Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Геометрия 11: Накрытия Галуа

Наука о накрытиях Галуа, про которую рассказывается в этом листке, весьма похожа на теорию Галуа алгебраических расширений полей. Это не случайно. В алгебраической геометрии методы топологии и дифференциальной геометрии применяются к объектам алгебраической и теоретико-числовой природы. Та версия теории Галуа, которая излагается в листке Алгебра-11, восходит к А. Гротендику. Гротендик определил фундаментальную группу таким образом, что группа Галуа и фундаментальная группа топологического пространства оказались частными случаями более общей конструкции. При изучении накрытий и расширений полей, а также фундаментальной группы и группы Галуа, очень полезно держать в голове, что это похожие вещи.

Все топологические пространства в этом листке предполагаются хаусдорфовыми.

Задача 11.1. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а M_1 – связная компонента $\tilde{M}$. Докажите, что $\pi^{-1}(M_1)$ – связная компонента в $\tilde{M}$.

Задача 11.2 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, причем $\tilde{M}$ и M связны и непусты, а π инъективно. Докажите, что π – гомеоморфизм.

Определение 11.1. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия. **Морфизмом накрытий** называется непрерывное отображение $\varphi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$, согласованное с проекцией в M – иначе говоря, такое, что $\varphi \circ \pi' = \pi$. Множество морфизмов между накрытиями обозначается $\operatorname{Mor}(\tilde{M}, \tilde{M}')$. Изоморфизмом накрытий называется морфизм, который обратим, причем таким образом, что $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathsf{Id}$, $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathsf{Id}$.

Задача 11.3 (!). Пусть $\varphi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ – морфизм накрытий. Докажите, что $\varphi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ – накрытие.

Задача 11.4. Пусть M связно, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Докажите, что $\tilde{M}$ локально связно.

Задача 11.5. Пусть $M_1 \longrightarrow M_2$ и $M_2 \longrightarrow M_3$ – накрытия,

** Верно ли, что композиция $M_1 \longrightarrow M_3$ – тоже накрытие?

! Пусть у каждой точки M_3 есть односвязная окрестность. Докажите, что $M_1 \longrightarrow M_3$ – накрытие.

Задача 11.6. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия, а $\tilde{M}' \coprod \tilde{M}$ – их несвязная сумма. Докажите, что это тоже накрытие M.

Задача 11.7. Пусть M связно, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Докажите, что $\tilde{M} \cong \coprod_{\alpha \in I} \tilde{M}_\alpha$, где $\{\tilde{M}_\alpha\}$ – множество компонент связности $\tilde{M}$, рассмотренных как накрытия M.

Определение 11.2. Расщеплением накрытия $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ называется изоморфизм $\tilde{M}$ и накрытия вида $\tilde{M} \cong V \times M$, где V – множество с дискретной топологией.

Задача 11.8. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие связного пространства M. Докажите, что π расщепляется тогда и только тогда, когда все связные компоненты $\tilde{M}$ изоморфны M.

Накрытия Галуа

Задача 11.9 (!). Пусть $M_1 \xrightarrow{\pi_1} M$, $M_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ – накрытия. Рассмотрим следующее подмножество в $M_1 \times M_2$

$$M_1 \times_M M_2 := \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 \ \mid \ \pi_1(m_1) = \pi_2(m_2)\}$$

Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как топологическое пространство (с топологией, индуцированной из $M_1 \times M_2$). Докажите, что естественное отображение $M_1 \times_M M_2 \longrightarrow M$ – это накрытие.

Определение 11.3. Пространство $M_1 \times_M M_2$ вместе с естественным отображением в M называется **произведением накрытий** M_1**,** M_2. Аналогичным образом определяется произведение любого конечного числа накрытий.

Замечание. Если пользоваться аналогией между расширениями полей и накрытиями, несвязные объединения накрытий соответствуют прямой сумме полупростых артиновых колец, а произведения - тензорным произведениям.

