Топология, лекция 1: метрика, пополнение, p-адические числа

Миша Вербицкий

11 февраля, 2008

Независимый Университет

Метрические пространства

Определение: Пусть M - множество. **Метрикой** на M называется функция $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям

Невырожденность: $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

для любых точек $x, y, z \in M$.

Метрика - математическая абстракция, отвечающая интуитивному представлению о «расстоянии»

Определение метрического пространства дал Морис Фреше в 1906-м году.

Maurice Fréchet
(1878 – 1973)

Последовательности Коши

Определение: Пусть $x \in M$ точка в метрическом пространстве. Открытый **ε-шар** $B_\varepsilon(x)$ в с центром в x - множество всех точек, отстоящих от x меньше, чем на ε:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \quad | \quad d(x,y) < \varepsilon\}$$

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$, все элементы последовательности $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа, содержатся в некотором ε-шаре. Последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ называются **эквивалентными**, если последовательность $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, ...$ является последовательностью Коши.

Не путать со сходимостью!

Все сходящиеся последовательности - последовательности Коши, но не все последовательности Коши сходятся.

Сходящиеся последовательности

Определение: Пусть M - метрическое пространство. Последовательность $\{\alpha_i\}$ точек из M **сходится к** $x \in M$, если в любом ε-шаре $B_\varepsilon(x)$ содержатся все члены $\{\alpha_i\}$, кроме конечного числа. В этом случае также говорят, что x - это **предел** последовательности $\{\alpha_i\}$. Метрическое пространство M называется **полным**, если у любой последовательности Коши есть предел.

Свойства последовательностей Коши и пределов:

1. Подпоследовательность последовательности Коши - снова последовательность Коши. Последовательность Коши эквивалентна любой своей подпоследовательности.

2. Если переставить элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ произвольным образом, получится последовательность Коши, эквивалентная $\{\alpha_i\}$.

3. Предел последовательности единственный, если существует.

Пополнение.

Определение: Диаметр множества $X \subset M$ есть $\sup_{x,y \in X} d(x,y)$.

Диаметр ε-шара не больше 2ε.

Из этого следует, что для любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$, и любого $x \in M$, последовательность вещественных чисел $\{d(x,\alpha_i)\}$ – последовательность Коши в $\mathbb{R}$.

Более того, для любых последовательностей Коши $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$, последовательность $\{d(\alpha_i, \beta_i)\}$ – тоже последовательность Коши.

Это задает метрику на классах эквивалентности последовательностей Коши.

Определение: Множество классов эквивалентности последовательностей Коши в M с метрикой, определенной выше, называется **пополнением M.**

Теорема: Пополнение является полным метрическим пространством.

Метрики на абелевых группах

Определение: Пусть M, N - метрические пространства. Вложение $M \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} N$ называется **изометрическим вложением**, если ι сохраняет расстояния: $d_M(x,y) = d_N(\iota(x), \iota(y))$, для любых $x, y \in M$. **Изометричные пространства** - пространства, между которыми есть биекция, сохраняющая расстояния.

Определение:
Пусть G - абелева группа, а d - метрика на G. Мы будем использовать обозначение $x, y \longrightarrow x+y$ для групповой операции в абелевых группах. Говорят, что $(G, +, d)$ метрическая группа, если операция $x \longrightarrow -x$ взятия обратного элемента есть изометрия, и операция $x \longrightarrow x+g$ есть изометрия для любого $g \in G$. В этом случае также говорят что метрика **согласована с групповой структурой,** или что метрика **инвариантна.**

«Группа с инвариантной метрикой действует сама на себе изометриями»

Задание инвариантных метрик через норму

Определение:
Функция $\nu : G \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **нормой на группе** если

(i) $\nu(g) = \nu(-g)$, $\nu(0) = 0$.

(ii) $\nu(g) > 0$ для любого $g \neq 0$.

(iii) $\nu(g + g') \leqslant \nu(g) + \nu(g')$, для любых $g, g' \in G$.

Для любой нормы ν функция $d_\nu(x, y) := \nu(x - y)$ задает метрику на G, согласованную с групповой структурой.

