Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ГЕОМЕТРИЯ 5: Теоретико-множественная топология.

Определение 5.1. Пусть дано пространство M, и выделен набор подмножеств $S \subset M$, называемых **открытыми подмножествами**. Пара (M, S) (а также само M) называется **топологическим пространством**, если выполнены следующие условия.

1. Пустое множество и само M открыты.
2. Объединение любого числа открытых подмножеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых подмножеств открыто.

Отображение $\varphi : \ M \longrightarrow M'$ топологических пространств называется **непрерывным**, если прообраз каждого открытого множества открыт. Непрерывные отображения также называются **морфизмами** топологических пространств. **Изоморфизм** топологических пространств – это такой морфизм $\varphi : \ M \longrightarrow M'$, что существует морфизм $\psi : \ M' \longrightarrow M$, обратный к φ (т.е. $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ – тождественные морфизмы). Изоморфизм топологических пространств традиционно называется **гомеоморфизмом**.

Подмножество $Z \subset M$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто. **Окрестность** точки $x \in M$ – это любое открытое подмножество M, которое ее содержит. **Окрестность** подмножества $Z \subset M$ – это любое открытое подмножество M, которое его содержит.

Задача 5.1. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 5.2 (!). Пусть M – некоторое множество, а S – множество всех подмножеств M. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется **дискретной**. Опишите множество всех непрерывных отображений из M в заданное топологическое пространство.

Задача 5.3 (!). Пусть M – некоторое множество, а S – множество из двух подмножеств M: пустого множества и самого M. Докажите, что S задает на M топологию. Эта топология называется **кодискретной**. Опишите множество всех непрерывных отображений из M в пространство с дискретной топологией.

Задача 5.4. Постройте непрерывную биекцию топологических пространств, которая не является гомеоморфизмом.

Задача 5.5. Дано подмножество Z топологического пространства M. Открытые подмножества в Z задаются пересечениями вида $Z \cap U$, где U открыто в Z.

а. Докажите, что это задает топологию на Z. Докажите, что естественное вложение $Z \hookrightarrow M$ непрерывно.

б. **(*)** Все ли непрерывные вложения получаются таким образом?

Определение 5.2. Такая топология на $Z \subset M$ называется **индуцированной с** M. Подмножество любого топологического пространства мы будем рассматривать как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Определение 5.3. Пусть M – топологическое пространство, а S_0 – такой набор открытых множеств, что любое открытое множество можно получить как объединение множеств из S_0. Тогда S_0 называется **базой** M.

Задача 5.6. Опишите все базы для M с дискретной топологией; для M с кодискретной топологией.

Определение 5.4. Пусть M – метрическое пространство. Напомним, что подмножество $U \subset M$ называется **открытым**, если для каждой точки $u \in U$, U содержит шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в u.

Задача 5.7. Докажите, что это определение задает топологию на метрическом пространстве.

Определение 5.5. Топологическое пространство называется **метризуемым** если его можно получить из метрического пространства вышеописанным способом.

Задача 5.8. Докажите, что дискретное топологическое пространство метризуемо, а кодискретное – нет.

Задача 5.9. Докажите, что открытые шары в метрическом пространстве M открыты. Докажите, что открытые шары задают базу топологии на M.

Задача 5.10 (!). Пусть M – топологическое пространство, а S, S' – две топологии на M. Предположим, что для каждой точки $m \in M$ и окрестности $U' \ni m$, открытой в топологии S', найдется окрестность $U \ni m, U \subset U'$, открытая в топологии S. Докажите, что тождественное отображение $(M, S) \xrightarrow{i} (M, S')$ непрерывно. Приведите пример, когда в такой ситуации i не является гомеоморфизмом.

Замечание. В такой ситуации иногда говорится, что топология, заданная S', **сильнее** топологии, заданной S.

Задача 5.11. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой ν, как в листке Геометрия 3. Эта норма задает метрику, а следовательно, и топологию на $\mathbb{R}^n$. Обозначим эту топологию через S_ν. Предположим, что ν, ν' – такие две нормы, что для какой-то фиксированной константы $C \in \mathbb{R}$ всегда имеем $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$. Докажите, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.12 (*). Предположим, что ν, ν' – такие две нормы на $\mathbb{R}^n$, что тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Докажите, что найдется такая константа C, что $C^{-1}\nu'(x) < \nu(x) < C\nu'(x)$.

