1. Топология, лекция 1: метрика, пополнение, p-адические числа

1.1. Метрические пространства и пополнение

Обозначим через $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Определение 1.1. Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Определение метрики весьма точно соответствует интуитивному представлению о "расстоянии". Аксиоматическое определение метрического пространства дал Морис Фреше в 1906-м году, но сам термин "метрическое пространство" (metrischer Raum) принадлежит Хаусдорфу. Слово "расстояние" часто используют как синоним "метрике", особенно в конструкциях типа "расстояние от x до y". Также говорят "расстояние от x до y в метрике d".

Пример 1.2: Дурацкий пример метрического пространства: M любое множество, а $d(x,y) = 1$ для любых неравных точек x, y. Проверьте аксиомы.

Пример 1.3: $\mathbb{R}^n$, со стандартным расстоянием $d(x,y) = |x - y|$ - метрическое пространство. Проверьте аксиомы.

Определение 1.4. Пусть M, N - метрические пространства. Вложение $M \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} N$ называется **изометрическим вложением**, если ι сохраняет расстояния: $d_M(x,y) = d_N(\iota(x), \iota(y))$, для любых $x, y \in M$. **Изометричные пространства** - пространства, между которыми есть биекция, сохраняющая расстояния.

Maurice Fréchet
(1878 – 1973)

Определение 1.5. Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый **ϵ-шар** $B_\epsilon(x)$ в с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ϵ:

$$B_\epsilon(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x,y) < \epsilon\}$$

Определение 1.6. Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\epsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ϵ-шаре. Последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ называются **эквивалентными**, если последовательность $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, ...$ является последовательностью Коши. (Докажите, что это отношение эквивалентности.)

Определение 1.7. Говорят, что последовательность Коши $\{\alpha_i\}$ **сходится к** $x \in M$, если $\alpha_0, x, \alpha_1, x, \alpha_2, ...$ - последовательность Коши. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Свойства последовательностей Коши и предела известны многим из школьного курса анализа. В школе и в МГУ обыкновенно изучают последовательности в $\mathbb{R}$, но доказательства легко переносятся на случай произвольного метрического пространства.

Среди прочего, верно следующее (проверьте).

(i) Предел последовательности Коши единственный (если существует).

(ii) Подпоследовательность последовательности Коши - снова последовательность Коши. Последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

(iii) Если переставить элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ произвольным образом, получится последовательность Коши, эквивалентная $\{\alpha_i\}$.

Определение 1.8. **Диаметр** множества $X \subset M$ есть $\sup_{x,y\in X} d(x,y)$.

Легко видеть, что диаметр ϵ-шара не больше 2ϵ (проверьте). С другой стороны, для каждой точки $x \in M$, и любых точек y, z, с $d(y,z) < 2\epsilon$, верно

$$|d(x,z) - d(y,z) < 2\epsilon, \tag{1.1.1}$$

что следует из неравенства треугольника. Из (1.1.1) вытекает, что для любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, последовательность вещественных чисел $d(x,\alpha_i)$ - тоже Коши: если $\{\alpha_i\}$ содержится в ϵ-шаре, то $d(x,\alpha_i)$ содержится в отрезке длины 2ϵ. Похожий аргумент доказывает, что для любых последовательностей Коши $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$, последовательность $\{d(\alpha_i,\beta_i)\}$ - тоже Коши. Более того, если $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ не экивалентны, то предел $\{d(\alpha_i,\beta_i)\}$ ненулевой. Проверьте каждое из этих утверждений!

Пусть дано метрическое пространство M. Обозначим за $\bar{M}$ множество классов эквивалентностей последовательностей Коши в M. Определим на $\bar{M}$ метрику формулой

$$d(\{\alpha_i\},\{\beta_i\}) := \lim d(\alpha_i,\beta_i).$$

Докажите, что это метрическое пространство.

Определение 1.9. Множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M с метрикой, определенной выше, называется **пополнением** M.

Эта конструкция хорошо известна большинству студентов, ибо таким образом в курсе анализа определяется множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел (как множество классов эквивалентности последовательностей

Коши из $\mathbb{Q}$). Пополнение метрического пространства впервые появилось у Хаусдорфа, в монографии "Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, " (1914).

