Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ГЕОМЕТРИЯ 2: вещественные числа, часть 2.

Корни многочленов нечетной степени.

Задача 2.1 (!). Дан полином нечетной степени над $\mathbb{Q}$, $P = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + a_{2n-1}t^{2n-1} + ... + a_0$. Пусть R_P – множество всех $x \in \mathbb{Q}$ таких, что $P(t) < 0$ на отрезке $]-\infty, x]$. Докажите, что R_P непусто.

Указание. Докажите, что R_P содержит $-\max(1, \sum |a_i|)$.

Задача 2.2 (!). Докажите, что R_P – не все множество вещественных чисел.

Указание. Докажите, что дополнение $\mathbb{Q} \backslash R_P$ содержит $\max(1, \sum |a_i|)$.

Задача 2.3 (!). Докажите, что R_P - сечение Дедекинда.

Задача 2.4 (!). Докажите, что P удовлетворяет **свойству Липшица**: для любого отрезка I существует такая константа $C > 0$, что $|P(a) - P(b)| < C|a - b|$ для любых $a, b \in I$.

Задача 2.5 (!). Рассмотрим дедекиндово сечение R_P как вещественное число. Докажите, что $P(R_P) = 0$. Тем самым, любой многочлен нечетной степени над $\mathbb{R}$ имеет корень.

Указание. Докажите сначала, что $P(R_P) \leqslant 0$. Затем докажите, что $P(R_P) < 0$ противоречит задаче 2.4.

Пределы.

Определение 2.1. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – подмножество в множестве вещественных чисел, а c – вещественное число. Точка c называется **предельной точкой** последовательности A, если для каждого открытого интервала $I =]x, y[$, содержащего c, в I содержится бесконечно много элементов A.

Определение 2.2. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность вещественных чисел, а c – вещественное число. Пусть для каждого открытого интервала $I =]x, y[$, содержащего c, в I содержатся все элементы $\{a_i\}$, кроме конечного числа. Тогда говорят, что c есть **предел последовательности** $\{a_i\}$ (обозначается $c = \lim\limits_{i \to \infty} a_i$). Еще говорят, что последовательность a_i **сходится к** c, или **стремится к** c

Задача 2.6. Пусть c – предельная точка последовательности $\{a_i\}$. Докажите, что из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к c.

Задача 2.7 (*). Дана последовательность $\{a_i\}$ точек на отрезке $[x, y]$. Докажите, что у нее есть предельные точки.

Определение 2.3. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется **дискретным**, если у него нет предельных точек.

Задача 2.8 (*). Пусть $\{a_i\}$ – последовательность. Обозначим множество всех a_i за A. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится тогда и только тогда, когда A не имеет бесконечных дискретных подмножеств, и имеет единственную предельную точку.

Задача 2.9. Рассмотрим последовательность $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Докажите, что у этой последовательности нет предела.

Задача 2.10. Рассмотрим последовательность $0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$. Докажите, что эта последовательность сходится к 0.

Задача 2.11. Дана монотонно возрастающая последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$, $a_i \in \mathbb{R}$. Известно, что все a_i ограничены сверху некоторой константой C: $a_i \leqslant C$. Докажите, что эта последовательность имеет предел. Используйте определение вещественных чисел через сечения Дедекинда.

Указание. Докажите, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \sup\{a_i\}$, и воспользуйтесь существованием супремума.

Определение 2.4. Пусть $\{a_i\} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ – последовательность вещественных чисел. Говорят, что $\{a_i\}$ – **последовательность Коши,** если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[x, y]$ длины ε, который содержит все $\{a_i\}$, кроме конечного числа.

Замечание. То же самое определение используется для последовательностей Коши рациональных чисел.

Задача 2.12. Пусть последовательность $\{a_i\}$ сходится к какому-нибудь вещественному числу c. Докажите, что это последовательность Коши.

Задача 2.13. Пусть у последовательности Коши $\{a_i\}$ есть подпоследовательность, которая сходится к $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится к x.