Задача 5.13 (*). Пусть V – конечномерное векторное пространство, наделенное положительно определенной билинейной формой g. Рассмотрим V как метрическое пространство, с метрикой d_g, построенной в листке Геометрия 3. Обозначим соответствующую топологию через S_g. Докажите, что топология на V не зависит от выбора g, то есть что для любых g, g', тождественное отображение из V в себя задает гомеоморфизм $(V, S_g) \longrightarrow (V, S_{g'})$.

Задача 5.14 (**). Пусть V - конечномерное пространство с нормой ν. Докажите, что топология S_ν не зависит от выбора нормы ν: тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя всегда задает гомеоморфизм $(\mathbb{R}^n, S_\nu) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, S_{\nu'})$. Верно ли это, когда V бесконечномерно?

Определение 5.6. Рассмотрим метрику d на $\mathbb{R}^n$, заданную нормой

$$|(\alpha_1, ...\alpha_n)| = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}.$$

Топология на $\mathbb{R}^n$, связанная с d, называется **естественной**. **Естественная топология** на подмножествах в $\mathbb{R}^n$ – это топология, индуцированная с $\mathbb{R}^n$.

Задача 5.15. Рассмотрим $\mathbb{R}$ с естественной топологией. Пусть M пространство с дискретной топологией, M' – пространство с кодискретной топологией. Найдите множество всех непрерывных отображений

а. Из $\mathbb{R}$ в M

б. Из M в $\mathbb{R}$

в. Из M' в $\mathbb{R}$

г. Из $\mathbb{R}$ в M'.

Задача 5.16. Пусть $\varphi: M \longrightarrow M'$ – некоторое отображение топологических пространств. Верно ли, что если φ непрерывно, то прообраз любого замкнутого множества замкнут? Верно ли, что если прообраз любого замкнутого множества замкнут, то отображение непрерывно?

Задача 5.17. Приведите пример такого непрерывного отображение топологических пространств, что образ открытого множества не открыт. Приведите пример такого непрерывного отображение топологических пространств, что образ замкнутого множества не замкнут.

Определение 5.7. Пусть M – топологическое пространство, $Z \subset M$ – произвольное подмножество, $\overline{Z}$ – пересечение всех замкнутых подмножеств M, содержащих Z. Тогда $\overline{Z}$ называется **замыканием** Z.

Задача 5.18. Докажите, что $\overline{Z}$ замкнуто.

Определение 5.8. Пусть M – топологическое пространство. Следующие условия T0-T4 называются **условиями отделимости.**

T0. Пусть даны любые две несовпадающие точки $x, y \in M$, тогда по крайней мере у одной из них есть окрестность, которая не содержит другую.

T1. Любая точка M замкнута.

T2. Любые две различные точки x, $y \in M$ обладают окрестностями U_x, U_y, которые не пересекаются.

T3. Для любой точки $y \in M$, любая окрестность $U \ni y$ содержит открытую окрестность $U' \ni y$, замыкание которой содержится в U.

T4. Для любого замкнутого подмножества $Z \in M$, любая окрестность $U \supset Z$ содержит открытую окрестность $U' \supset Z$, замыкание которой содержится в U.

Условие T2 известно как **аксиома Хаусдорфа**. Топологическое пространство, удовлетворяющее условию T2, называется **хаусдорфовым**.

Задача 5.19. Докажите, что условие T1 эквивалентно следующему: для любых двух несовпадающих точек $x, y \in M$, найдется окрестность y, не содержащая x.

Задача 5.20. Докажите, что условие T4 эквивалентно следующему: у любых двух непересекающихся замкнутых множеств $X, Y \subset M$, найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 5.21. Пусть M – топологическое пространство. Определим на M отношение эквивалентности следующим образом: x эквивалентно y тогда и только тогда, когда $x \in \overline{\{y\}}$ и $y \in \overline{\{x\}}$. Обозначим множество классов эквивалентности через M'.

а. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности. Докажите, что M удовлетворяет условию T0 тогда и только тогда, когда $M = M'$.

б. Скажем, что подмножество $U \subset M'$ открыто тогда и только тогда, когда открыт его прообраз при отображении $M \to M'$. Докажите, что это задает топологию на M'. Удовлетворяет ли она условию T0?

в. Докажите, что открытые подмножества в M – это в точности прообразы открытых подмножеств в M'.

г. Пусть топология на M кодискретная. Чему равно M'?

Задача 5.22. Выполняются ли условия T0-T4 в пространстве с дискретной топологией? С кодискретной?