Пополнение является полным метрическим пространством. Чтобы в этом убедиться, возьмем последовательность

$$\{\alpha_i(0)\}, \{\alpha_i(1)\}, \{\alpha_i(2)\}, ...$$

последовательностей Коши в M. Для доказательства полноты $\bar{M}$, нам нужно предъявить последовательность Коши $\{\beta_i\}$ элементов M такую, что $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, ... сходится к $\{\beta_i\}$. Первое, что приходит в голову - взять диагональную последовательность $\beta_i := \alpha_i(i)$. Этот аргумент не работает, потому что на i-м месте в последовательности Коши может стоять что угодно. Надо заменить $\{\alpha_i(N)\}$ на подпоследовательность, которая сходится очень быстро, например, такую, что $\alpha_k(N), \alpha_{k+1}(N), \alpha_{k+2}(N), ...$ содержится в шаре радиуса 2^{-k}. Тогда $\alpha_k(k), \alpha_{k+1}(k+1), \alpha_{k+2}(k+2), ...$ содержится в шаре радиуса

$$2^{-k+1} + 2^{-k} + 2^{-k-1} + ... < 2^{-k+2}$$

то есть является последовательностью Коши. При этом, $\{\alpha_i(N)\}$ отстоит от $\{\alpha_i(i)\}$ не больше, чем на 2^{-N+1}. Следовательно, $\{\alpha_i(i)\}$ - это предел $\{\alpha_i(0)\}$, $\{\alpha_i(1)\}$, $\{\alpha_i(2)\}$, ...

Мы доказали существование пополнения.

Пример 1.10: Пространство с метрикой $d(x,y) = 1$ для любых $x \neq y$ полно (докажите).

Пример 1.11: Пространство $\mathbb{Q}$ с обычной метрикой неполно, и его пополнение – это $\mathbb{R}$. К сожалению, буквально эту конструкцию для определения $\mathbb{R}$ использовать нельзя, потому что метрика на метрическом пространстве принимает значения в $\mathbb{R}$. Поэтому приходится сначала определять $\mathbb{R}$ как множество классов эквивалентности последовательностей Коши в $\mathbb{Q}$, а затем определять пополнение метрического пространство, повторяя эту же самую конструкцию еще раз.

Пример 1.12: Пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой полно (докажите).

1.2. Нормирование на группах и кольцах

Метрику можно вводить на различных алгебраических объектах – группах, кольцах, полях и так далее. Делается это следующим образом.

Определение 1.13. Пусть G - абелева группа, а d - метрика на G. Мы будем использовать обозначение $x, y \longrightarrow x+y$ для групповой операции в абелевых группах. Говорят, что $(G, +, d)$ метрическая группа, если операция $x \longrightarrow -x$ взятия обратного элемента есть изометрия, и операция $x \longrightarrow x+g$ есть изометрия для любого $g \in G$. В этом случае также говорят что метрика **согласована с групповой структурой,** или что метрика **инвариантна.**

Определение 1.14. Функция $\nu: \ G \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **нормой на группе** если

(i) $\nu(g) = \nu(-g)$, $\nu(0) = 0$.

(ii) $\nu(g) > 0$ для любого $g \neq 0$.

(iii) $\nu(g+g') \leqslant \nu(g) + \nu(g')$, для любых $g, g' \in G$.

Легко видеть, что для любой нормы ν функция $d_\nu(x,y) := \nu(x-y)$ задает метрику на G, согласованную с групповой структурой. Обратно, любая такая метрика задает норму $\nu(x) := d(x,0)$ (проверьте).

Множество последовательностей Коши в метрической группе с операцией почленного сложения образует группу, а последовательности Коши, эквивалентные нулю - подгруппу этой группы. Это легко видеть из следующего соображения. Пусть $A, B \subset G$ - подмножества в группе. Множество всех сумм вида $\{a+b \ | \ a \in A, b \in B\}$ обозначается $A+B$. Легко видеть, что сумма двух шаров радиуса ϵ, ϵ' содержится в шаре радиуса $\epsilon+\epsilon'$. Следовательно, для любых последовательнпстей Коши $\{a_i\}$ $\{b_i\}$, все члены суммы $\{a_i + b_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в шаре сколь угодно малого наперед заданного радиуса.

Факторгруппа группы последовательностей Коши по подгруппе последовательностей Коши, эквивалентных нулю - это пополнение G. Таким образом, пополнение метрической группы есть снова метрическая группа. Эта конструкция хорошо известна для группы рациональных чисел по сложению; таким образом строится аддитивная структура на множестве вещественных чисел.

Определение 1.15. Пусть A - кольцо, с ассоциативным, коммутативным умножением, а $\nu: A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция на A. ν называется нормой на кольце, если выполнены следующие условия

(i) Рассмотрим A как группу, с групповым законом, заданным сложением. Тогда ν – это норма. Иначе говоря, $\nu(g) > 0$ для каждого $g \neq 0$, $\nu(0) = 0$, $\nu(g) = \nu(-g)$, и $\nu(g + g') \leqslant \nu(g) + \nu(g')$.

(ii) Норма мультипликативна: $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$.

Примером нормы на кольце является отображение $t \longrightarrow |t|$, определенное на $\mathbb{Q}$ и на $\mathbb{R}$. Другим примером является дискретная норма: $\nu(t) = 0$, если $t = 0$, и 1 в противном случае. Она мультипликативна на любом кольце таком, что из $xy = 0$ следует $x = 0$ или $y = 0$ (такие кольца называются **кольцами без делителей нуля**).