Задача 11.10. Пусть M_1, M_2, M_3 – накрытия M. Докажите, что морфизмы из M_3 в $M_1 \times M_2$ взаимно однозначно соответствуют парам морфизмов $\varphi_1 : \ M_3 \longrightarrow M_1$, $\varphi_2 : \ M_2 \longrightarrow M_1$.

Задача 11.11. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как накрытие S^1. Сколько связных компонент у $\mathbb{R} \times_{S^1} \mathbb{R}$?

Определение 11.4. Пусть $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ – морфизм между двумя накрытиями M. Определим **график** φ как подмножество в $M_1 \times_M M_2$, состоящее из пар вида $(m, \varphi(m))$ для всех $m \in M_1$.

Задача 11.12 (!). Пусть $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ – морфизм между двумя накрытиями M, а Γ_φ – его график. Докажите, что Γ_φ открыто и замкнуто в $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$.

Задача 11.13. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, причем M и $\tilde{M}$ связны (такое накрытие называется **связным**). Пусть $X \subset \tilde{M} \times_M \tilde{M}$ - связная компонента. Докажите, что X тогда и только тогда является графиком автоморфизма $\nu : \ \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$, когда когда проекция на первую компоненту задает изоморфизм $X \cong \tilde{M}$.

Задача 11.14 (!). Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. Рассмотрим проекцию (по первому аргументу) $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ как накрытие $\tilde{M}$. Постройте взаимно однозначное соответствие между $\operatorname{Mor}_{\tilde{M}}(\tilde{M}, \tilde{M} \times_M)$ и множеством автоморфизмов $\tilde{M}$ над M.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 11.5. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, причем M и $\tilde{M}$ связны. Тогда $[\tilde{M} : M]$ называется **накрытием Галуа**, если накрытие $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ расщепляется. В такой ситуации группа автоморфизмов $\tilde{M}$ над M называется **группой Галуа накрытия** $[\tilde{M} : M]$ (обозначается $\operatorname{Gal}([\tilde{M} : M])$). Иногда группа Галуа накрытия называется **группой монодромии**, а по-английски – **deck transform group** (группа перелистывания колоды).

Задача 11.15 (!). Пусть M связно, а $[\tilde{M} : M]$ – такое накрытие Галуа, что у каждой точки M есть ровно n прообразов (такое накрытие называется n-листным). Докажите, что у группы Галуа $[\tilde{M} : M]$ ровно n элементов.

Указание. Докажите, что $[\tilde{M} \times_M \tilde{M} : \tilde{M}]$ тоже n-листное, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 11.6. Пусть группа G действует на множестве S. Действие называется **свободным**, если для любых $g \in G$, $s \in S$, $s \neq gs$, если $g \neq 1$. Действие называется **транзитивным**, если для любых двух s_1, $s_2 \in S$, найдется $g \in G$ такой, что $g(s_1) = s_2$.

Задача 11.16. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $G = \operatorname{Aut}_M(\tilde{M})$ – его группа автоморфизмов. Предположим, что M связно. Докажите, что для любого $x \in M$ группа G действует свободно на $\pi^{-1}(x)$.

Задача 11.17 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие Галуа, а $x \in M$ – любая точка. Докажите, что $\operatorname{Gal}([\tilde{M} : M])$ действует на $\pi^{-1}(x)$ свободно и транзитивно.

Указание. Установите взаимно однозначное соответствие между $\pi^{-1}(X)$ и множеством связных компонент $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ и примените задачу 11.14.

Задача 11.18 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $x \in M$ – любая точка. Докажите, что $\operatorname{Aut}_M(\tilde{M})$ тогда и только тогда транзитивно действует на $\pi^{-1}(X)$, когда $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа.

Задача 11.19. Рассмотрим накрытие $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$. Докажите, что это накрытие Галуа.

Задача 11.20. Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}$ Рассмотрим n-листное накрытие $S^1 \longrightarrow S^1$, $t \mapsto nt$. Докажите, что это накрытие Галуа.

