Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ГЕОМЕТРИЯ 1: вещественные числа.

Для этого листочка требуется знакомство с понятием поля, введенным в листке АЛГЕБРА-1.

Фундаменальные последовательности.

Обычно вещественные числа приближают рациональными — например, раскладывают число a в бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1a_2\ldots$, и рассматривают разные конечные отрезки $a_0, a_1a_2\ldots a_n$ этой дроби как все более точные приближения a. При этом некоторые дроби объявляются эквивалентными, например, $1,00000\ldots$ и $0,9999\ldots$. Оказывается, что строго определять арифметические операции на вещественных числах и доказывать их свойства проще, если рассматривать не конкретно десятичные дроби, а вообще любые последовательности рациональных чисел, приближающие данное вещественное число. При этом снова надо учитывать, что разные последовательности могут быть эквивалентны (приближать одно и то же число). С логической точки зрения, проще всего просто **объявить** вещественным числом множество приближающих его последовательностей рациональных чисел. На этом основан подход Коши к строгому построению множества вещественных чисел.

Определение 1.1. Будем говорить, что нечто верно для **почти всех** элементов множества, если оно верно для всех элементов, кроме конечного их числа. Пусть $\{a_i\} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ – последовательность рациональных чисел. Говорят, что $\{a_i\}$ – **фундаментальная последовательность**, или **последовательность Коши**, если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[x, y]$ длины ε, который содержит почти все $\{a_i\}$.

Задача 1.1. Пусть a – рациональное число. Докажите, что постоянная последовательность $a, a, \ldots$ – последовательность Коши.

Такую последовательность мы будем обозначать через $\{a\}$.

Задача 1.2. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Переставим в произвольном порядке элементы a_i. Докажите, что получится последовательность Коши.

Задача 1.3. Дана последовательность $\{a_i\}$ рациональных чисел, принадлежащих отрезку $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Докажите, что из $\{a_i\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая является последовательностью Коши.

Указание. Разделим отрезок $I_0 = [a, b]$ пополам. В одной из половин (обозначим ее I_1) содержится бесконечное число элементов последовательности. Выкинем из $\{a_i\}$ все элементы, кроме a_0, которые не лежат в I_1. Разделим I_1 пополам, и т.д. В отрезке I_k, полученном на k-м шаге, содержатся все элементы полученной последовательности, начиная с k-го, и этот отрезок имеет длину $\frac{b-a}{2^k}$.

Задача 1.4 (!). Дана монотонно возрастающая последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$. Известно, что все a_i ограничены сверху некоторой константой C: $a_i \leqslant C$. Докажите, что это последовательность Коши.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 1.2. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши. Они называются **эквивалентными**, если последовательность $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ – последовательность Коши.

Задача 1.5. Пусть a, b – два рациональных числа. Докажите, что $\{a\}$ эквивалентна $\{b\}$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Задача 1.6. Докажите, что последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

Задача 1.7. Докажите, что если $\{a_i\}$ эквивалентна $\{b_i\}$, то $\{b_i\}$ эквивалентна $\{a_i\}$.

Задача 1.8 (!). Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – две неэквивалентные последовательности Коши. Докажите, что существуют два непресекающихся интервала I_1, I_2 такие, что почти все a_i лежат в I_1, а почти все b_i – в I_2.

Указание. Примените определение последовательности Коши к $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ для всех n.

Задача 1.9 (!). Докажите, что если последовательность $\{a_i\}$ эквивалентна последовательности $\{b_i\}$, а последовательность $\{b_i\}$ эквивалентна последовательности $\{c_i\}$, то $\{a_i\}$ эквивалентна $\{c_i\}$. (Это свойство выражают словами "эквивалентность последовательностей Коши транзитивна".)

Определение 1.3. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – две неэквивалентные последовательности Коши. Говорят, что $\{a_i\} > \{b_i\}$, если $a_i > b_i$ для почти всех i.