Кольцо с нормой наделено инвариантной метрикой, построенной по формуле $d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$. Множество последовательностей Коши в таком кольце, с операциями почленного сложения и умножения, образует кольцо, а последовательности, эквивалентные нулю - идеал в этом кольце.[1] Фактор по этому идеалу есть пополнение R по метрике d_ν. Мы получили, что пополнение кольца по метрике, заданной нормой - снова кольцо.

Аналогичную процедуру можно провести с полем. Почленного деления последовательности Коши на последовательность Коши не получится, потому что в ненулевой последовательности Коши могут содержаться элементы, равные нулю. Но каждую последовательность Коши, не эквивалентную нулю, можно заменить на подпоследовательность, не содержащую нулей, а такие подпоследовательности можно делить почленно. То, что частное снова будет последовательностью Коши, проверяется за 3-4 строки вычислений.

Из этого следует, что пополнение поля с нормой – это поле. Именно таким образом, исходя из множества последовательностей Коши в $\mathbb{Q}$, строится поле $\mathbb{R}$.

[1] Напомним, что идеал I в кольце A - это подгруппа по сложению в A, такая, что для любых $a \in A, \iota \in I$ произведение $a\iota$ лежит в I. Факторгруппа по идеалу наделена естественной структурой кольца. Обратное тоже верно: для любого сюрьективного гомоморфизма колец $A \xrightarrow{\phi} A_1$, ядро ϕ является идеалом.

1.3. Целые p-адические числа: неархимедова геометрия

Начиная с интересных нормирований на кольцах, можно получать очень полезные алгебраические объекты. Зафиксируем простое число p.

Определение 1.16. Пусть $x \in \mathbb{Z}$ представимо в виде $x = p^\alpha x_1$, где x_1 не делится на p, а $\alpha \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Тогда **$p$-адическая норма** $\nu_p(x)$ равна $p^{-\alpha}$. Положим $\nu_p(0) = 0$. Проверьте, что это норма. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно такой нормы называется **кольцом целых p-адических чисел**, обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Аналогичная конструкция, примененная к $\mathbb{Q}$, даст пополнение $\mathbb{Q}_p$, которое называется **полем p-адических чисел.** Любое рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ можно представить в виде $a = p^\alpha \frac{m}{n}$, где n, m взаимно просты с p, а α - целое число, однозначно заданное разложением числителя и знаменателя a на простые множители. Определим $\nu(a) := p^{-\alpha}$. Докажите, что это нормирование на поле $\mathbb{Q}$.

p-адическая норма задает метрику, обычным способом: $d(x, y) = \nu(x - y)$. Эта метрика довольно замечательна геометрически, ибо обладает свойством **неархимедовости**:

$$d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z)).$$

Из этого условия следует аксиома треугольника, но оно сильнее. Для нормы, то же самое записывается в виде

$$\nu(x + y) \leqslant \max(\nu(x), \nu(y)).$$

Проверьте, что эти условия равносильны. Проверьте это неравенство для p-адической нормы.

Неархимедовость метрического пространства равносильна такому условию. Пусть задан треугольник x, y, z, с длинами сторон a, b, c. Тогда две из сторон равны, а третья меньше. Действительно, пусть a самая длинная сторона. Из неархимедовости следует, что $a \leqslant max(b, c)$, поэтому b или c имеет такую же длину, а третья сторона (самая маленькая) такая же, или меньше.

Геометрически, это свойство можно переговорить так: любой треугольник в неархимедовом пространстве равнобедренный, и его основание меньше двух других сторон.

Если $B_\epsilon(a)$ - ϵ-шар в неархимедовом пространстве, с центром в a, а x, y - две его точки, то $d(x,y) \leqslant \max(d(x,a), d(y,a)) \leqslant \epsilon$. Поэтому ϵ-шар с центром в любой точке $B_\epsilon(a)$ совпадает с $B_\epsilon(a)$. В неархимедовом пространстве, любая точка шара является его центром.

Неархимедова геометрия довольно полезна в теории чисел, алгебраической геометрии и других науках. Например, в физике высоких энергий, некоторые версии теории струн развивают, исходя из того, что физическое пространство в очень малых (квантовых) масштабах имеет геометрию, приближающуюся к неархимедовой.

1.4. Арифметика p-адических чисел

Легко видеть, что в любой группе с инвариантной метрикой, заданной нормой ν, ряд вида $\sum g_i$ сходится, если сходится соответствующий ряд из норм $\sum \nu(g_i)$ (проверьте). Поскольку $\nu(p^i z) \leqslant p^{-i}$, для любой последовательности целых чисел z_i, ряд $\sum_{i=0}^\infty z_i p^i$ сходится к целому p-адическому числу. Действительно,

$$\sum_{i=0}^\infty \nu(z_i p^i) \leqslant \sum_{i=0}^\infty p^{-i} = \frac{p}{p-1}$$

(геометрическая прогрессия).

