Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

ГЕОМЕТРИЯ 8: Поточечная и равномерная сходимость

На протяжении этого листка, разрешается пользоваться следующей формой теоремы Тихонова. Пусть X – компактное топологическое пространство, I – произвольное множество, а X^I – пространство отображений из I в X, с топологией поточечной сходимости. Тогда X^I компактно.

Задача 8.1. Рассмотрим пространство функций из отрезка в отрезок, с топологией поточечной сходимости. Докажите, что предел непрерывных функций может быть разрывен.

Определение 8.1. Пусть X, Y – метрические пространства, а $\{f_\alpha\}$ – набор непрерывных отображений из X в Y. Множество $\{f_\alpha\}$ называется **равномерно непрерывным**, если для каждого ε найдется такое δ, что образ любого δ-шара под действием любого f_α содержится в некотором ε-шаре (возможно, зависящим от f_α).

Задача 8.2. Пусть дано отображение $f: X \longrightarrow Y$ метрических пространств, которое переводит последовательности Коши в последовательности Коши. Докажите, что f непрерывно как отображение топологических пространств. Всякое ли непрерывное отображение переводит последовательности Коши в последовательности Коши?

Задача 8.3 (!). Пусть X, Y – метрические пространства, а $\{f_i\}$ – равномерно непрерывная последовательность непрерывных отображений из X в Y. Предположим, что $\{f_i\}$ сходится к f в топологии поточечной сходимости. Докажите, что f непрерывна.

Указание. Докажите, что f равномерно непрерывна, с теми же самыми числами ε, δ, что и $\{f_i\}$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Зафиксируем компактные метрические пространства X, Y, и пусть $\operatorname{Map}(X,Y)$ – множество непрерывных отображений из X в Y.

Задача 8.4. Для любых $f, g \in \operatorname{Map}(X,Y)$ определим $d_{\sup}(f,g)$ как $\sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Докажите, что $d_{\sup}(f,g)$ корректно определено и задает метрику на $\operatorname{Map}(X,Y)$.

Определение 8.2. Эта метрика называется sup-метрикой на $\operatorname{Map}(X,Y)$.

Задача 8.5 (!). Предположим, что равномерно непрерывная последовательность отображений $\{f_i\} \subset \operatorname{Map}(X,Y)$ поточечно сходится к f. Докажите, что она сходится к f в топологии, заданной sup-метрикой.

Указание. Пусть $\sup_{x\in X} d(f(x), f_i(x)) > C$ для любого i. Найдите сходящуюся последовательность таких $\{x_i\}$, что $d(f(x_i), f_i(x_i)) > C$, и пусть x – ее предел. В силу равномерной непрерывности, $d(f_i(x_i), f_i(x))$ стремится к нулю. Воспользовавшись неравенством треугольника

$$d(f_i(x), f(x)) + d(f_i(x_i), f_i(x)) \geqslant d(f(x), f_i(x_i)),$$

получите противоречие.

Задача 8.6 (!). (теорема Арцела-Асколи) Пусть дано замкнутое (в смысле sup-метрики) и равномерно непрерывное подмножество $\Psi \subset \mathrm{Map}(X, Y)$. Докажите, что Ψ компактно.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Тихонова и предыдущей задачей. Как и говорилось ранее, предполагается, что X и Y компактны!

Задача 8.7 (**). Придумайте независимое от теоремы Тихонова (а следовательно, аксиомы выбора) доказательство теоремы Арцела-Асколи.

Задача 8.8 (*). Пусть задано компактное подмножество $K \subset X$ и открытое подмножество $V \subset Y$. Обозначим через $U(K, V) \subset \mathrm{Map}(X, Y)$ множество всех отображений переводящих K в V. Рассмотрим топологию на $\mathrm{Map}(X, Y)$, заданную предбазой из всех $U(K, V)$. Докажите, что та же самая топология задается sup-метрикой.

Определение 8.3. Эта топология на $\mathrm{Map}(X, Y)$ называется **компактно-открытой топологией**, или **топологией равномерной сходимости**.

Задача 8.9. Докажите, что топология поточечной сходимости слабее топологии равномерной сходимости; другими словами, что тождественное отображение из $\mathrm{Map}(X, Y)$ с топологией равномерной сходимости в $\mathrm{Map}(X, Y)$ с топологией поточечной сходимости непрерывно.