Обратное тоже верно: все инвариантные метрики на G могут быть получены таким образом.

Пополнение группы с инвариантной метрикой

Пусть $A, B \subset G$ - подмножества в группе. Множество всех сумм вида $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ обозначается $A + B$.

Сумма двух шаров радиуса $\varepsilon, \varepsilon'$ содержится в шаре радиуса $\varepsilon + \varepsilon'$.

Поэтому множество последовательностей Коши в метрической группе с операцией почленного сложения **образует группу**, а последовательности Коши, эквивалентные нулю - **подгруппу этой группы.**

Факторгруппой будет пополнение G.

Пополнение G – снова метрическая группа.

Нормирования на кольце

Определение: Пусть A - кольцо, с ассоциативным, коммутативным умножением, а $\nu: A \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция на A. ν называется **нормой** (или нормированием) если

1. **ν – это норма на группе A по сложению**

2. **ν мультипликативна:** $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$

Пример нормы: $t \longrightarrow |t|$ на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример нормы: $\nu(t) = 0$, если $t = 0$, и 1 в противном случае. Она мультипликативна на любом кольце без делителей нуля.

Кольцо с нормой наделено инвариантной метрикой, построенной по формуле $d_\nu(x, y) = \nu(x - y)$.

Пополнение кольца по этой метрике - снова кольцо.

p-адические числа.

Зафиксируем простое число p.

Определение:
Пусть $x \in \mathbb{Z}$ представимо в виде $x = p^\alpha x_1$, где x_1 не делится на p, а $\alpha \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Тогда **$p$-адическая норма** $\nu(x)$ равна $p^{-\alpha}$. Положим также $\nu(0) = 0$. Пополнение $\mathbb{Z}$ относительно такой нормы называется **кольцом целых p-адических чисел**, обозначается $\mathbb{Z}_p$.

Аналогичная конструкция, примененная к $\mathbb{Q}$, даст пополнение $\mathbb{Q}_p$, которое называется **полем p-адических чисел.** Любое рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ можно представить в виде $a = p^\alpha \frac{m}{n}$, где n, m взаимно просты с p, а α - целое число, однозначно заданное разложением числителя и знаменателя a на простые множители. Определим $\nu(a) := p^{-\alpha}$.

Неархимедовы метрики

p-адическая метрика **неархимедова:**

$$d(x,y) \leqslant \max(d(x,z), d(y,z)).$$

Из этого условия следует аксиома треугольника, но оно сильнее.

Геометрически, неархимедовость значит следующее: **любой треугольник в неархимедовом пространстве равнобедренный, и его основание меньше двух других сторон.**

ε-шар с центром в любой точке $B_\varepsilon(a)$ совпадает с $B_\varepsilon(a)$. **В неархимедовом пространстве, любая точка шара является его центром.**

Арифметика p-адических чисел

В любой группе с инвариантной метрикой, заданной нормой ν, **ряд вида $\sum g_i$ сходится, если сходится соответствующий ряд из норм $\sum \nu(g_i)$.**

Поэтому для любой последовательности целых чисел z_i, **ряд $\sum_{i=0}^\infty z_i p^i$ сходится к целому p-адическому числу.**

В частности,

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + p^3 + ...$$

целое p-адическое.

Если два целых числа a, b принадлежат ε-шару, с $2\varepsilon < p^{-i}$, разность $a - b$ делится на p^i. Поэтому их записи в p-ичной системе счисления совпадают вплоть до i-го знака.

Записав элементы последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ целых чисел в p-ичной системе счисления, мы получим, что соответствующая последовательность цифр стабилизируется: **на i-м месте, начиная с какого-то момента, стоит одна и та же цифра.**

Арифметика p-адических чисел (продолжение)

Пределом любой последовательности Коши $\{\alpha_i\}$ будет сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} z_i p^i$, где $0 \leqslant z_i \leqslant p-1$ - i-я цифра с конца, в p-ичном представлении α_N, для достаточно большого N.