Определение 11.7. Пусть M – топологическое пространство, а G – группа, действующая на M непрерывными преобразованиями. Рассмотрим пространство G-орбит M/G. Напомним (см. листок Геометрия 10), что на M/G следующим образом вводится топология: подмножество M/G открыто тогда и только тогда, когда если его прообраз в M открыт. Множество M/G с этой топологией называется **факторпространством** M по действию G.

Задача 11.21 (!). Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, а $G \subset \operatorname{Aut}_M(\tilde{M})$ действует на $[\tilde{M} : M]$ автоморфизмами. Докажите, что это действие свободно, а факторпространство $\tilde{M}/G$ хаусдорфово и накрывает M.

Замечание. Фактор по G играет в теории накрытий Галуа ту же роль, что G-инварианты в теории расширений Галуа.

Задача 11.22 (!). Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, а G – его группа автоморфизмов. Докажите, что $\tilde{M}/G$ изоморфно M тогда и только тогда, когда $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.18.

Замечание. Дальше следует несколько задач, доказательство которых (и даже формулировка) почти дословно повторяет доказательство аналогичных задач для расширений Галуа.

Задача 11.23. Пусть $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$ – последовательность накрытий, причем φ_i сюрьективны, а их композиция расщепляется. Докажите, что φ_i расщепляются.

В развитие аналогии с теорией Галуа, накрытия вида $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ будут в дальнейшем обозначаться $[\tilde{M} : M]$.

Задача 11.24 (!). Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий, причем все M_i связны, а $[M_1 : M_3]$ – накрытие Галуа. Докажите, что $M_1 \times_{M_3} M_2$ расщепляется как расслоение над M_1.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.23, применив ее к последовательности

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_2 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_3.$$

Задача 11.25 (!). Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий, причем $[M_1 : M_3]$ – накрытие Галуа. Докажите, что $[M_1 : M_2]$ – накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.23.

Задача 11.26. Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий. Докажите, что

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \cong M_1 \times_{M_2} (M_2 \times_{M_3} M_2) \times_{M_2} M_1.$$

Задача 11.27. Выведите из этого следующее: если $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий, причем $[M_1 : M_2]$ и $[M_2 : M_3]$ – накрытия Галуа, то $[M_1 : M_3]$ – тоже накрытие Галуа.

Задача 11.28. Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие, G – его группа Галуа, а $G' \subset G$ – ее подгруппа. Рассмотрим фактор $\tilde{M}/G'$. Докажите, что $[\tilde{M} : \tilde{M}/G']$ – накрытие Галуа, с группой Галуа G'.

Определение 11.8. Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие. **Факторнакрытием** $[\tilde{M} : M]$ называется накрытие $\tilde{M}' \longrightarrow M$, заданное вместе с последовательностью накрытий $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}' \longrightarrow M$.

Задача 11.29 (!). (основная теорема теории Галуа) Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа с группой Галуа G. Рассмотрим соответствие, сопоставляющее подгруппе $G' \subset G$ факторнакрытие $[\tilde{M}/G' : M]$. Докажите, что это соответствие устанавливает биекцию между множеством подгрупп и множеством классов изоморфизма факторнакрытий.

Задача 11.30. Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий, причем $[M_1 : M_3]$ – накрытие Галуа. Рассмотрим естественную проекцию

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \xrightarrow{\Psi} M_2 \times_{M_3} M_2.$$

Пусть $g \in \operatorname{Gal}([M_1 : M_3])$, а $e_g \subset M_1 \times_{M_3} M_1$ – связности $\{(m, g(m))\}$ в $M_1 \times_{M_3} M_1$. Докажите, что $g \in \operatorname{Gal}([M_1 : M_2]) \subset \operatorname{Gal}([M_1 : M_3])$ тогда и только тогда, когда при проекции в $M_2 \times_{M_3} M_2$ компонента e_g переходит в диагональную компоненту.