Определение 8.4. Пусть Z – подмножество метрического пространства M. **Диаметром** Z называется число $\mathsf{diam}(Z) := \sup_{x,y\in Z} d(x, y)$.

Задача 8.10. Пусть $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ – любое отображение, ε – вещественное число, а $\delta(f, \varepsilon)$ – супремум $\mathsf{diam}(f(B))$ по всем ε-шарам B в X. Докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \delta(f, \varepsilon) = 0$.

Указание. Пусть задана такая сходящаяся к нулю последовательность ε_i, какого-то набора точек $x_i \in X$ и положительной константы C имеем $\mathsf{diam} f(B_{\varepsilon_i}(x_i))) > C$. Рассмотрим предельную точку x последовательности $\{x_i\}$. Тогда в каждом ε-шаре вокруг x содержится $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ (для достаточно большого i), из чего следует, что образ этого ε-шара имеет диаметр больше C. Значит, f не непрерывна.

Задача 8.11 (!). Пусть задана непрерывная функция $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ Докажите, что f равномерно непрерывна.

Указание. Это утверждение тавтологически эквивалентно $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \delta(f, \varepsilon) = 0$.

Задача 8.12. Пусть дано подмножество $\Psi \subset \mathrm{Map}(X, Y)$. Докажите, что Ψ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_{f\in\Psi} \delta(f, \varepsilon) = 0$.

Задача 8.13 (*). Пусть $d_{\sup}(f, g) < \gamma$. Докажите, что $\delta(f, \varepsilon) < \delta(g, \varepsilon) + \gamma$.

Задача 8.14 (*). Пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши в $(\mathrm{Map}(X, Y), d_{\sup})$. Докажите, что она равномерно непрерывна.

Указание. Нам нужно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_i \delta(f_i, \varepsilon) = 0$$

Воспользовавшись предыдущей задачей, убедитесь, что для всех f_i, лежащих в каком-то γ-шаре в $(\mathrm{Map}(X,Y), d_{\sup})$, числа $\delta(f_i,\varepsilon)$ отличаются не больше, чем на γ. Выведите из этого, что $\sup_i \delta(f_i,\varepsilon) < \delta(f_N,\varepsilon)+\gamma$ для фиксированного N, а следовательно,

$$\sup_i \delta(f_i,\varepsilon) < \gamma + \max_{i\leqslant N} \delta(f_i,\varepsilon)$$

Предел этого выражения при $\varepsilon \longrightarrow 0$ не больше γ, поскольку все f_i равномерно непрерывны.

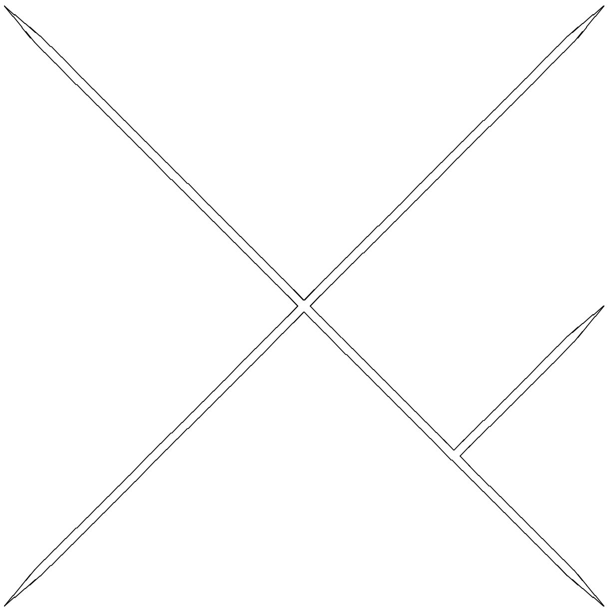
Задача 8.15 (*). Докажите, что метрическое пространство $(\mathrm{Map}(X,Y), d_{\sup})$ полное.

Задача 8.16 (*). Является ли $(\mathrm{Map}(X,Y), d_{\sup})$ локально компактным?

