1 Лекция 2.

Докажем теперь несколько результатов о том, как из аналитических свойств отображений выводить его геометрические свойства. Главный технический результат здесь такой.

Лемма 1.1. *Пусть $f : U \to W$ – непрерывно дифференцируемое отображение из открытого подмножества $U \subset V$ векторного пространства V в векторное пространство W, и пусть его производная $Df_x : V \to W$ в точке $x \in U$ – биективное линейное отображение. Тогда для какого-то $\delta > 0$ образ $f(U) \subset W$ содержит δ-шар $B_\delta(f(x))$ с центром в $f(x)$ – т.е. для любого $w \in W$ с $\|w\| < \delta$ существует такое $x' \in U$, что $f(x') = f(x) + w$. Более того, отображение f биективно отображает некоторую окрестность $U' \subset U$ точки x на шар $B_\delta(f(x))$, а обратное отображение $f^{-1} : B_\delta(x) \to U'$ дифференцируемо в $f(x)$, и $D(f^{-1})_{f(x)} = (Df_x)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $P : V \to W$ – биективное линейное отображение. Изменяя при необходимости метрику на W, можно добиться того, что $\|P(v)\| = \|v\|$. Заметим, что для любое $P' \in \mathsf{Hom}(V, W)$, близкое к P, тоже биективно – действительно, его определитель близок к 1, и потому не равен 0. Более того, для любой константы $C > 0$ можно найти такое δ, что при $\|P' - P\| < \delta$ имеем $\|v\| < (1 + C)\|P(v)\|$.

Будем теперь решать уравнение $f(x') = f(x)+w$ методом последовательных приближений. Зафиксируем такую положительную константу, что $1 + C < 2$ и $C(1 + C) < \frac{1}{3}$ (например $C = \frac{1}{6}$). Поскольку Df – непрерывная функция, можно найти такое δ, что в любой точке $x' \in U$, $\|x' - x\| < 3\delta$ имеем $\|v\| < (1 + C)\|Df_{x'}(v)\|$. Кроме того, поскольку $f \in C^1(U, W)$, можно добиться того, что для любых $x', v \in V$, $\|x' - x\|, \|v\| < 3\delta$, имеем $x, x' + v' \in U$ и

$$\|f(x' + v) - f(x') - Df_{x'}(v)\| < C\|v\|. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $w \in W$ – такой вектор, что $\|w\| < \delta$. Тогда $v = (Df_x)^{-1}(w)$ удовлетворяет $\|v\| < (1 + C)\|w\|$. Положив $x_1 = x + v$, имеем

$$\|f(x_1) - f(x) - w\| < C\|v\| < C(1 + C)\|w\| < \frac{1}{3}\|w\|.$$

Заменим теперь δ на $\frac{1}{3}\delta$, x на x_1, w на $f(x) + w - f(x_1)$. Тогда легко проверить, что все наши предположения по-прежнему выполнены: поскольку $\|v\| < 2\|w\|$, $\frac{1}{3}\delta$-шар с центром в x_1 целиком лежит в δ-шаре с центром в x. Однако же норма $\|w\|$ уменьшилась по меньшей мере в три раза.

По индукции, получаем последовательность точек x_n, для которых $\|f(x_n) - f(x) - w\| < \frac{1}{3^n}\|w\|$, причем $\|x_{n+1} - x_n\| < \frac{2}{3^n}\delta$. Тогда x_n – последовательность Коши, она сходится к $x' \in U$, и $f(x') = f(x) + w$.

Итак, мы доказали, что f сюръективно отображает некоторую окрестность точки $x \in U$ на δ-шар $B_\delta(f(x))$. Для доказательства второго утверждения достаточно доказать, что f инъективно в некоторой окрестности x – тогда можно заменить U на эту окрестность, повторить процедуру, и взять $U' = f^{-1}(B_\delta(f(x))) \cap U$. Достаточно взять δ-шар с центром в x. Действительно, если $f(x') = f(x' + v)$ для каких-то $x', x' + v \in B_\delta(x)$, то в силу (1.1) имеем

$$\|Df_{x'}(v)\| < C\|v\|,$$

что вместе с $\|v\| < (1+C)\|Df_{x'}(v)\|$ влечет $\|v\| < C(1+C)\|v\|$ и противоречит предположению $C(1 + C) < \frac{1}{3} < 1$.

Наконец, заметим, что в нашем рассуждении вместо $\frac{1}{3}$ можно использовать $\frac{C'}{3}$ для любого положительного числа $C' < 1$. При этом, суммируя геометрическую прогрессию, мы дополнительно получим, что первое приближение x_1 достаточно хорошее – а именно,

$$\|x_1 - x'\| < \frac{2C'}{3} \sum_{k \geq 0} \frac{2}{3^k} = 2C'.$$

Но по построению $x' = f^{-1}(f(x+w))$, а $x_1 = f^{-1}(f(x)) + (Df_x)^{-1}(w)$. Поскольку C' – произвольное достаточно малое число, мы по определению получаем, что f^{-1} дифференцируемо в точке $f(x)$, причем $D(f^{-1})_{f(x)} = (Df_x)^{-1}$. □

Первое важное следствие Леммы 1.1 – так называемая "теорема об обратной функции". А именно, введем следующее определение.