В частности, сходится ряд

$$1 + p + p^2 + p^3 + ...$$

Дробное число $\frac{1}{1-p}$ является целым p-адическим! Действительно, сумма этого ряда, будучи умножена на $1-p$, дает 1 (проверьте это).

Если два целых числа a, b принадлежат ϵ-шару, с $2\epsilon < p^{-i}$, разность $a - b$ делится на p^i (проверьте). Записав элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ целых чисел в p-ичной системе счисления, мы получим нечто вроде

$$\begin{array}{c}
0000000000000000000000000000000000020\\
0000000000093275091374509172340957210\\
0000000000000026381637617631863181610\\
0000000000007927931793719279129881610\\
0000000000000000009812038102829881610\\
0000082739812739127397038102829881610\\
0003719237912723927397038102829881610\\
7213719237912723927397038102829881610
\end{array}$$

Из этой таблицы наглядно видно, что соответствующая последовательность цифр стабилизируется: на i-м месте, начиная с какого-то момента, стоит одна и та же цифра. Пределом ее будет, очевидно, сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} z_i p^i$, где $0 \leqslant z_i \leqslant p-1$ - i-я цифра с конца, в p-ичном представлении α_N, для достаточно большого N.

Как и вещественные числа, p-адические числа можно складывать и умножать в столбик, не забывая переносить переполнение в следующий регистр. Продумайте эту процедуру, самостоятельно посчитайте произведение и сумму каких-нибудь p-адических чисел.

Для каждого n, не делящегося на p, уравнение $nx = 1 \mod p$ имеет целое решение. Пусть $v := 1 - nx$. Очевидно, $\nu(v) \leqslant \frac{1}{p}$, и поэтому сумма вида $1+v+v^2+v^3+...$ сходится. Поскольку $(1+v+v^2+v^3+...)(1-v) = 1$, имеем $1 + v + v^2 + v^3 + ... = \frac{1}{xn}$, поэтому $\frac{1}{n} = x + vx + v^2x + v^3x + ...$. Таким образом, в кольце целых p-адических чисел определено деление на любое n, взаимно простое с p.

Из этого видно, что рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ является целым p-адическим тогда и только тогда, когда $a = \frac{m}{n}$, и n взаимно просто с p. Другими словами, рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ является целым p-адическим тогда и только тогда, когда $\nu(a) \leqslant 1$. Целые p-адические числа это шар радиуса 1 в $\mathbb{Q}_p$, с центром в любом целом числе, например, в нуле (центром шара в неархимедовом метрическом пространстве является любая его точка).

В кольце p-адических чисел можно совершать и более сложные алгебраические операции, например, вычислить квадратный корень. Из разложения Тэйлора следует, что сумма ряда

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i)! x^i}{(1-2i)(i!)^2 4^i N^{2i-1}} \tag{1.4.1}$$

удовлетворяет $S^2 = N^2 + x$, если этот ряд сходится. Из $S^2 = N^2 + x$ и единственности разложения в ряд Тэйлора следует ряд комбинаторных тождеств (по одному для каждой степени x), которые можно усмотреть непосредственно. Воспользовавшись этими комбинаторными тождествами, получим, что из абсолютной сходимости (1.4.1) в какомнибудь нормированном поле (например, в p-адическом) следует, что его сумма тоже удовлетворяет $S^2 = N^2 + x$.

Если p нечетно, и взаимно просто с N, $\frac{1}{4^i N^{2i-1}}$ - целое p-адическое число. Частное $\frac{(2i)!}{(i!)^2}$ целое, потому что это биномиальный коэффициент.

Получаем, что норма i-го члена этой суммы оценивается через

$$\nu(\xi_i) \leqslant \nu\left(\frac{x^i}{1-2i}\right) \leqslant (1-2i)p^{-i}. \qquad (1.4.2)$$

(здесь мы используем неравенство

$$\nu\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant k$$

верное для любого целого k; докажите его). Используя равенство (1.4.2), и абсолютную сходимость ряда $\sum (2i-1)p^{-i}$ (докажите), мы получаем, что ряд (1.4.1) сходится. Поэтому в кольце p-адических чисел, для нечетного p, можно вычислять квадратный корень из числа вида $N^2 + x$, где x делится на p, а N взаимно просто с p.

Задача 1.17. Какие квадратные уравнения можно решить в $\mathbb{Z}_p$? А какие - в $\mathbb{Q}_p$?