Задача 11.31. Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – последовательность накрытий Галуа. Докажите, что естественная проекция

$$M_1 \times_{M_3} M_1 \xrightarrow{\Psi} M_2 \times_{M_3} M_2.$$

задает сюрьективный гомоморфизм $\operatorname{Gal}([M_1 : M_3]) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Gal}([M_2 : M_3])$. Докажите, что $\ker \psi = \operatorname{Gal}([M_1 : M_2])$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что группа Галуа $\operatorname{Gal}([M_i : M_3])$ отождествляется с множеством связных компонент $M_i \times_{M_3} M_i$, и примените предыдущую здачу.

Задача 11.32 (!). Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие Галуа, а $G' \longrightarrow \tilde{M}/G'$ – биективное соответствие между факторнакрытиями и подгруппами в группе Галуа, построенное выше. Докажите, что G' является нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда $[\tilde{M}/G' : M]$ – накрытие Галуа.

Накрытия линейно связных пространств

Определение 11.9. Пусть M – метрическое пространство. Напомним, что **геодезической** в M называется такой путь $[a,b] \xrightarrow{\gamma} M$, что $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x-y|$. **Длина** геодезической – это расстояние между ее концами. Путь называется **кусочно геодезическим**, если его можно разбить в объединение конечного числа геодезических сегментов. **Длина** кусочно геодезического пути определяется как сумма длин составляющих этот путь геодезических отрезков. Мы обозначаем длину пути γ через $|\gamma|$.

Определение 11.10. Пусть Γ – граф, а M_Γ – его топологическое пространство. Мы говорим, что Γ **связен**, если его топологическое пространство связно.

Задача 11.33 (!). Докажите, что граф связен тогда и только тогда, когда любые две вершины соединяются конечной последовательностью ребер. Докажите, что связный граф линейно связен.

Задача 11.34 (!). Пусть Γ – связный граф. По построению, на каждом ребре $r_\alpha \subset M_\gamma$ графа введены координаты, отождествляющие его с $[0,1]$. Пусть γ – кусочно линейный путь в Γ_M, то есть путь, составленный из конечного числа отрезков вида $[a_i, b_i] \xrightarrow{\varphi_i} [\lambda_i, \mu_i] \subset r_\alpha$, где φ_i линейна. Определим $|\gamma| := \sum |\lambda_i, \mu_i|$, как сумму длин всех отрезков, составляющих этот путь. Определим $d(x,y) := \inf |\gamma|$, где γ пробегает все кусочно линейные пути, ведущие из x в y. Докажите, что $d(x,y)$ задает метрику, и M_Γ геодезически связен.

Определение 11.11. Эта метрика называется **стандартной метрикой на топологическом пространстве графа**.

Определение 11.12. Геодезически связное многообразие M называется **звездчатым**, если любые две точки M соединяются единственной геодезической.

Задача 11.35. Докажите, что любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (со стандартной метрикой) звездчатое.

Задача 11.36 (*). Найдите на $M = \mathbb{R}^2$ такую метрику, что M геодезически связно, а из любой точки в любую идет бесконечно много геодезических.

Задача 11.37 (*). Пусть Γ – дерево, то есть конечный связный граф, у которого n вершин и $n-1$ ребро. Докажите, что M_Γ со стандартной метрикой звездчатое.

Задача 11.38 (*). Пусть Γ – такой конечный граф, что Γ_M звездчатое. Докажите, что Γ – дерево.

Задача 11.39 (!). Пусть M – геодезически связное многообразие, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие, а x и y – две точки в $\tilde{M}$. Рассмотрим множество $S_{x,y}$ всех путей на $\tilde{M}$, соединяющих x и y, проекция которых в M кусочно геодезична. Рассмотрим следующую функцию на $\tilde{M} \times \tilde{M}$

$$\tilde{d}(x,y) = \inf_{\gamma \in S_{x,y}} |\pi(\gamma)|$$

Докажите, что это метрика. Докажите, что $\tilde{d}(x,y) \geqslant d(\pi(x), \pi(y))$.

Задача 11.40 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $\tilde{M}$ геодезически связно.

