f : V \to W$ – линейное отображение; тогда оно дифференцируемо в каждой точке $x \in V$, и $D(f)_x = f$ ((1.1) выполнено с нулевым остаточным членом). В общем случае, для вычисления производной можно применять следующий очевидный факт. Возьмем вектор $v \in V$ и функцию $f : U \to V$, дифференцируемую в точке $x \in U$; тогда

$$Df_x(v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}(T_{\lambda v}(f)(x) - f(x)) \tag{1.2}$$

(здесь $T_v$ – параллельный перенос на вектор $v$, а $T_v(f)$ – функция, полученная из $f$ параллельным переносом – иными словами, $T_v(f)(x) = f(T_v(x)) = f(x+v)$). Вместо $Df_x(v)$ мы иногда будем писать $D_v(f)(x)$; тогда (1.2) выражает операцию $D_v$ на пространстве функций как предел операций $T_{\lambda v}$. Правая часть (1.2) – если она существует – называется *частной производной* функции $f$ в точке $x$ в направлении вектора $v$ (при этом $f$ может и не быть дифференцируема в точке $x$).

Пусть задана функция $f : U \to W$ на области $U \subset V$, которая дифференцируема в каждой точке $x \in U$. Назовем *производной* $f$ функцию $Df : U \to \mathsf{Hom}(V, W)$, $x \mapsto D(f)_x$. Если производная $Df$ непрерывна, говорят, что функция $f$ (один раз) непрерывно дифференцируема. По индукции, говорят что $f$ $k$ раз непрерывно дифференцируема, если она дифференцируема, а $Df$ непрерывно дифференцируема $(k-1)$ раз. Пространство $W$-значных $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций на $U$ обозначается через $C^k(U, W)$. Множество непрерывных функций $f : U \to W$ обозначается через $C^0(U, W)$. Множество функций, которые непрерывно дифференцируемы на $U$ любое число раз, обозначается $C^\infty(U, W)$.

**Лемма 1.6.** (i) *Если даны $f, g \in C^k(U, W)$, то $f + g \in C^k(U, W)$, и $D(f+g) = Df + Dg$.*

(ii) *Если даны $f \in C^k(U, W)$, $g \in C^k(U, \mathbb{R})$, то $fg \in C^k(U, W)$, и*

$$D(fg) = D(f)g + fD(g). \tag{1.3}$$

(iii) *Если даны $f \in C^k(U, W)$ и $g \in C^k(U', W')$, где область $U' \subset W$ содержит $f(U) \subset W$, то $g \circ f \in C^k(U, W')$, и*

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x.$$

*Доказательство.* Упражнение. $\square$

Для любой функции $f \in C^k(U,W)$, $k$-кратная производная $D^k f$ определяется по индукции: полагаем $D^k f = D(D^{k-1} f)$. Пусть сначала $V$ одномерно, $V = \mathbb{R}$. Тогда $\mathsf{Hom}(V,W) = W$, и первая производная $Df$ – а следовательно, и кратные производные $D^k f$ – суть функции из $U$ в $W$. Следующий важный технический факт позволяет точнее оценить поправочный член $o(\|v\|)$ в (1.1)

**Лемма 1.7 (Теорема о малом приращении.).** *Пусть дана функция $f \in C^1(U,W)$, $U \subset \mathbb{R}$, и $f(x) = 0$ в некоторой точке $x \in U$. Тогда*

$$\|f(x+v)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|Df(x+\lambda v)\|\|v\|.$$

*Доказательство.* Положим $w = f(x+v) - f(x)$, и пусть $O : W \to w \cdot \mathbb{R}$ – ортогональная проекция на одномерное пространство, натянутое на $w$. По Лемме 1.6 (ii), функция $f_1 = O \circ f : U \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, причем поскольку $\|DO_x(w')\| = \|O(w')\| \leq \|w'\|$ для любого $\|w'\|$, достаточно доказать утверждение для функции $f_1$. Рассмотрим функцию $g(\lambda) = f_1(x+\lambda v) - \lambda f_1(x+v)$ из отрезка $[0,1]$ в $\mathbb{R}$; тогда $g(0) = g(1) = 0$, и достаточно доказать, что для какого-то $\lambda \in [0,1]$ имеем $Dg_\lambda = 0$. Т.к. отрезок компактен, то $g$ достигает на нем и максимума, и минимума. Если и то, и другое происходит в концах отрезка, то $g(\lambda)$ тождественно равна 0. Иначе она достигает – скажем, максимума – во внутренней точке $\lambda \in ]0,1[$. Подходя к ней справа и слева, и вычисляя $Dg_\lambda$ по (1.2), получаем $Dg_\lambda = 0$. $\square$

