Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ГЕОМЕТРИЯ 7: Общая топология: компактность

Определение 7.1. Пусть M – топологическое пространство. Назовем **покрытием** M любой набор открытых подмножеств $U_i \subset M$ (возможно, бесконечный, или даже несчетный), для которого $M = \bigcup U_i$. Пространство M называется **компактным**, или просто **компактом**, если из каждого открытого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $Z \subset M$ топологического пространства M называется комактным, если оно компактно в индуцированной топологии.

Задача 7.1. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ компактен. Когда компактно множество с дискретной топологией? С кодискретной топологией?

Задача 7.2 (*). Пусть в M задана такая топология: открытые множества это дополнения к конечным подмножествам (такая топология называется **кофинитной**). Найдите все компактные подмножества в M.

Задача 7.3 (!). Пусть Z компактно, а $Z' \subset Z$ замкнуто в Z. Докажите, что Z' тоже компактно. Следует ли из компактности подмножества его замкнутость?

Задача 7.4. Пусть топологическое пространство M хаусдорфово, Z – произвольное подмножество M, а $x \notin Z$ – любая точка.

а. Докажите, что у Z есть такое открытое покрытие $\{U_i\}$, что замыкание каждого U_i не содержит x.

б. **(*)**Приведите пример нехаусдорфова T1-пространства, где это не выполнено.

Задача 7.5 (!). Пусть M хаусдорфово. Докажите, что любое компактное подмножество в M замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.6. Даны два компактных подмножества хаусдорфова пространства. Докажите, что у них есть непересекающиеся открытые окрестности.

Задача 7.7 (!). Дано компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что для него выполняется условие отделимости T4.

Определение 7.2. Топологическое пространство называется **локально компактным**, если у любой точки найдется окрестность, замыкание которой компактно.

Задача 7.8. Дано локально компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что в нем выполнено условие T3.

Задача 7.9 (**). Существует ли локально компактное топологическое пространство, в котором не выполнено первое условие счетности?

Задача 7.10 (**). Существует ли счетное топологическое пространство, которое не локально компактно?

Задача 7.11. Дано топологическое пространство X. Обозначим через $\widehat{X}$ множество $X \bigcup \{\infty\}$ (X, к которому добавили еще одну точку, обозначенную как ∞) со следующей топологией: $U \subset \widehat{X}$ открыто либо если $\infty \in U$, а дополнение к U компактно как подмножество X, либо если $\infty \notin X$, и U открыто как подмножество X. Докажите, что это действительно топология, и что пространство $\widehat{X}$ компактно.

Определение 7.3. Пространство $\widehat{X}$ называется **одноточечной компактификацией** пространства X.

Задача 7.12 (*). Пусть X хаусдорфово. Верно ли, что $\widehat{X}$ тоже хаусдорфово?

Задача 7.13. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с естественной топологией. Докажите, что $\widehat{X}$ гомеоморфно n-мерной сфере.

Задача 7.14. Дано топологическое пространство M, и подмножество Z в нем. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

(i) У любой точки $z \in Z$ существует окрестность $U \ni z$, не содержащая других точек из Z.

(ii) M индуцирует на Z дискретную топологию.

(iii) Z не содержит своих предельных точек.

Определение 7.4. Замкнутое подмножество $Z \subset M$, удовлетворяющее одному из условий задачи 7.14, называется **дискретным**.

Задача 7.15. Дано бесконечное дискретное подмножество $Z \subset M$ хаусдорфова топологического пространства. Докажите, что M некомпактно.

Пусть дан набор Z_i подмножеств множества M. Будем говорить, что он **неполный**, если для любого конечного поднабора $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ пересечение $Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_k$ непусто. Под **монотонным набором** Z_i подмножеств множества M будем понимать набор подможеств, линейно упорядоченный по включению (т.е. для любых Z_i, Z_j из нашего набора $Z_i \subset Z_j$ или $Z_j \subset Z_i$).

Задача 7.16. Докажите, что топологическое пространство M компактно тогда и только тогда, когда любой неполный набор замкнутых подмножеств $Z_i \subset M$ имеет непустое пересечение $\cap_i Z_i$.