Задача 11.41. Пусть M – геодезически связное метрическое пространство, а $\tilde{M} \longrightarrow M$ – его накрытие. Докажите, что связная компонента прообраза геодезической – геодезическая в $(\tilde{M}, \tilde{d})$.

Указание. Докажите, что прообраз геодезической является геодезической в окрестности каждой точки. Затем воспользуйтесь неравенством $\tilde{d}(x, y) \geqslant d(\pi(x), \pi(y))$.

Задача 11.42 (!). Пусть (M, d) – звездчатое метрическое пространство, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – его связное накрытие. Пусть, кроме того, $x \in \tilde{M}$ – любая точка, а U_x – множество точек $y \in M$, которые можно соединить с x геодезической. Докажите, что U_x открыто и замкнуто в $\tilde{M}$, и что $(U_x, \tilde{d})$ звездчатое. Выведите из этого, что естественная проекция $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – изометрия и гомеоморфизм.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.43. Пусть $M = [0, 1] \times [0, 1]$ – квадрат, а $\tilde{M} \longrightarrow M$ – его связное накрытие. Докажите, что это гомеоморфизм.

Задача 11.44. Пусть M – линейно связное и односвязное пространство, а $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие. Докажите, что это гомеоморфизм.

Указание. Докажите, что $\tilde{M}$ линейно связно. Пусть $x, y \in \pi^{-1}(x_0)$ – две точки, а $\tilde{\gamma}$ – путь, который их соединяет. Тогда $\gamma := \pi(\tilde{\gamma})$ это петля. Поскольку M односвязно, γ продолжается до отображения из квадрата в $X \subset M$ (докажите это). Рассмотрим прообраз этого квадрата в $\tilde{M}$, и пусть $\tilde{X}$ компонента прообраза, которая содержит $\tilde{\gamma}$. Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ это гомеоморфизм, и выведите из этого, что $x = y$.

Задача 11.45. В условиях предыдущей задачи, докажите, что любое накрытие M расщепляется.

Определение 11.13. Пусть M – любое (не обязательно линейно связное) связное топологическое престранство. M называется **односвязным**, если любое накрытие M расщепляется.

Замечание. В силу предыдущей задачи, это определение согласовано с определением односвязности для линейно связных топологических пространств, данным в листке 10.

Определение 11.14. Пусть M связно. Накрытие $\tilde{M} \longrightarrow M$ называется **универсальным**, если оно односвязно.

Задача 11.46 (!). Докажите, что универсальное накрытие есть накрытие Галуа.

Задача 11.47 (!). Докажите, что универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Указание. Пусть $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$ – два универсальных накрытия M. Поскольку $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ является накрытием $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$, оно расщепляется над $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$. Это значит, что любая связная компонента $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ изоморфно проектируется в $\tilde{M}$, $\tilde{M}'$.

Существование универсального накрытия

Задача 11.48. Пусть M линейно связно, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие, а $x \in M$ – любая точка. Докажите, что мощность множества $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем мощность $\pi_1(M)$.

Задача 11.49. Докажите, что мощность $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем мощность множества $M^{[0,1]}$ отображений из $[0,1]$ в M.

Задача 11.50 (*). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие связного M, а $x \in M$ любая точка. Докажите, что мощность $\pi^{-1}(x)$ не больше, чем $|2^{2S}|$, где $|2^{2S}|$ - мощность множества подмножеств $S \times S$.

Указание. Выберем $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$. Докажите, что найдется набор таких связных открытых множеств $\{\tilde{U}_\alpha\} \in \pi^{-1}(S)$, что $\tilde{U}_{\alpha_0}$ пересекается с объединением всех $\tilde{U}_\alpha$, не равных U_{α_0}, причем

$$\{x_1, x_2\} = \pi^{-1}(x) \cap (\bigcup \tilde{U}_\alpha)$$

Сужая базу S, если необходимо, можно предположить, что π расщепляется над $\pi(U_\alpha)$ для всех α. Докажите, что x_2 задается однозначно, если задано x_1, $\{\pi(U_\alpha)\}$, и отмечено, какие из U_α пересекаются.