Определение 1.2. Пусть $U_1, U_2 \subset V$ – два открытых подмножества векторного пространства V. Отображение $f : U_1 \to U_2$ называется *диффеоморфизмом класса* C^k, если оно взаимнооднозначно, причем и $f : U_1 \to U_2 \subset V$, и $f^{-1} : U_2 \to U_1 \to V$ – отображения класса C^k.

Предложение 1.3 (Теорема об обратной функции.). *Пусть $f \in C^k(U, V)$, $U \subset V$, $k \geq 1$, причем $Df_x : V \to V$ обратимо в какой-то точке $x \in U$. Тогда f – диффеоморфизм класса C^k какой-то окрестности $U' \subset U$ точки x и ее образа $f(U') \subset V$.*

Доказательство. По Лемме 1.1, у $x \in U$ есть такая окрестность $U' \subset U$, что f взаимнооднозначно отображает U' на какой-то δ-шар $f(U') = B_\delta(f(x))$. Более того, по той же Лемме отображение $f : U' \to f(U')$ переводит открытые множества в открытые. Поэтому обратное отображение $f^{-1} : f(U') \to U'$ непрерывно. Наконец, по той же Лемме обратное отображение f^{-1} дифференцируемо в каждой точке $y \in f(U')$, причем $D(f^{-1})_{f(x)} = (Df_x)^{-1}$. Поскольку f^{-1} непрерывно, а $(Df_x)^{-1}$ непрерывно как функция от x, производная $D(f^{-1}) = (Df)^{-1} \circ f^{-1}$ также непрерывна, т.е. f класса C^1. Наконец, если f класса C^l для какого-то $l < k$, то, поскольку $(Df)^{-1}$ класса C^k, производная $D(f^{-1}) = (Df)^{-1} \circ f^{-1}$ класса C^l, т.е. f^{-1} – на самом деле класса $l + 1$. По индукции, f класса C^k. □

Замечание 1.4. Конечно, такое короткое доказательство этого Предложения есть обман – мы просто вынесли все технические детали в Лемму 1.1.

Второе важное следствие Леммы 1.1 – так называемая "теорема о неявной функции".

Предложение 1.5 (Теорема о неявной функции.). *Пусть $f \in C^k(U, W)$, $U \subset V$ – некоторое отображение, и пусть $Df_x : V \to W$ сюръективно в точке $x \in U$. Тогда можно разложить V в прямую сумму $V = W' \oplus W$, выбрать окрестность $U' \subset V$ точки $0 \in V$, и такой диффеоморфизм $\Phi : U' \to \Phi(U') \subset U$ класса C^k, что $\Phi(0) = x$, а $\Phi \circ f : U' \to W$ есть сумма постоянного отображения и проекции на слагаемое $W \subset V$.*

Иными словами, если производная отображения сюръективна в точке, то в окрестности этой точки отображение можно представить как проекцию на прямое слагаемое.

Прежде чем доказывать это Предложение, заметим следующее. Вообще говоря, это обобщение Предложения 1.3 – которое получается, если дполнительно потребовать, чтобы Df было биективно, т.е. $\dim V = \dim W$. В принципе, если внимательно посмотреть на доказательство Леммы 1.1, то можно заметить, что для первого утверждения сюръективности Df достаточно; более того, при некотором старании можно вывести Предложение 1.5 прямо из таким образом усиленной Леммы 1.1. В некоторых книгах, например в очень хорошем учебнике Зорича, так и сделано. Нам, однако, удобнее сначала доказать теорему об обратной функции, а теорему о неявной функции вывести из нее с помощью следующего трюка.

Доказательство. Возьмем в качестве W' ядро производной $Df_x : V \to W$, и выберем какую-нибудь проекцию $P : V \to W'$ так, чтобы $P \oplus Df_x : V \to W' \oplus W$ было биективно. Применяя Предложение 1.3 к отображению $P \oplus f : U \to W \oplus W'$, получаем требуемое. $\square$

Следствие 1.6 (Теорема об открытом отображнении.). *Пусть $f \in C^1(U, W)$, причем $Df_x : V \to W$ сюръективно для любой точки $x \in U$. Тогда $f(U) \subset W$ открыто.*

Доказательство. Упражнение. Указание: это следует из того, что проекция на сомножитель переводит открытые множества в открытые; докажите этот факт, или посмотрите листок Геометрия 6. $\square$