Задача 7.17. Докажите, что если топологическое пространство M компактно, то любой монотонный набор непустых замкнутых подможеств $Z_i \subset M$ имеет непустое пересечение $\cap_i Z_i$.

Задача 7.18 (!). Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда у M нет бесконечных дискретных подмножеств.

Указание. Если M содержит бесконечное дискретное подмножество, из задачи 7.17 следует, что M некомпактно. Если, наоборот, M некомпактно, то у M есть счетное покрытие S, такое, что никакое конечное подмножество S не покрывает M. в $M \backslash W_\alpha$. По определению, m_α лежит в U_α и не лежит в объединении всех остальных $U \in S$. Рассмотрим множество $\{m_\alpha\}$. Пусть у него есть предельная точка m. Возьмем $U \in S$, содержащее m. Тогда U содержит бесконечное количество точек из $\{m_\alpha\}$ – противоречие.

Задача 7.19. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что M компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек из M имеет предельную точку.

Задача 7.20 (*). Дано топологическое пространство M, не обязательно хаусдорфово.

а. Может ли компактное подмножество M содержать бесконечное дискретное подмножество?

б. Может ли существовать ли некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

в. **(**)** Пусть M хаусдорфово. Существует ли некомпактное подмножество M, не содержащее бесконечных дискретных подмножеств?

Задача 7.21 (!). Пусть $f: \ M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что для любого компактного подмножества $Z \subset M$, $f(Z)$ всегда компактно.

Задача 7.22. Пусть дано подмножество $Z \subset \mathbb{R}$.

а. Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограниченно (ограниченно - значит содержится в некотором отрезке $[a, b]$).

б. Докажите, что Z компактно тогда и только тогда, когда любое его подмножество имеет супремум и инфимум в Z.

Задача 7.23 (!). Пусть $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение топологических пространств. Докажите, что f достигает максимума и минимума на любом компактном подмножестве M.

Задача 7.24 (*). Пусть дано некомпактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, которое удовлетворяет свойству отделимости T4. Постройте непрерывную функцию $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$, которая не достигает максимума.

Указание. Пусть $\{x_i\}$ – счетное дискретное подмножество M. Воспользовавшись свойством T4, постройте набор таких окрестностей $U_i \supset x_i$, что замыкание U_i не пересекается с замыканием $\bigcup_{j \neq i} U_j$. Теперь примените лемму Урысона к замкнутым множествам $\{x_i\}$, $M \backslash U_i$, и просуммируйте полученные функции Урысона f_i с правильно подобранными коэффициентами.

Задача 7.25. Пусть $f: \ M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Докажите, что f переводит замкнутые множества в замкнутые.

Задача 7.26. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – непрерывное отображение топологических пространств, M компактно, а N хаусдорфово. Предположим, что f взаимно однозначно. Докажите, что f – гомеоморфизм.

Задача 7.27. Придумайте такое непрерывное взаимно однозначное отображение топологических пространств $f: M \longrightarrow N$, что M компактно, но f – не гомеоморфизм. (N не хаусдорфово).

Компакты и произведения

Определение 7.5. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологических пространств называется **собственным**, если для каждого компактного $K \subset Y$ прообраз $f^{-1}(K) \subset X$ компактен.

Задача 7.28 (!). Пусть пространство Y хаусдорфово и имеет счетную базу. Докажите, что любое собственное отображение $f: X \to Y$ переводит замкнутые подмножества X в замкнутые подможества Y.

Указание. Пусть есть замкнутое $Z \subset Y$, образ которого не замкнут. Выберите последовательность точек $y_i \in f(Z)$, которая сходится к точке $y \in Y$, не лежащей в $f(Z)$.

Задача 7.29 (*). Верно ли утверждение предыдущей задачи без предположения счетной базы?

Задача 7.30 (*). Пусть непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологических пространств переводит замкнутые множества в замкнутые, а прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$ компактен. Докажите, что отображение f собственное.

Указание. Воспользуйтесь критерием компактности из задачи 7.16.