Задача 11.51. Пусть M связное, а V – множество заданной ниже мощности. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех топологий, заданных на каком-то подмножестве $X \subset M \times V$ таким образом, что естественная проекция $X \longrightarrow M$ является накрытием. Докажите, что любое связное накрытие M изоморфно какому-то элементу $\mathcal{R}$, если

а. M линейно связно, а мощность V равна $|M^{[0,1]}|$

б. **(*)** Мощность V равна $|2^{2S}|$, где S - база топологии в M.

Замечание. Эта задача позволяет говорить о “множестве классов изоморфизма накрытий”. Напомним, что не все математические объекты являются множествами; так, множеством не является класс всех множеств. Чтобы доказать, что какой-то класс является множеством, надо ограничить его мощность.

Определение 11.15. Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – набор отображений на M, проиндексированный набором индексов I (возможно, бесконечным, или даже несчетным). Рассмотрим множество всех таких $(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_1}, \dots) \in \prod M_\alpha$, что $\pi_\alpha(m_\alpha) = m$ для какого-то $m \in M$. Это множество называется **расслоенным произведением** $\{M_\alpha\}$ и обозначается $\prod_M M_\alpha$.

Задача 11.52. Пусть M – топологическое пространство, а $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – набор его накрытий. Введем на $\prod_M M_\alpha$ топологию следующим образом. Пусть $U \subset M$ открыто, а $\{U_\alpha \subset M_\alpha\}$ – набор открытых множеств, накрывающих U. Докажите, что множества вида $\prod_U U_\alpha \subset \prod_M M_\alpha$ задают базу топологии на $\prod_M M_\alpha$. Докажите, что $\prod_M M_\alpha$ хаусдорфово

* Верно ли, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \longrightarrow M$ – накрытие?

! Предположим, что у каждой точки M найдется односвязная окрестность. Докажите, что естественная проекция $\prod_M M_\alpha \longrightarrow M$ – накрытие.

Определение 11.16. В такой ситуации $\prod_M M_\alpha$ называется **расслоенным произведением** M_α **над** M, либо просто произведением накрытий $M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M$.

Задача 11.53. Пусть все накрытия $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ расщепляются. Докажите, что $\prod_M M_\alpha$ тоже расщепляется.

Задача 11.54 (!). Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – накрытия Галуа. Докажите, что любая компонента связности их произведения над M – тоже накрытие Галуа.

Указание. Воспользуйтесь задачей 11.53.

Задача 11.55. Пусть $\tilde{M}$ – накрытие M. Постройте естественную биекцию между множествами $\operatorname{Mor}(\prod_M M_\alpha, \tilde{M})$ и $\prod \operatorname{Mor}(M_\alpha, \tilde{M})$

Задача 11.56 (*). Пусть $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – множество всех накрытий $S^1 \longrightarrow S^1$, $t \longrightarrow nt$, проиндексированных $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любая связная компонента $\prod_M M_\alpha$ изоморфна $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Задача 11.57. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, причем $\tilde{M}$ и M связные, $x \in M$, $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$, W – компонента связности $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$, содержащая $x_1 \times x_2$, а W_1 – компонента связности $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \times_M \tilde{M}$, содержащая $x_1 \times x_2 \times x_2$. Докажите, что естественная проекция $W_1 \longrightarrow W$ (забывание третьего аргумента) это изоморфизм.

Задача 11.58. В такой же ситуации, пусть $\{x_\alpha\}$ – набор точек в $\pi^{-1}(x)$, проиндексированных $\alpha \in I$, W – соответствующая компонента в расслоенном произведении $\prod_{M,I} \tilde{M}$ I копий $\tilde{M}$, а W_1 - компонента в $\left(\prod_{M,I} \tilde{M}\right) \times_M \tilde{M}$, содержащая $\{x_\alpha\}$ и x_0, причем $x_0 \in \{x_\alpha\}$. Докажите, что естественная проекция $W_1 \longrightarrow W$ это изоморфизм.