**Следствие 1.8.** *Пусть дана функция $f \in C^k(U,W)$, $U \subset \mathbb{R}$, и $f(x) = Df_x = \cdots = D^{k-1} f_x = 0$ в некоторой точке $x \in U$. Тогда*

$$\|f(x+v)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} D^k f(x+\lambda v)\|v\|^k.$$

*Доказательство.* Индукция по $k$:

$$\|f(x+v)\| \leq \|v\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} Df(x+\lambda v) \leq \|v\| \sup_{0 \leq \lambda, \lambda' \leq 1} D^{k-1} f(x+\lambda\lambda' v)\lambda^{k-1}\|v\|,$$

что не больше требуемого. $\square$

Вернемся теперь к случаю, когда $V$ общее. Напомним, что для каждого целого $k \geq 1$ определено пространство $\mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$ *$W$-значных полилинейных форм степени $k$ на $V$.* Используя канонические изоморфизмы $\mathsf{Hom}(V, \mathsf{Hom}(V^{\otimes(k-1)}, W)) \cong \mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$, кратные производные любой функции $f \in C^k(U,W)$ можно интерпретировать как функции $D^k f : U \to \mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$.

**Определение 1.9.** Функция $P : V \to W$, заданная формулой

$$P(v) = A(v \otimes v \otimes \cdots \otimes v)$$

для какой-то полилинейной формы $A \in \mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$, называется *полиномиальной степени $k$.*

Неформально, полиномиальная функция – это линейная комбинация $k$-кратных произведений вида $x_1(v)x_2(v)\dots x_k(v)w$, где $w \in W$ – какой-то вектор, а $x_1, x_2, \dots, x_k \in V^*$ – линейные формы на $V$. Заметим, что для $k = 2$, $W = \mathbb{R}$ такие функции изучались в листке Алгебра 3 – это соответствие между симметрическими билинейными формами и квадратичными функциями на $V$. Вообще, для любого $k$ полиномиальные формы образуют конечномерное векторное пространство $S^k(V,W)$, факторпространство $\mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$. Обозначим через $\mathsf{Sym}$ каноническое отображение $\mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W) \to S^k(V,W)$.

**Лемма 1.10.** *Пусть $P \in S^k(V, W)$ – полиномиальная функция. Тогда $P \in C^\infty(V, W)$, $D^p P = 0$ для всех $p \neq k$, полинейная форма $D^k P_0 \in \mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$ симметрична по всем аргументам, и $\mathsf{Sym}\, D^k P_0 = k! P$.*

*Доказательство.* Чтобы доказать, что $D^k P$ симметрична, надо доказать, что частные производные $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_k}$ по любому набору векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ коммутируют между собой. По индукции, достаточно доказать, что коммутируют $D_1 = D_{v_1}$ и $D_2 = D_{v_2}$.

*Алгебраическое доказательство.* Заметим, что операция $D = D_1 D_2 - D_2 D_1$ тоже удовлетворяет (1.3) (которое, кстати, называется *правило Лейбница*). По линейности, достаточно доказать что $DP = 0$ для $P = x_1 \dots x_k w$, $x_1, \dots, x_k \in V^*$, $w \in W$. По правилу Лейбница, для этого достаточно доказать, что $Dx_i = 0$, что очевидно. □

*Геометрическое доказательство.* По (1.2), имеем

$$D_1 D_2 P = \lim_{\lambda_1 \to 0} \lim_{\lambda_2 \to 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (T_{\lambda_1 v_1}(T_{\lambda_1 v_1}(f)) - T_{\lambda_1 v_1}(f) - T_{\lambda_2 v_2} + f).$$

Но параллельные переносы $T_{\lambda_1 v_1}$ и $T_{\lambda_2 v_2}$ коммутируют; поэтому формула для $D_2 D_1 P$ отличается лишь порядком пределов. Легко проверить, что поскольку $P$ – полиномиальная функция, существует предел

$$\lim_{\lambda_1 \to 0, \lambda_2 \to 0} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (T_{\lambda_1 v_1}(T_{\lambda_1 v_1}(f)) - T_{\lambda_1 v_1}(f) - T_{\lambda_2 v_2} + f)$$

одновременно по $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Поэтому в каком порядке вычислять предел, все равно. □

Осталось получить константу $k!$. Для этого достаточно вычислить $D^k P(v, v, \dots, v)$ для любого вектора $v$, т.е. вычислить $D_v^k P$ и сравнить его с $P(v)$. Это легко следует из (1.3). □

**Замечание 1.11.** На самом деле, отображение $\mathsf{Sym}$ отождествляет $S^k(V, W)$ с пространством симметрических полинейных форм $V^{\otimes k} \to W$.