Определение 7.6. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется **замкнутым**, если образ любого замкнутого подмножества замкнут. Отображение называется **универсально замкнутым**, если для любого непрерывного отображения $g: Z \to Y$ индуцированное отображние $X \times_Y Z \to Z$ замкнуто (здесь $X \times_Y Z$ – это подмножество в $X \times Z$, состоящее из пар $\langle x, z\rangle$, для которых $f(x) = g(z)$).

Задача 7.31 (*). Пусть непрерывное отображние $F: X \to Y$ универсально замкнуто. Докажите, что оно собственно.

Указание. Воспользовавшись задачей 7.30, сведите все к случаю, когда Y состоит из одной точки. Далее воспользуйтесь задачей 7.18: если в X есть бесконечное дискретное подмножество M, то возьмите $Z = \widehat{M}$, т.е. одноточечную компактификацию M, и придите к противоречию.

Задача 7.32 (!). Пусть X, Y – компактные топологические пространства. Докажите, что произведение $X \times Y$ компактно.

Указание. Воспользовавшись тем, что множества вида $U \times V$, U открыто в X, V открыто в Y задают базу топологии на $X \times Y$, докажите сначала, что достаточно рассматривать покрытия $X \times Y$ множествами такого вида. Затем для каждой точки $y \in Y$ выберите конечное подпокрытие подмножества $X \times \{y\} \subset X \times Y$, состоящее из каких-то множеств $U_i \times V_i$, и заметьте, что множества $V_y = \cap V_i$ образуют открытое покрытие пространства Y.

Таким образом, проекция $X \times Y \to Y$ при любом Y и компакном X – собственное отображение.

Задача 7.33. Дано подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что следующие свойства равносильны

(i) X компактно

(ii) X замкнуто и ограниченно (т.е. содержится в каком-то шаре).

Теорема Тихонова

Задача 7.34. Пусть дана последовательность $a_i(n)$ отображений из $\mathbb{N}$ в $[0,1]$. Докажите, что можно выбрать такую подпоследовательность $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots$, что $\{a_{i_k}(n)\}$ сходится для любого n.

Задача 7.35 (!). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$ компактен.

Задача 7.36 (*). Дано топологическое пространство M. Пусть задано такое (возможно, несчетное) множество $\{V_\alpha\}$ покрытий M, что каждое V_α содержит $V_{\alpha'}$ либо содержится в нем (иначе говоря, $\{V_\alpha\}$ – набор покрытий, получающихся друг из друга присоединением какихто элементов). Пусть из каждого V_α нельзя выбрать конечное подпокрытие. Докажите, что из объединения всех V_α тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 7.37 (*). Используя лемму Цорна, докажите, что у всякого некомпактного подмножества $X \subset M$ найдется покрытие $\{V_\alpha\}$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия, а если добавить к $\{V_\alpha\}$ любое не содержащееся в нем открытое множество, то из полученного покрытия можно будет выбрать конечное подпокрытие.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Мы будем называть такие покрытия **максимальными**.

Задача 7.38 (*). Пусть дано максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$ некомпактного топологического пространства M. Докажите, что если открытые множества U_1, U_2 не лежат в $\{V_\alpha\}$, и их пересечение непусто, то оно тоже не лежит в $\{V_\alpha\}$. Докажите, что любое непустое конечное пересечение открытых множеств, не лежащих в $\{V_\alpha\}$, тоже не принадлежит $\{V_\alpha\}$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 7.39 (*). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии R. Пусть дано некомпактное подмножество $X \subset M$ и максимальное покрытие $\{V_\alpha\}$. Докажите, что в $\{V_\alpha\}$ можно выбрать подпокрытие из R.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Мы получили следующую теорему (теорема Александера о предбазе). Пусть в топологическом пространстве M задана предбаза топологии S. Тогда подмножество $X \subset M$ компактно тогда и только тогда, когда из любого покрытия X элементами из S можно выбрать конечное подпокрытие. Теорема Александера использует аксиому выбора и (как показал Кэли) эквивалентна ей.

Задача 7.40 (*). Выведите из этого, что тихоновский куб $[0,1]^I$ компактен для любого множества I.

Указание. Рассмотрите предбазу для топологии на тихоновском кубе, составленную из подмножеств вида $[0,1]\times[0,1]\times\dots\times]a,b[\times[0,1]\times\dots$ (на одном месте стоит открытый интервал). Воспользуйтесь теоремой Александера.