Задача 11.59 (!). Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – связное накрытие, а $x \in M$. Рассмотрим произведение $\prod_{M,\{\pi^{-1}(x)\}} \tilde{M}$ $\tilde{M}$ с собой, проиндексированное множеством $\pi^{-1}(x)$, и пусть $\tilde{M}_G$ – связная компонента в $\prod_{M,\{\pi^{-1}(x)\}} \tilde{M}$, содержащая произведение всех $x_\alpha \in \{\pi^{-1}(x)\}$. Докажите, что $\tilde{M}_G \times_M \tilde{M}$ расщепляется над $\tilde{M}_G$. Докажите, что $\tilde{M}_G \longrightarrow M$ – накрытие Галуа.

Замечание. Мы доказали, что любое накрытие является фактор-накрытием накрытия Галуа.

Задача 11.60. Пусть M – связное топологическое пространство, $\mathcal{R}$ – множество всех классов изоморфизма связных накрытий M, $\{M_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} M\}$ – соответствующий набор накрытий, а $\tilde{M} \subset \prod_M M_\alpha$ – компонента связности их произведения. Докажите, что для каждого связного накрытия $\tilde{M}' \longrightarrow \tilde{M}$ найдется сюрьективный морфизм накрытий $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 11.61. В условиях предыдущей задачи, докажите, что $\tilde{M}$ – накрытие Галуа.

Задача 11.62 (!). Выведите из этого, что для любого $\tilde{M} \longrightarrow M$, накрытие $\tilde{M} \times_M \tilde{M}' \longrightarrow \tilde{M}$ расщепляется.

Указание. Воспользуйтесь 11.24.

Задача 11.63 (!). Пусть M – любое связное топологическое пространство, а $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие Галуа, построенное выше. Докажите, что $\tilde{M}$ односвязно.

Замечание. Мы получили, что у любого связного топологического пространства найдется универсальное накрытие. Как было выше доказано, универсальное накрытие единственно.

Задача 11.64 (!). Пусть M линейно связно, $\tilde{M}$ – его универсальное накрытие, а $\mathrm{Gal}([\tilde{M} : M])$ – соответствующая группа Галуа. Докажите, что $\mathrm{Gal}([\tilde{M} : M])$ изоморфно фундаментальной группе M.

Определение 11.17. Фундаментальной группой топологического пространства M называется группа $\pi_1(M) := \mathrm{Gal}([\tilde{M} : M])$, где $\tilde{M}$ - универсальное накрытие.

Определение 11.18. Подгруппы $G_1, G_2 \subset G$ называются **сопряженными**, если найдется такой $g \in G$, что G_1 переводится в G_2 автоморфизмом $x \longrightarrow x^g$.

Задача 11.65 (*). Пусть $M_1 \longrightarrow M$ – некоторое накрытие, а $\tilde{M} \longrightarrow M_1 \longrightarrow M$ – универсальное накрытие. Рассмотрим подгруппу $G_1 \subset \mathrm{Gal}([\tilde{M} : M]) = \pi_1(M)$, полученную в результате применения основной теоремы теории Галуа. Докажите, что это соответствие задает биекцию между классами изоморфизма накрытий M и классами сопряженности подгрупп в $\pi_1(M)$.

Задача 11.66 (!). Найдите все накрытия окружности, с точностью до изоморфизма. Постройте их явно.

Задача 11.67 (*). Пусть M – связное топологическое пространство, все компоненты линейной связности которого односвязны. Может ли оно иметь нетривиальную фундаментальную группу?

Задача 11.68 (*). Пусть B – множество полиномов $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_0$ над $\mathbb{C}$, у которых все корни разные, а B_1 – множество всех наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ попарно различных чисел $x_i \in \mathbb{C}$. Введем на B и B_1 естественную топологию подмножества в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение $B_1 \xrightarrow{\pi} B$, $(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \prod(t - x_i)$. Докажите, что π – накрытие Галуа. Найдите его группу Галуа.

Задача 11.69 (*). Постройте связное накрытие, которое не будет накрытием Галуа.