Кривая Пеано

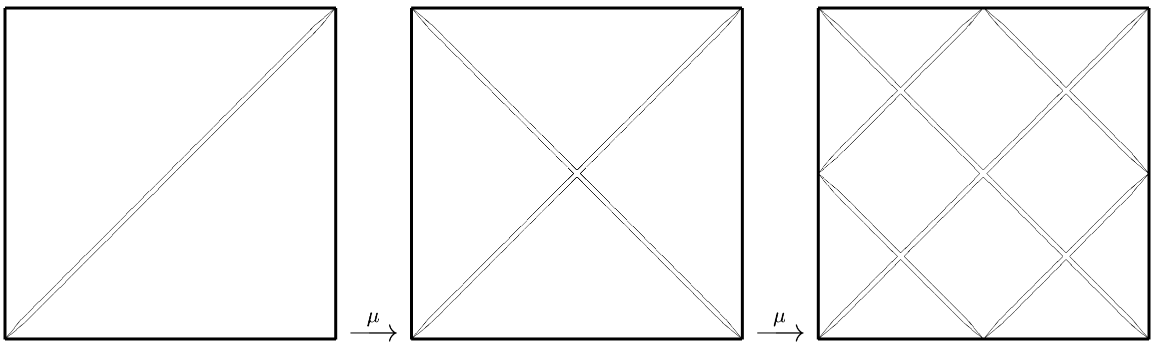
Пусть дан отрезок $[a,b]$. Отображение $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ называется **линейным**, если $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$, для любого $0<\lambda<1$. Отображение называется **кусочно линейным**, если отрезок разбит на подотрезки $[a,a_1],[a_1,a_2],[a_2,a_3],\ldots$, и f линеен на каждом из этих подотрезков. Образ кусочно линейного отображения это, очевидно, ломаная.

Пусть дано кусочно линейное отображение f из отрезка $[0,1]$ в квадрат $[0,1]\times[0,1]$ со следующим свойством: все сегменты ломаной $f([0,1])$ параллельны прямой $x=y$ либо прямой $x=-y$.



Иными словами, для каждого подотрезка $[a,a_1]$, на котором f линеен, f отображает $[a,a_1]$ в диагональ некоторого квадрата Q, со сторонами, параллельными осям координат. Пусть $\mathcal{P}l$ – пространство таких кусочно-линейных отображений.

Определим операцию μ, которая делает из кусочно-линейного отображения $f \in \mathcal{P}l$ с k линейными сегментами кусочно-линейное отображение с $4k$ линейными сегментами:



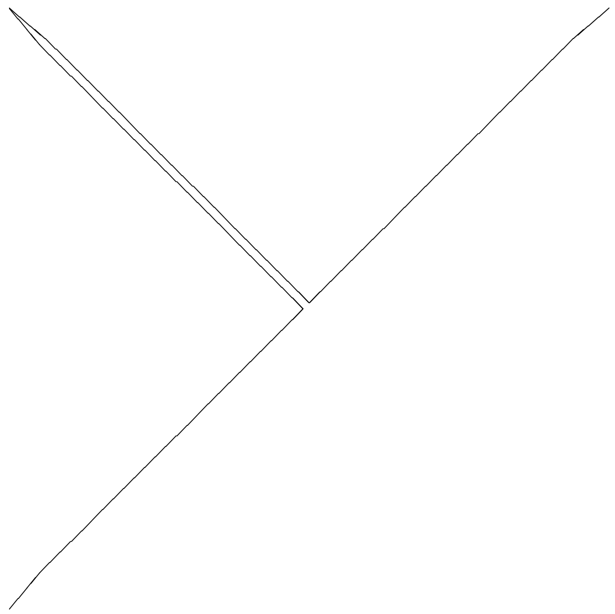
Определим $\mu(f)$ следующим образом.

1. Обозначим через $a_0, a_1, \ldots, a_k$ концы сегментов, на которых f был линейно. Тогда $\mu(f)$ отображает a_i в $f(a_i)$.

2. Разобьем каждый из сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ на четыре равные части:
$$[b_{4i}, b_{4i+1}], [b_{4i+1}, b_{4i+2}], [b_{4i+2}, b_{4i+3}], [b_{4i+3}, b_{4i+4}].$$
$\mu(f)$ отображает $[b_{4i}, b_{4i+1}]$ линейно в $[f(a_i), f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)]$, а $[b_{4i+3}, b_{4i+4}]$ в $[f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right), f(a_{i+1})]$.

3. Рассмотрим квадрат, диагональю которого является отрезок $[f(a_i), f(a_{i+1})]$, и перенумеруем его вершины по часовой стрелке: $f(a_i), A, f(a_{i+1}), B$. Тогда $\mu(f)$ отображает $[b_{4i+1}, b_{4i+2}]$ линейно в $[f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right), B]$, а $[b_{4i+2}, b_{4i+3}]$ в $[B, f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)]$.