Замечание. Компактность тихоновского куба эквивалентна такому утверждению. Рассмотрим пространство $\operatorname{Map}(I,[0,1])$ отображений из множества I в отрезок $[0,1]$, с топологией поточечной сходимости. Тогда $\operatorname{Map}(I,[0,1])$ компактно. В частности, из любой последовательности $\{a_i(x)\}$ отображений можно выбрать такую подпоследовательность $\{a_{i_k}(x)\}$, что $\{a_{i_k}(x)\}$ сходится в любом $x \in I$.

Определение 7.7. Пусть M – топологическое пространство, I – некоторое множество, а M^I – пространство отображений из I в M, то есть произведение I копий M. Для $x \in I$ и открытого множества $U \subset M$ рассмотрим подмножество $U(x) \subset M^I$, состоящее из всех отображений, переводящих x в U. Определим на M^I топологию с предбазой, состоящей из всех $U(x)$. Такая топология называется **тихоновской** (также **слабой** или **топологией поточечной сходимости**).

Задача 7.41 (*). Пусть M компактно. Выведите из теоремы Александера, что M^I с тихоновской топологией компактно.

Основная теорема алгебры

Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ – полином положительной степени с комплексными коэффициентами. Мы рассматриваем P как функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Как топологическое пространство, $\mathbb{C}$ отождествляется с $\mathbb{R}^2$.

Задача 7.42. Докажите, что P непрерывен.

Задача 7.43 (!). Докажите, что если $|x| > 2\max(1, \sum|a_i|)$, то $\frac{|P(x)-x^n|}{|x^n|} < 1/2$.

Задача 7.44 (!). Докажите, что если $|x| > 2R\max(1, \sum|a_i|)$, то $|P(x)| > R^n$.

Задача 7.45 (!). Выведите из этого, что $|P|$ достигает локального минимума в точке $a \in \mathbb{C}$.

Указание. Мы приблизили многочлен $|P|$ многочленом x^n, скорость роста которого нам известна. Из этого мы вывели, что $|P(x)| > R^n$, когда $|x|$ достаточно велик. Поэтому минимум $|P|$ на круге $|x| \leqslant R$ достигается внутри круга, а не на его границе.

Для упрощения обозначений, мы будем в дальнейшем предполагать, что минимум $|P|$ достигается в нуле. Мы хотим доказать, что минимум $|P|$ равен нулю. Пусть это не так. Пусть k – самое маленькое число среди $1,2,3,\dots,n$, для которого $a_k \neq 0$. Домножив P на a_0^{-1}, и сделав замену $x = z\sqrt[k]{a_k^{-1}}$, мы получим многочлен вида

$$Q(z) = 1 + z^k + b_{k+1}z^{k+1} + b_{k+2}z^{k+2} + \dots$$

Задача 7.46. Докажите, что для любого такого комплексного z, что $|z| < 1$, выполняется

$$|Q(z) - 1 - z^k| < |z^{k+1}|(\sum|b_i|).$$

Задача 7.47 (!). Докажите, что для любого такого комплексного числа z, что $|z| < \frac{1}{2}\max\left(1, \sum |b_i|\right)^{-1}$, выполняется

$$\frac{|Q(z) - 1 - z^k|}{|z^k|} < \frac{1}{2}.$$

Задача 7.48 (!). Выведите из этого, что для любого положительного вещественного $\varepsilon < \frac{1}{2}\max\left(1, \sum |b_i|\right)^{-1}$ и любого комплексного z, для которого $z^k = -\varepsilon$, выполняется

$$|Q(z) - 1 + \varepsilon| < \varepsilon/2.$$

Замечание. В окрестности нуля, мы приблизили Q многочленом $1 - z^k$. Пользуясь этим приближением, мы находим, что $|Q(\sqrt[k]{-\varepsilon})| < |Q(0)|(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)$ для достаточно малых ε. Следовательно, локальный минимум многочлена это всегда 0.

Задача 7.49 (!). Докажите Основную Теорему Алгебры: каждый многочлен P положительной степени имеет корень в $\mathbb{C}$.