**Замечание 1.12.** Единстенное место в геометрическом доказательстве формулы $D_1 D_2 = D_2 D_1$, где мы использовали полиномиальность $P$ – это в том утверждении, что существует одновременный предел. К сожалению, хотя утверждение верно для любой функции $f \in C^2(U, W)$, просто доказать существование одновременного предела в общем случае не удается. Поэтому само утверждение мы ниже выведем из Леммы 1.10.

Евклидовы метрики на $V$ и $W$ задают евклидовы метрику и на пространстве полилинейных форм $\mathsf{Hom}(V^{\otimes k}, W)$, и на пространстве симметрических форм $S^k(V, W)$; при этом для любого $P \in S^k(V, W)$ и любого $v \in V$ имеем

$$\|P(v)\| \leq \|P\| \|v\|, \tag{1.4}$$

где $P : V \to W$ – соответствующая полиномиальная функция.

Пусть $f \in C^k(U, W)$, и пусть $P^k(f)_x$ – полиномиальная функция, соответствующая полилинейной форме $D^k f_x$. Тогда по Лемме 1.6 (ii), $P^k(f)_x$ имеет следующий геометрический смысле: если ограничить функцию $f$ на какую-нибудь прямую $x + \lambda v$, проходящую через фиксированную точку $x \in U$, то $k$-я производная ограниченной функции, вычисленная в точке $x$, равна $P^k(f)_x(v)$.

**Предложение 1.13 (Ряд Тэйлора).** *Пусть дана $f \in C^k(U, W)$ и точка $x \in U$; тогда*

$$f(x + v) = f(x) + P^1 f_x(v) + \dots + \frac{1}{k!} P^k f_x(v) + o(\|v\|^k)$$

*при $v \to 0$.*

*Доказательство.* По Лемме 1.10, утверждение верно для полиномиальных функций $f$ (причем верно с нулевым остаточным членом). Поэтому можно вычесть из $f$ все полиномы $\frac{1}{l!}P^l f_x(v)$, и доказывать, что если $f(x) = P^1 f_x(v) = \cdots = P^k f_x(v)0$, то $f(x+v) = o(\|v\|^k)$ при $v \to 0$. Ограничивая $f$ на прямую $x + \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, по следствию 1.8 получаем

$$\|f(x+v)\| \leq \sup_{0\leq\lambda\leq 1} \|P^k f_{x+\lambda v}(v)\| \|v\|^{k-1}.$$

Поэтому если $\|v\| < \delta$, то, учитывая (1.4),

$$\|f(x+v)\| \leq \|v\|^{k-1} \sup_{v, \|v\|<\delta} \|P^k f_{x+v}\| \|v\|.$$

Но так как $P^k f_{x+v}$ – непрерывная функция от $v$, а $P^k f_x = 0$, то выражение $\sup_{v,\|v\|<\delta} \|P^k f_{x+v}\|$ есть $o(1)$ при $\delta \to 0$. □

**Следствие 1.14.** *Пусть $f \in C^k(U, W)$, $x \in U$. Тогда полилинейная форма $D^k f_x$ на $V$ симметрична по всем аргументам.*

*Доказательство.* В силу Предложения 1.13, достаточно доказать утверждение для полиномиальных функций – вычисляя производную по (1.2), видим, что остаточный член не дает в нее никакого вклада. Но для полиномиальных функций утверждение уже доказано в Лемме 1.10. □

**Упражнение 1.15.** *Пусть в пространстве $V$ задан базис $v_1, \ldots, v_n$; пусть, кроме того, дана непрерывная функция $f : U \to W$. Предположим, что все частные производные $D_{v_i} f_x$ существуют и непрерывны по $x \in U$. Докажите, что функция $f$ непрерывно дифференцируема. Верно ли, что $f$ дифференцируема в любой точке $x \in U$, если не предполагать, что частные производные $D_{v_i} f$ непрерывны?*