Любое целое p-адическое число записывается как в p-ичной системе счисления последовательностью цифр, бесконечной влево.

$$\ldots 5402510251025410251405150162126161611102002020315610310$$

p-адические числа можно складывать и умножать в столбик, не забывая переносить переполнение в следующий регистр.

Для каждого n, не делящегося на p, уравнение $nx = 1 \mod p$ имеет целое решение. Пусть $y := 1 - nx$. Очевидно, $\nu(y) \leqslant \frac{1}{p}$. Сумма вида $1 + y + y^2 + y^3 + ...$ сходится к $\frac{1}{xn}$. Поэтому $\frac{1}{n} = x + yx + y^2x + y^3x + ...$ Таким образом, **в кольце целых p-адических чисел определено деление на любое n, взаимно простое с p.**

Целые p-адические числа.

Рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ является целым p-адическим тогда и только тогда, когда $a = \frac{m}{n}$, и n взаимно просто с p.

Целые p-адические числа это **шар радиуса 1 в $\mathbb{Q}_p$**, с центром в любом целом числе, например, в нуле (центром шара в неархимедовом метрическом пространстве является любая его точка).

Вычисление $\sqrt{N^2+x}$ в $\mathbb{Z}_p$.

Пусть p нечетное, взаимно простое с N, а x делится на p. Ряд Тэйлора для $\sqrt{N^2+x}$

$$\sqrt{N^2+x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i)! x^i}{(1-2i)(i!)^2 4^i N^{2i-1}}$$

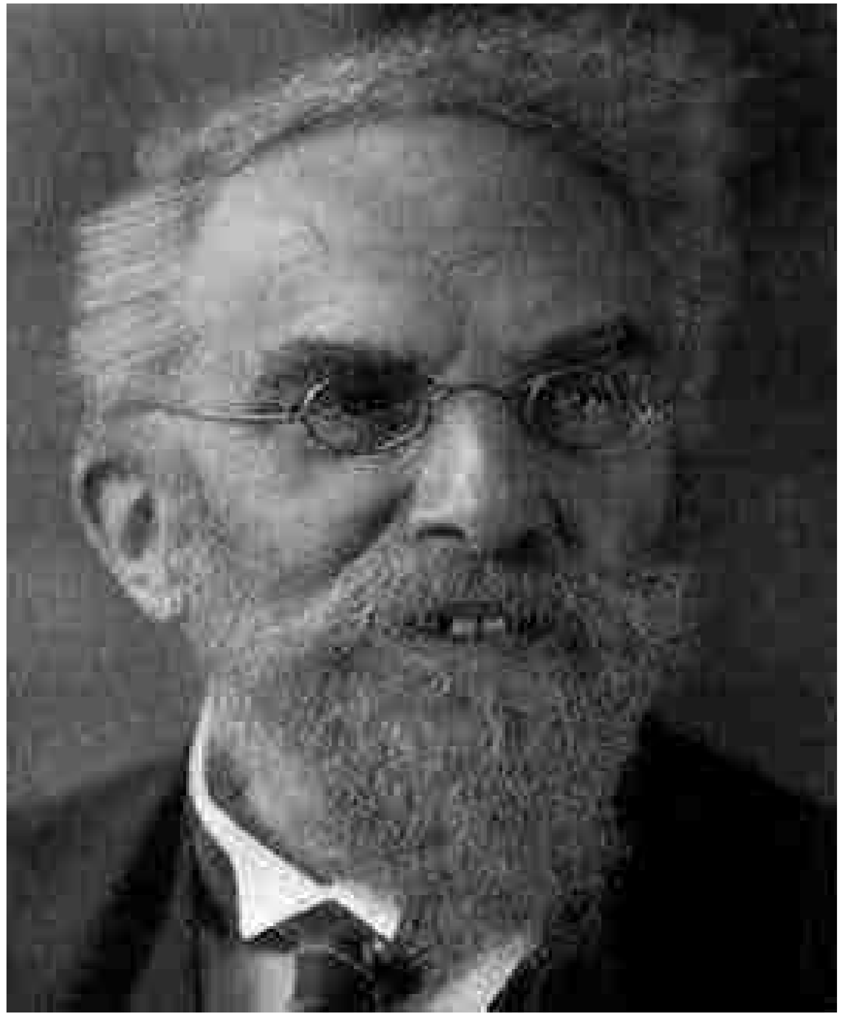
сходится в $\mathbb{Z}_p$, и его сумма равна $\sqrt{N^2+x}$.