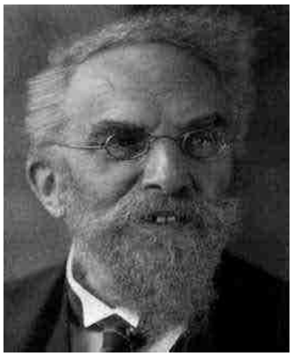
Это рассуждение можно обобщить для произвольного алгебраического уравнения. Знаменитая лемма Гензеля (Hensel's lemma) утверждает, что любое полиномиальное уравнение вида $P(x) = 0$ с целыми коэффициентами имеет решение в $\mathbb{Z}_p$, если $P(a) = 0 \mod p$ для какого-то целого числа a, и $P'(a) \neq 0 \mod p$. Здесь P' обозначает производную многочлена P. Лемма Гензеля доказывается рекурсивно, решением системы уравнений вида

$$P(a_i) = 0 \mod p^{i+1}, \;\; a_i - a_{i-1} = 0 \mod p^i.$$

Задача 1.18. Докажите лемму Гензеля.

p-адические числа изобрел в 1897 году Курт Гензель, который руководствовался идеями Куммера. Гензель, ученик Кронекера, был внуком сестры композитора Мендельсона. Он надеялся, посредством p-адических чисел, решать вопросы теории чисел, и немало решил их. Впрочем, метрика и сходимость p-адических чисел была совершенно непонятна Гензелю и его современникам.

Гензель доказал, что любое вещественное число можно представить как сумму ряда, который будет сходиться в $\mathbb{Z}_p$; изучая p-адическую сумму этого ряда, он доказал несколько ошибочных теорем о вещественных числах. Например, Гензель представил e^p как сумму сходящегося p-адического ряда, и вывел отсюда неправильное доказательство трансцендентности числа e.



Kurt Hensel
(1861 – 1941)

p-адические числа были концептуально не поняты вплоть до 1910-х годов, когда Фреше и Рисс (Riesz) изобрели метрические пространства, обосновав неясные рассуждения Гензеля.

В 1912-м году, венгерский математик Йожеф Кюршак (József Kürschák, 1864 - 1933) изобрел валюации (нормы) на кольце, обобщив p-адические нормы. В 1917-м году, Александр Маркович Островский (1893-1986), ученик Гензеля, дал полную классификацию норм на поле $\mathbb{Q}$. Оказалось, что нормы на поле $\mathbb{Q}$ исчерпываются p-адическими (с точностью до возведения в степень) и обычной (евклидовой) нормой. Набросок доказательства теоремы Островского приведен в задачах.

1.5. Библиография, замечания

p-адические числа - центральное понятие большинства курсов теории чисел. Теория метрических пространств и пополнение вводятся в начале многих хороших курсов анализа, например, Зорича, Лорана Шварца, и Кириллова-Гвишиани; также их изучают в матшкольном курсе анализа и геометрии. Матричные группы над p-адическими полями чрезвычайно важны в теории представлений. В. С. Владимиров и его соавторы написали много трудов о применении p-адического анализа в математической физике и теории струн.

Вот некоторые книжки, которые могут пригодиться.

- Коблиц Н., *p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции*, - М.: Мир, 1982.

- Серр, Ж.-П., *Курс Арифметики*, - М.: Мир, 1972, http://ega-math.narod.ru/Books/Arithm.htm
- Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*, - М.: Наука, 1979
- Электронная библиотека учебников по p-адическим числам: http://www.fen.bilkent.edu.tr/ franz/LN/LN-padic.html

2. Лекция 2: нормирования в векторных пространствах

2.1. Примеры нормированных пространств

В этом разделе, все векторные пространства предполагаются заданными над $\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. ν называется **нормой** на V, если имеет место следующее

Невырожденность: $\nu(v) > 0$, если $v \neq 0$,

Неравенство треугольника: $\nu(v + v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$,

для любых v, $v' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

Заметим, что из инвариантности относительно гомотетии следует, что $\nu(0) = 0$, и $\nu(-x) = \nu(x)$. Поэтому ν является нормой на группе V.

Пример 2.2:

- $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим
$$|v|_{L^\infty} := \max |x_i|.$$
Докажите, что это норма.

- $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим
$$|v|_{L^1} := \sum |x_i|.$$
Докажите, что это норма.

- $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим
$$|v|_{L^2} := \sqrt{\sum x_i^2}.$$

- На одномерном пространстве норма единственна с точностью до умножения на число: $x \longrightarrow c|x|$.

Норма $|\cdot|_{L^2}$ называется обычной, или **евклидовой нормой** на векторном пространстве. Неравенство треугольника для евклидовой нормы называется **неравенством Коши-Буняковского**. В нерусскоязычной литературе оно же называется **неравенство Коши-Шварца** (Cauchy-Schwarz inequality). Чтоб его доказать, возьмем два ненулевых, неколлинеарных вектора x, y в векторном пространстве с положительно определенным скалярным произведением g; неравенство треугольника для $|\cdot|_{L^2}$ будет следовать из неравенства

$$\sqrt{g(x,x)} + \sqrt{g(y,y)} \geqslant \sqrt{g(x+y,x+y)}.$$

Возведя обе части в квадрат и раскрыв скобки, получим, что это неравенство равносильно такому:

$$\sqrt{g(x,x)g(y,y)} \geqslant g(x,y). \tag{2.1.1}$$

С другой стороны, из $g(x-\lambda y, x-\lambda y) > 0$ следует, что квадратичный полином

$$P(\lambda) := g(x,x) - 2\lambda g(x,y) + \lambda^2 g(y,y),$$

не имеет корней. Значит, его дискриминант $D = g(x,y)^2 - g(x,x)g(y,y)$ отрицателен. Это доказывает (2.1.1).