Мы получаем такую ломаную:



Задача 8.17. Рассмотрим отрезок и квадрат как метрические пространства со стандартной метрикой. Пусть $f \in \mathcal{P}l$, и самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Тогда $d_{\sup}(f, \mu(f)) \leqslant \frac{k}{\sqrt{2}}$.

Задача 8.18. Пусть $f \in \mathcal{P}l$, и самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Тогда самый большой прямолинейный сегмент в $\mu(f)$ имеет длину $k/2$.

Задача 8.19. Пусть $f_0 \in \mathcal{P}l$, $f_1 = \mu(f_0), \ldots, f_n = \mu(f_{n-1})$, а самый большой прямолинейный сегмент в ломаной, соответствующей f_0, имеет длину k. Докажите, что
$$d_{\sup}(f_n, f_{n+1}) < \frac{k}{2^n\sqrt{2}}$$

Задача 8.20 (!). Докажите, что $\{f_i\}$ – последовательность Коши в метрике $d_{\sup}$.

Задача 8.21. Пусть $f \in \mathcal{P}l$, и для всех прямолинейных сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ в f, длина $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ не больше, чем
$$\rho(a_{i+1} - a_i),$$
где ρ - какое-то положительное вещественное число. Докажите, что $\delta(f, \varepsilon) \leqslant \rho\varepsilon$, где $\delta(f, \varepsilon)$ – функция, определенная выше.

Задача 8.22. Пусть $f_0 \in \mathcal{P}l$, $f_1 = \mu(f_0), \dots, f_n = \mu(f_{n-1})$, и для всех прямолинейных сегментов $[a_i, a_{i+1}]$ в f_0, длина $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ не больше, чем $\rho(a_{i+1} - a_i)$. Докажите, что $\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant \rho 2^n \varepsilon$.

Задача 8.23. Пусть $f \in \mathcal{P}l$, а самый большой прямолинейный сегмент $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ соответствующей ломаной имеет длину k. Докажите, что $\delta(\mu(f), \varepsilon) \leqslant 2\frac{k}{\sqrt{2}} + \delta(f, \varepsilon)$.

Задача 8.24. Пусть $f_0 \in \mathcal{P}l$, $f_1 = \mu(f_0), \dots, f_n = \mu(f_{n-1})$, а самый большой прямолинейный сегмент в ломаной, соответствующей f_0, имеет длину k. Докажите, что

$$\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant 4\frac{k}{2^{n-m}\sqrt{2}} + \rho 2^m \varepsilon \tag{8.1}$$

для любых n, m $(n > m)$

Задача 8.25. В предыдущей задаче, возьмем $\varepsilon < 2^{-2m}$, $n > 2m$. Выведите из (8.1)

$$\delta(f_n, \varepsilon) \leqslant \frac{4k\sqrt{2} + \rho}{2^{-m}}.$$

Докажите, что для произвольного i

$$\delta(f_i, \varepsilon) \leqslant \max\left(\frac{4k\sqrt{2} + \rho}{2^{-m}}, \rho 2^{2m} \varepsilon\right).$$

Задача 8.26 (!). Пусть f_0 линейно отображает $[0, 1/2]$ в отрезок $[(0,0),(1,1)]$, а $[1/2, 1]$ – в отрезок $[(1,1),(0,0)]$. Докажите, что множество $\{f_i\}$ равномерно непрерывно.

Указание. Выведите из предыдущей задачи, что $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_i(\delta(f_i, \varepsilon)) = 0$.

Задача 8.27. Выведите из теоремы Арцела-Асколи, что предел $\lim f_i$ (в sup-метрике) существует и является непрерывной функцией $\mathcal{P}: [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

Определение 8.5. Определенная выше функция $\mathcal{P}$ называется **кривая Пеано**.

Задача 8.28. Найдите $\mathcal{P}(q)$, где $q = \frac{a}{2^n}$ $(a \in \mathbb{Z})$ – двоично-рациональное число.

Задача 8.29. Пусть Q_2 – множество двоично-рациональных чисел. Докажите, что $\mathcal{P}(Q_2)$ плотно в квадрате.

Задача 8.30 (!). Докажите, что образ $\mathcal{P}$ – это весь квадрат.

Указание. Воспользуйтесь тем, что образ компакта компактен.

Задача 8.31 (!). Можно ли сюрьективно и непрерывно отобразить $[0,1]$ на куб? На куб с выколотой точкой?