Задача 5.23. Докажите, что условия T0-T4 выполняются в $\mathbb{R}$.

Задача 5.24. Докажите, что условие T0 следует из T1, а T1 следует из T2.

Задача 5.25. Приведите пример пространства, не удовлетворяющего условию T1. Приведите пример нехаусдорфова пространства, где все точки замкнуты.

Задача 5.26 (*). Приведите пример пространства, удовлетворяющего T1, и такого, что любые два непустых открытых множества пересекаются.

Задача 5.27 (*). Докажите, что из T1 и T3 следует T2.

Задача 5.28 (*). Приведите пример пространства, где выполняется T4, но не выполняется T1.

Задача 5.29. Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнены условия T1, T2, T3.

Задача 5.30 (*). Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие T4.

Задача 5.31 (*). Пусть множество M конечно.

а. Найдите все топологии на M, удовлетворяющие условию T1.

б. Бывают ли на M топологии, которые не удовлетворяют T1?

в. Бывают ли на M топологии, которые не удовлетворяют T1, но удовлетворяют T0?

Определение 5.9. Множество M называется **частично-упорядоченным**, если на нем задано отношение $x \leq y$ ("x меньше либо равно y) с такми свойствами:

1. Если $x \leq y$, а $y \leq z$, то $x \leq z$.
2. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

Задача 5.32 (*). а. Пусть M – частично-упорядоченное множество; будем говорить, что подмножество $S \subset M$ открыто, если вместе с любым элементом $x \in S$ оно содержит все $y \in M$, для которых $y \leq x$. Докажите, что это задает топологию на M. Когда эта топология удовлетворяет свойству T0? а свойству T1?

б. Пусть M – конечное множество, и на нем задана топология, удовлевоворяющая свойству T0. Докажите, что она происходит из какого-то частичного порядка на M.

Определение 5.10. Пусть $Z \subset M$ – подмножество в топологическом пространстве. Подмножество Z называется **плотным**, если Z пересекается с каждым открытым подмножеством M.

Задача 5.33 (!). Докажите, что Z плотно тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{Z}$ есть все M.

Задача 5.34. Найдите все плотные подмножества в пространстве с дискретной топологией; с кодискретной топологией.

Задача 5.35. Докажите, что $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Задача 5.36 (!). Подмножество Z в топологическом пространстве M называется **нигде не плотным**, если для любого открытого подмножества $U \subset M$, подмножество $Z \cap U$ не плотно в U. Докажите, что Z нигде не плотно тогда и только тогда, когда $M \backslash \overline{Z}$ плотно в M.

Задача 5.37 (*). Постройте континуальное нигде не плотное подмножество в отрезке $[0, 1]$ с естественной топологией.

Задача 5.38. Найдите все нигде не плотные подмножества в пространсте с дискретной топологией; в пространстве с кодискретной топологией.

Определение 5.11. Пусть M – топологическое пространство, $x \in M$ – произвольная точка. База окрестностей x – это такой набор B окрестностей x, что любая окрестность $U \ni x$ содержит какую-то окрестность из B.

Задача 5.39. Пусть в топологическом пространстве M задан такой набор открытых подмножеств B, что для любой точки $x \in M$, совокупность всех $U \in B$, содержащих x, образует базу окрестностей x. Докажите, что B – база топологии M.

Определение 5.12. Пусть M – топологическое пространство. На M можно наложить два условия счетности. Если у каждой точки M найдется счетная база окрестностей, то говорят, что в M **выполняется первая аксиома счетности**. Если у M найдется счетная база открытых множеств, то говорят, что для M выполняется **вторая аксиома счетности**, либо что M – **пространство со счетной базой**. Если в M найдется плотное счетное множество, то говорят, что M **сепарабельно**.

Задача 5.40. Дано пространство M с дискретной топологией. Докажите, что в M выполняется первая аксиома счетности.

Задача 5.41. Пусть топологическое пространство M имеет счетную базу. Докажите, что оно сепарабельно.

Задача 5.42 (*). Пусть метризуемое топологическое пространство M сепарабельно. Докажите, что M имеет счетную базу.

Задача 5.43 (!). Дано метризуемое топологическое пространство. Докажите, что оно имеет счетную базу окрестностей в каждой точке.

Задача 5.44. Постройте несепарабельное метризуемое топологическое пространство.

Задача 5.45 (**). Приведите пример счетного хаусдорфова пространства без счетной базы.