Задача 1.10. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – две неэквивалентные последовательности Коши. Докажите, что или $\{a_i\} < \{b_i\}$, или $\{b_i\} < \{a_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 1.8.

Задача 1.11. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – две неэквивалентные последовательности Коши, и $\{a_i\} < \{b_i\}$. Докажите, что существуют два рациональных числа c, d таких, что $\{a_i\} < \{c\} < \{d\}\{b_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущим указанием.

Задача 1.12. Пусть $\{a_i\} < \{b_i\}$, а $\{b_i\}$ эквивалентно $\{c_i\}$. Докажите, что $\{a_i\} < \{c_i\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, и определением последовательности Коши для любого $\varepsilon < |c - d|$.

Задача 1.13. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши, а $c \in \mathbb{Q}$ – рациональное число. Докажите, что следующие свойства эквивалентны

а. $\{a_i\}$ эквивалентна последовательности $\{c\}$.

б. В любом открытом отрезке $]x, y[$, содержащем c, содержится бесконечно много элементов последовательности $\{a_i\}$.

в. В любом открытом отрезке $]x, y[$, содержащем c, содержатся почти все элементы последовательнсти $\{a_i\}$.

Определение 1.4. Если любое из вышеуказанных свойств выполнено, мы говорим, что $\{a_i\}$ сходится к c.

Задача 1.14. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши. Докажите, что $\{a_i+b_i\}$ и $\{a_i-b_i\}$ – последовательности Коши.

Задача 1.15. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши, причем b_i сходится к 0. Докажите, что $\{a_i\}$ эквивалентна $\{a_i + b_i\}$.

Задача 1.16. Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – последовательности Коши. Докажите, что $\{a_ib_i\}$ – последовательность Коши.

Задача 1.17. Докажите, что если $\{b_i\}$ сходится к 1, то $\{a_ib_i\}$ эквивалентна $\{a_i\}$.

Задача 1.18. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши из ненулевых чисел, которая не сходится к 0. Докажите, что $\{a_i^{-1}\}$ – последовательность Коши.

Указание. Докажите, что существует такой не содержащий 0 замкнутый отрезок $[x, y]$, что почти все $\{a_i\}$ содержатся в $[x, y]$. Пусть почти все $\{a_i\}$ содержатся в отрезке $I \subset [x, y]$ длины ε. Докажите, что все $\{a_i^{-1}\}$, кроме конечного числа, содержатся в отрезке I^{-1} длины $\varepsilon(\min(|x|, |y|)^{-1}$.

Определение 1.5. Классом эквивалентности последовательности Коши $\{a_i\}$ называется множество всех последовательностей Коши, эквивалентных $\{a_i\}$. Множество классов эквивалентностей последовательностей Коши называется **множеством действительных чисел** и обозначается через $\mathbb{R}$.

Задача 1.19. Докажите, что соответствие $c \mapsto \{c\}$ задает инъективное отображение из множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел в $\mathbb{R}$.

Задача 1.20 (!). Докажите, что четыре арифметических операции, которые мы определили на $\mathbb{R}$ в задачах 1.14- 1.18, задают на $\mathbb{R}$ структуру поля.

Дедекиндовы сечения.

Главный недостаток определения действительных чисел через фундаментальные последовательности – это то, что эквивалентных фундаментальных последовательностей очень много: определение получается очень неявным. Трудность эта скорее психологическая. Тем не менее, есть способ ее преодолеть – более наглядное определение вещественных чисел, которое предложил Дедекинд.

Определение 1.6. Пусть $R \subset \mathbb{Q}$ – подмножество в множестве рациональных чисел, которое непусто и не равно всему $\mathbb{Q}$. Говорят, что R – **сечение Дедекинда**, если из $a \in R$ и $b < a$ следует, что $b \in R$. Сечение Дедекинда R называется **замкнутым**, если существует такое рациональное число a, что $b \in R$ тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$. В противном случае R называется **открытым**.

Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Обозначим через $R_{\{a_i\}}$ множество таких рациональных чисел b, что $\{b\} < \{a_i\}$.

Задача 1.21. Докажите, что если $R_{\{a_i\}}$ – сечение Дедекинда (т.е. если $b \in R_{\{a_i\}}$, а $c < b$, то $c \in R_{\{a_i\}}$). Докажите, что это сечение открыто.

Задача 1.22. Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ – эквивалентные последовательности Коши. Докажите, что $R_{\{a_i\}} = R_{\{b_i\}}$.

Задача 1.23. Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ – неэквивалентные последовательности Коши, и $\{a_i\} < \{b_i\}$. Докажите, что $R_{\{a_i\}} \subset R_{\{b_i\}}$, но эти множества не совпадают.

Указание. Рассмотрите точки интервала $[c, d]$ из задачи 1.11; какому из множеств $R_{\{a_i\}}$, $R_{\{b_i\}}$ они принаделжат?

Задача 1.24 (*). Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – две последовательности Коши. Докажите, что они эквивалентны тогда и только тогда, когда $R_{\{a_i\}} = R_{\{b_i\}}$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 1.10 (и предыдущими задачами).

Задача 1.25 (*). Пусть $R \subset \mathbb{Q}$ – открытое сечение Дедекинда. Докажите, что $R = R_{\{a_i\}}$ для какой-то фундаментальной последовательности $\{a_i\}$.

Указание. Рассмотрите интервал $I_0 = [a, b]$ такой, что a лежит в R, а b – нет. Поделите его пополам, выберите половину I_1 с тем же свойством. Повторите процесс, и возьмите в качестве a_i любую точку интервала I_i.

Мы видим, что множество классов эквивалентности последовательностей Коши – это то же самое, что множество открытых сечений Дедекинда. Поэтому действительные числа можно с тем же успехом определять как сечения Дедекинда. В дальнейшем пользуйтесь тем из определений, которое вам удобнее.

Задача 1.26 (**). Определите арифметические операции на $\mathbb{R}$ непосредственно через сечения Дедекинда, не прибегая к последовательностям Коши. Проверьте аксиомы поля.

Указание. Чтобы определить умножение, определите сначала операции "умножение на положительное действительное число a" и "умножение на -1", и докажите дистибутивность для каждой из них по отдельности.

Супремум и инфимум.

Определение 1.7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – некоторое подмножество $\mathbb{R}$. Множество A называется **ограниченным снизу**, если все элементы A больше некоторой константы $C \in \mathbb{R}$. Множество A называется **ограниченным сверху**, если все элементы A меньше некоторой константы $C \in \mathbb{R}$. Множество A называется **ограниченным**, если оно ограниченно сверху и снизу.

Определение 1.8. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – некоторое подмножество $\mathbb{R}$. Инфимум A (обозначается $\inf A$) есть такое число $c \in \mathbb{R}$, что $c \leqslant a$ для всех $a \in A$, и в любом открытом отрезке $]x, y[$, содежащем c, содержатся и элементы a. Супремум A (обозначается $\sup A$) есть такое число $c \in \mathbb{R}$, что $c \geqslant a$ для всех $a \in A$, и в любом открытом отрезке $]x, y[$, содежащем c, содержатся и элементы a.

Задача 1.27. Докажите, что $\inf A$ и $\sup A$ единственны (если существуют).

Задача 1.28 (!). Пусть A – ограниченное сверху множество. Докажите, что $\sup A$ существует.

Указание. Рассмотрим все $a \in A$ как сечения Дедекинда, т.е. подмножества в $\mathbb{Q}$. Возьмем их объединение R; поскольку все $a \leqslant C$, это будет тоже сечение Дедекинда. Докажите, что $\inf A = R$.

Задача 1.29 (!). Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – ограниченное снизу множество. Докажите, что $\inf A$ существует.

Замечание. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ не ограничено снизу (сверху). Тогда пишут $\inf A = -\infty$ ($\sup A = \infty$).