Виктор Яковлевич Буняковский
(1804-1889)

В качестве альтернативного метода заметим, что на двумерном пространстве, порожденном x, y, можно ввести координаты таким образом, что квадратичная форма g будет стандартной $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$. Тогда неравенство треугольника следует из того, что (как известно из школьной планиметрии)

$$g(x, y) = |x||y| \cos\alpha \leqslant |x||y| = \sqrt{g(x, x)g(y, y)}$$

где α есть угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Норма на пространстве задает метрику по формуле

$$d_\nu(x, y) = \nu(x - y).$$

Та же самая формула используется для колец, полей, групп и т. д.

Определение 2.3. Напомним, что подмножество Z векторного пространства V называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in Z$, Z содержит отрезок $[x, y]$ целиком.

Утверждение 2.4: Пусть ν - норма на векторном пространстве. Тогда единичный шар с центром в нуле

$$B_1(0) := \{x \in V \quad \nu(x) < 1\}$$

выпуклый.

Доказательство: Напомним, что отрезок $[x, y]$ – это множество точек вида $\lambda x + (1 - \lambda)y$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ - вещественное число. Можно считать это определением отрезка. Выпуклость шара $B_1(0)$ значит, что

$$\nu(\lambda x + (1 - \lambda)y) < 1$$

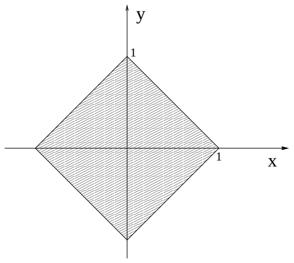
для любых x, y таких, что $\nu(x) < 1, \nu(y) < 1$, и $\lambda \in [0, 1]$. В силу неравенства треугольника и мультипликативности нормы, имеем

$$\nu(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \nu(\lambda x) + \nu((1 - \lambda)y) \leqslant \lambda\nu(x) + (1 - \lambda)\nu(y) \leqslant 1$$

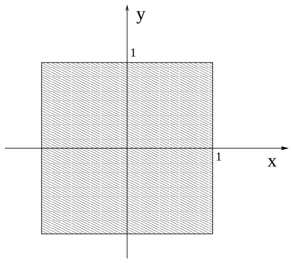
(последнее неравенство следует из того, что $\nu(x) < 1, \nu(y) < 1$). ■

Единичный шар в нормах $|\cdot|_{L^1}$, $|\cdot|_{L^\infty}$, $|\cdot|_{L^2}$, легко нарисовать (для $\mathbb{R}^2$), и наглядно убедиться в его выпуклости.

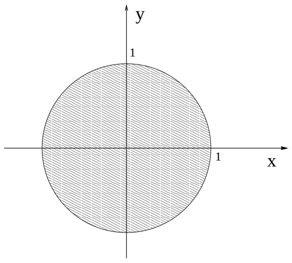
единичный шар в $\mathbb{R}^2$



в L^1-норме



в L^∞-норме



в L^2-норме (евклидовой)

Евклидова норма выделена из всех прочих тем, что у нее группа изометрий самая большая. Чтобы доказать это (и даже сформулировать), необходимо разобраться с тем, что такое "размер" (размерность) группы. Но даже на картинке выше видно, что у единичной сферы в $|\cdot|_{L^2}$ нет выделенных частей, и группа движений (изометрий) действует на ней транзитивно (переводя любую точку в любую), а в единичной сфере для $|\cdot|_{L^1}$ и $|\cdot|_{L^\infty}$ особыми точками являются углы квадратов.

Нормы L^1, L^2, L^∞ - часть непрерывной системы норм на $\mathbb{R}^n$, которые определяются следующим образом. Пусть $v = (x_1, ...x_n)$ - точка $\mathbb{R}^n$, а p вещественное число, $p \geqslant 1$. Определим L^p-норму формулой

$$|v|_{L^p} := \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}.$$

Неравенство треугольника для этой нормы называется **неравенством Минковского**; его доказательство довольно трудоемко.

Для пространства непрерывных функций на отрезке (или другом компактном множестве M), можно определить L^p-нормы, для $p \geqslant 1$, формулой

$$|f|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_M |f|^p}.$$

и

$$|f|_{L^\infty} = \sup_M f$$

Супремум $|f|$ конечен, и интегралы $|f|^p$ определены, потому что непрерывная функция достигает максимума на отрезке (и любом компакте), а значит ограничена. Неравенство треугольника для L^1, L^2 и L^∞-нормы в этой ситуации доказывается элементарно (докажите).