5.1. Топология и сходимость

Топологические пространства были изобретены как язык, на котором удобно говорить о непрерывных функциях. В листке Геометрия 4 мы определили непрерывную функцию как функцию, сохраняющую пределы сходящихся последовательностей. К топологии можно подходить с аксиоматической точки зрения, приведенной выше, либо с точки зрения геометрической интуиции, определяя топологию на пространстве посредством задания класса сходящихся последовательностей, а напрерывные отображения – как отображения, сохраняющие пределы.

Второй подход к топологии (при всех его очевидных преимуществах) наталкивается на теоретико-множественные трудности – если в нашем пространстве нет счетной базы, приходится пользоваться полностью упорядоченными несчетными последовательностями. В дальнейшем мы будем работать в основном в пространствах со счетной базой окрестностей точки, и в такой ситуации весьма удобно определять топологию и непрерывность через пределы последовательностей.

Определение 5.13. Пусть M – топологическое пространство, $Z \subset M$ – бесконечное подмножество. Точка $x \in M$ называется **предельной точкой** для Z, если в каждой окрестности x содержится $z \in Z$. **Пределом** последовательности $\{x_i\}$ называется такая точка x, что в любой окрестности x содержатся почти все x_i. Последовательность называется **сходящейся**, если у ней есть предел.

Задача 5.46. Найдите все сходящиеся последовательности в пространстве с дискретной топологией. В пространстве с кодискретной топологией.

Задача 5.47. Пусть M – хаусдорфово. Докажите, что у любой последовательности есть не более одного предела.

Задача 5.48 (*). Верно ли обратное (т.е. вытекает ли хаусдорфовость из единственности предела)? А если в M есть счетная база окрестностей точки?

Задача 5.49. Пусть в M предел любой последовательности единственен. Докажите, что в M выполнено условие отделимости T1.

Задача 5.50. Пусть задано непрерывное отображение $f: M \longrightarrow M'$ и некоторое подмножество $Z \subset M$. Докажите, что f переводит предельные точки Z в предельные точки $f(Z)$. Докажите, что f переводит пределы в пределы.

Задача 5.51 (!). Пусть отображение переводит предельные точки в предельные точки. Докажите, что оно непрерывно.

Задача 5.52. Пусть дано пространство M с счетной базой окрестностей у каждой точки. Рассмотрим произвольное подмножество $Z \subset M$. Докажите, что замыкание Z есть множество пределов всех последовательностей из Z.

Задача 5.53 (!). Пусть даны пространства M, M' со счетной базой окрестностей у каждой точки, и отображение $f: M \longrightarrow M'$, сохраняющее пределы последовательностей. Докажите, что f непрерывно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.54 (*). А что, если в предыдущей задаче не требовать счетной базы окрестностей точки для M? Для M'?

Задача 5.55 (*). Пусть дано множество M, и некоторые последовательности элементов из M объявлены **сходящимися** к точкам из M (это записывается в виде $x \in \lim x_i$; при этом пределов последовательности может быть больше одного). Пусть сходимость последовательностей удовлетворяет следующим условиям

(i) Предел последовательности $x, x, x, x, x, ...$ содержит x.

(ii) Если $x \in \lim x_i$, то предел любой подпоследовательности $\{x_i\}$ определен и содержит x.

(iii) Выберем бесконечное число элементов последовательности $\{x_i\}$, переставим их местами в произвольном порядке, и обозначим полученную последовательность за $\{y_i\}$. Если $x \in \lim x_i$, то $x \in \lim y_i$.

(iv) Если $x \in \lim x_i$ и $x \in \lim y_i$, то последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ сходится к x.

а. Определим замкнутые подмножества в M как подмножества $Z \subset M$, содержащие все пределы всех последовательностей $\{x_i\} \in Z$. Определим открытые подмножества как дополнения к замкнутым. Докажите, что это задает топологию на M.

б. Пусть дана топология S на M со счетной базой окрестностей любой точки. Определим пределы последовательностей, исходя из этой топологии, как делалось выше. Докажите, что выполняются условия (i)-(iv). Пусть S' – топология, полученная из пределов, как в части (а). Докажите, что топологии S' и S совпадают.

в. Возьмем несчетное множество со следующей топологией: открытые множества есть дополнения к конечным (такая топология называется кофинитной). Пусть S' - топология, построенная, исходя из пределов, как выше. Найдите S'. Докажите, что в S' не выполнена первая аксиома счетности.