Задача 2.14. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Рассмотрим последовательность $\{b_i\}$, $b_i = \inf_{j \geqslant k} a_i$. Докажите, что этот инфимум определен, и что последовательность b_i возрастает.

Задача 2.15. В условиях предыдущей задачи докажите, что если последовательность $\{b_i\}$ имеет предел, то $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$.

Задача 2.16 (!). Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится. Используйте определение вещественных чисел через сечения Дедекинда.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.17 (!). Пусть $\{a_i\}$ – последовательность Коши. Докажите, что $\{a_i\}$ сходится. Используйте определение вещественных чисел через последовательности Коши.

Указание. Пусть вещественное число $\{a_i\}$ представлено последовательностью Коши рациональных чисел $a_i(0), a_i(1), a_i(2), \ldots$. Перейдя к подпоследовательности, можно предполагать, что все a_i $(i > n)$ содержатся в отрезке длины 2^{-n}, и все $a_i(j)$ $(j > m)$содержатся в отрезке длины 2^{-m}. Докажите, что последовательность $\{a_i(i)\}$ – последовательность Коши, и к представленному ей вещественному числу сходится последовательность $\{a_i\}$.

Задача 2.18 (!). (теорема о двух миллиционерах) Пусть $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ – сходящиеся последовательности вещественных чисел, причем $a_i \leqslant b_i \leqslant c_i$ для всех i. Предположим, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \lim\limits_{i\to\infty} c_i = x$. Докажите, что $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = x$.

Задача 2.19 (*). Пусть последовательность $\{a_i\}$ сходится к x. Докажите, что последовательность $b_j = \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j} a_i$ сходится к x. Приведите пример, когда $\{b_j\}$ сходится, а $\{a_i\}$ не сходится.

Ряды.

Определение 2.5. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность вещественных чисел. Рассмотрим последовательность частичных сумм $\sum_{i=0}^{n} a_i$. Если эта последовательность сходится, говорят, что **ряд** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ **сходится**. В этом случае пишут $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = x$, где

$$x = \lim_{i\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Часто пишут проще: $\sum a_i = x$.

Определение 2.6. Ряд $\sum a_i$ **абсолютно сходится**, если сходится ряд $\sum |a_i|$.

Задача 2.20 (!). Дан абсолютно сходящийся ряд $\sum a_i$. Докажите, что этот ряд сходится.

Задача 2.21. Дан абсолютно сходящийся ряд $\sum a_i$. Пусть b_i – такая последовательность неотрицательных чисел, что $a_i \geqslant b_i$. Докажите, что ряд $\sum b_i$ абсолютно сходится.

Задача 2.22 (**). Пусть a_i, b_i – такие последовательности вещественных чисел, что ряды $\sum a_i^2$, $\sum b_i^2$ сходятся. Докажите, что ряд $\sum a_i b_i$ сходится.

Задача 2.23 (*). Пусть a_i – последовательность положительных вещественных чисел. Предел последовательности произведений

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} (1 + a_i)$$

обозначается $\prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i)$. Если этот предел существует, то говорят, что бесконечное произведение $\prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i)$ сходится. Пусть произведение $\prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i)$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится.

Задача 2.24 (*). Докажите, что бесконечное произведение $\prod_{i=0}^{\infty}(1 + \frac{1}{3^n})$ сходится.

Задача 2.25 (**). Пусть ряд $\sum a_i$ сходится. Докажите, что $\prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i)$ тоже сходится.

Задача 2.26 (!). Пусть $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots$ – монотонно убывающая последовательность положительных вещественных чисел, которая стремится к нулю. Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$. Докажите, что этот ряд сходится. Такой ряд называется **знакопеременным**.

Задача 2.27. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

Указание. Воспользуйтесь соотношением $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

Задача 2.28. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится.

Задача 2.29. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{n!}$ сходится.

Задача 2.30 (!). Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится. Вычислите, к чему он сходится.

Задача 2.31 (*). Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2.32 (**). Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ в полном упорядоченном поле A. Сходится ли эта сумма для всех $x \in A$?