2.2. Непрерывные отображения

Определение 2.5. Подмножество $Z \subset M$ метрического пространства называется **открытым**, если если верны следующие равносильные условия (докажите равносильность).

(i) оно является объединением ϵ-шаров

(ii) вместе с каждой точкой $z \in Z$, Z содержит целиком некоторый ϵ-шар с центром в этой точке.

Определение 2.6. Пусть $\{z_i\}$ - последовательность точек в метрическом пространстве (M, d). Мы говорим, что z_i **сходится к** z, если $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} d(z_i, z) = 0$

Определение 2.7. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $f: M_1 \longrightarrow M_2$ - некоторое отображение. Оно называется **непрерывным**, если верны следующие равносильные условия (докажите равносильность).

(i) Отображение f **сохраняет пределы**: если последовательность $\{z_i\}$ сходится к z, то $\{f(z_i)\}$ сходится к $f(z)$.

(ii) Для каждой $z \in M$ и каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такой, что из $d_1(x, z) < \delta$ следует $d_2(f(x), f(z)) < \epsilon$.

(iii) Прообраз любого открытого множества открыт.

Композиция непрерывных отображений очевидно непрерывна.

Замечание 2.8. Непрерывное отображение совершенно не обязано переводить последовательности Коши в последовательности Коши. Рассмотрим, например, отображение $\mathbb{Q} \xrightarrow{\phi} \{0,1\}$, переводящее все числа $> \sqrt{2}$ в 1, а все числа меньше $\sqrt{2}$ в 0. Открытых подмножеств в множестве $\{0,1\}$ 4 штуки: $\{0\}$, $\{1\}$, пустое множество и все $\{0,1\}$; легко видеть, что прообраз каждого из них открыт.

Пример 2.9: Пусть z - точка метрического пространства M. Тогда $x \xrightarrow{d_z} d(z,x)$ является непрерывным отображением из M в $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой. Действительно, из неравенства треугольника сразу следует, что $d_z(x) - d_z(y) \leqslant d(x,y)$.

Определение 2.10. Отображение метрических пространств называется **гомеоморфизмом**, если оно непрерывно, биективно, и обратное ему тоже непрерывно.

Две нормы ν и ν' на векторном пространстве V называются **эквивалентными**, если тождественное отображение задает гомеоморфизм $(V,\nu) \longrightarrow (V,\nu')$.

Непрерывность тождественного отображения $(V,\nu) \longrightarrow (V,\nu')$ значит, что некоторый открытый шар в норме ν' содержит открытый шар в норме ν. Если первый шар имеет радиус r, второй шар - радиус s, то шар радиуса 1 в (V,ν') содержит шар радиуса s/r в норме ν. Иначе говоря, из $\nu'(x) \leqslant 1$ следует $\nu(x) \leqslant s/r$. Это равносильно такому неравенству: $\frac{\nu(x)}{\nu'(x)} \leqslant \frac{s}{r}$. Из непрерывности $(V,\nu') \longrightarrow (V,\nu)$ следует противоположное неравенство, с другим коэффициентом. Мы получили такое утверждение.

Утверждение 2.11: Пусть ν и ν' - нормы на векторном пространстве V. Эти нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют ненулевые числа C_1, C_2, такие, что для любого $x \in V$ выполнены неравенства

$$C_1\nu(x) \leqslant \nu'(x) \leqslant C_2\nu(x). \tag{2.2.1}$$

■

Докажем следующую полезную теорему.

Теорема 2.12: На конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Заметим, что эквивалентность норм L^1, L^2, L^∞ на $\mathbb{R}^2$ вполне очевидна из чертежа, на котором нарисован единичный шар (см. выше).

Пусть ν - произвольная норма на $V = \mathbb{R}^n$, $|\cdot|_{L^1}$ - L^1-норма, а $x_1, ..., x_n$ - стандартный базис в V. Воспользовавшись неравенством треугольника, получаем

$$\nu(z) \leqslant \sum_i |\lambda_i| \nu(x_i) \leqslant \max_i \nu(x_i) \sum_i |\lambda_i| = C|z|_{L^1}$$

где $z = \sum_i \lambda_i x_i$, а $C = \max_i \nu(x_i)$. Это дает одно из двух неравенств (2.2.1), нужных для эквивалентности норм. Мы получили, что тождественное отображение $(V, |\cdot|_{L^1}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (V, \nu)$ непрерывно.

Чтобы доказать, что обратное отображение тоже непрерывно, воспользуемся компактностью. Подробнее про компактность я расскажу одной из следующих лекций.

Напомним, что (секвенциально) компактным подмножеством в метрическом пространстве называется множество, в котором из каждой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Замкнутым подмножеством называется такое подмножество, дополнение до которого открыто. Из курса анализа известно, что в $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой каждое замкнутое, ограниченное [1] подмножество компактно. Также известно, что непрерывная функция на компакте принимает максимум и минимум. Мы передокажем эти утверждения в одной из следующих лекций.

Функция $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна относительно метрики, заданной ν (Пример 2.9). В силу непрерывности $(V, |\cdot|_{L^1}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (V, \nu)$ эта функция непрерывна на V с L^1-метрикой. Поэтому она достигает минимума C_1 на единичной сфере относительно этой метрики.[2] Поскольку ν положительна на ненулевых векторах, C_1 тоже положительно. Мы получили неравенство $\nu(v) \geqslant C_1|v|_{L^1}$. Неравенство $\nu(v) \geqslant C|v|_{L^1}$ получено чуть выше. Мы доказали эквивалентность норм на V. ■

2.3. Выпуклые множества и норма

Пусть V - конечномерное векторное пространство, ν норма на нем, а B - единичный шар. Как мы видели, B ограниченное (содержится в

[1] Ограниченное значит "содержащееся в каком-то шаре".

[2] Нетрудно видеть, что единичная сфера в L^1-метрике является границей правильного гипер-октаэдра с вершинами в центрах граней единичного куба.

евклидовом шаре большого радиуса), открытое, выпуклое множество. Оказывается, каждое такое множество задает некоторую норму.

Теорема 2.13: Пусть V - конечномерное векторное пространство, а B - непустое открытое, выпуклое, ограниченное подмножество в V. Предположим, что B центрально-симметрично, то есть для каждого $v \in B$ точка $-v$ тоже лежит в B. Тогда B является единичным шаром для какой-то нормы.

Доказательство: Для любых множеств $A, B \subset V$, определим $A + B \subset V$ как множество всех векторов вида $a + b$, $a \in A, b \in B$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$, определим λA как множество всех векторов вида λa, $a \in A$.

Выпуклость B равносильна условию $\lambda B + (1-\lambda)B \subset B$, где $\lambda \in [0,1]$ произвольное число от 0 до 1 (докажите это). Поэтому для выпуклого B мы имеем $\alpha B + \beta B \subset (\alpha + \beta)B$.

Определим функцию $\nu_B : V \longrightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\nu_B(x) := \inf_\rho \{\rho > 0 \mid x \in \rho B\}$$

Поскольку B открыт и содержит 0, это множество непусто, а поскольку ограничен - для ненулевого x, $\nu_B(x) \neq 0$. Условие $\nu_B(\lambda x) = |\lambda|\nu_B(x)$ следует прямо из определения. Наконец, неравенство треугольника вытекает из $\alpha B + \beta B \subset (\alpha + \beta)B$. Действительно, пусть x, y такие вектора, что $x \in (\alpha + \epsilon)B$ и $y \in (\beta + \epsilon)B$. Тогда $x + y \in (\alpha + \beta + 2\epsilon)B$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$, из $\nu_B(x) = \alpha$, $\nu_B(y) = \alpha$ следует $\nu(x + y) \leqslant \alpha + \beta + 2\epsilon$. Это доказывает неравенство треугольника. Мы построили норму ν_B по выпуклому, ограниченному, открытому, центрально-симметричному множеству B. Легко видеть, что единичный шар в ν_B это и есть B. ■

2.4. История, замечания

Основы теории нормированных векторных пространств излагаются в любом приличном учебнике анализа. Особенно хорош для этой цели двухтомный "Анализ" Лорана Шварца и учебник Зорича.

Неравенство Коши-Буняковского в конечномерных векторных пространствах доказал Огюстен Коши (Augustin Cauchy) в 1821-м году. В пространствах функций это неравенство доказал Виктор Яковлевич Буняковский, в 1859-м; в 1888-м результат Буняковского передоказал Герман Шварц (Hermann Amandus Schwarz), ученик Вейерштрасса, один из основателей комплексного анализа, в честь которого названа лемма

Шварца из комплексного анализа, производная Шварца, и много других вещей.

Понятие метрического пространства изобрел Фреше, в его диссертации 1906-го года. В 1909-м году, Фридьеш Рисс (Frigyes Riesz) обнаружил, что понятие метрики для изучения топологии пространства необязательно, и предложил определение топологии, основанной на понятии замыкания. Его система аксиом была непохожа на современную, но в 1914-м году Хаусдорф опубликовал монографию "Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen," где развил аксиоматическую теорию топологических пространств, практически тождественную современной.

Любопытно, что многие идеи монографии Хаусдорфа можно обнаружить в его литературных и философских работах, опубликованных в конце XIX века под псевдонимом Пол Монгре (Paul Mongré).

Термин "компактное пространство" также принадлежит Фреше. Метрика L^p определена Риссом, в 1910-м году.

Понятие нормированного пространства определил и детально исследовал Банах в начале 1920-х годов.

Stefan Banach
(1892 – 1945)