Лемма Гензеля: Любое полиномиальное уравнение вида $P(x) = 0$ с целыми коэффициентами имеет решение в $\mathbb{Z}_p$, если $P(a) = 0 \mod p$ для какого-то целого числа a, и $P'(a) \neq 0 \mod p$.

Лемма Гензеля доказывается рекурсивно, решением системы уравнений вида

$$P(a_i) = 0 \mod p^{i+1}, \quad a_i - a_{i-1} = 0 \mod p^i.$$

p-адические числа изобрел в 1897 году Курт Гензель.



Kurt Hensel
(1861 – 1941)

Нормированные пространства

Определение:
Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu: V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. ν называется **нормой** на V, если имеет место следующее

Невырожденность: $\nu(x) > 0$, если $x \neq 0$,

Неравенство треугольника: $\nu(x + x') \leqslant \nu(x) + \nu(x')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$,

для любых x, $x' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В такой ситуации V называется **нормированным пространством**.

В такой ситуации ν является нормой на группе V по сложению.

Норма задает метрику на пространстве V, стандартной формулой.

Примеры нормы

1. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^\infty} := \max |x_i|.$$

2. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^1} := \sum |x_i|.$$

3. $V = \mathbb{R}^n$. Для каждого вектора $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ определим

$$|z|_{L^2} := \sqrt{\sum x_i^2}.$$

4. На одномерном пространстве норма единственна с точностью до умножения на число:

$$x \longrightarrow c|x|.$$

Неравенство Коши-Буняковского

Неравенство треугольника для евклидовой нормы называется **неравенством Коши-Буняковского**.

Возьмем два ненулевых, неколлинеарных вектора x, y в векторном пространстве с положительно определенным скалярным произведением g. Неравенство Коши-Буняковского следует из

$$\sqrt{g(x,x)} + \sqrt{g(y,y)} \geqslant \sqrt{g(x+y,x+y)}$$

.

Это равносильно $\sqrt{g(x,x)g(y,y)} \geqslant g(x,y)$.

Из $g(x-\lambda y, x-\lambda y) > 0$ следует, что что квадратичный полином

$$P(\lambda) := g(x,x) - 2\lambda g(x,y) + \lambda^2 g(y,y),$$

имеет отрицательный дискриминант $D = g(x,y)^2 - g(x,x)g(y,y)$.

Также неравенство Коши-Буняковского можно получить из формулы

$$g(x,y) = |x||y|\cos\alpha \leqslant |x||y| = \sqrt{g(x,x)g(y,y)}.$$

Виктор Яковлевич Буняковский
(1804-1889)

Выпуклые множества

Определение: **Отрезок** $[x, y]$ в векторном пространстве – это множество точек вида $\lambda x + (1 - \lambda)y$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ - вещественное число.

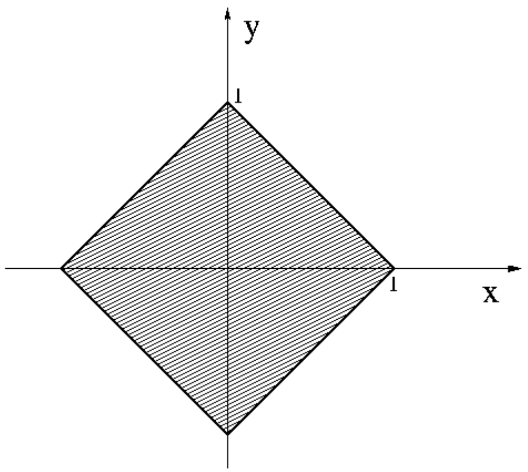
Определение: Подмножество Z векторного пространства V называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in Z$, Z содержит отрезок $[x, y]$ целиком.

Утверждение: Пусть ν - норма на векторном пространстве. Тогда единичный шар с центром в нуле

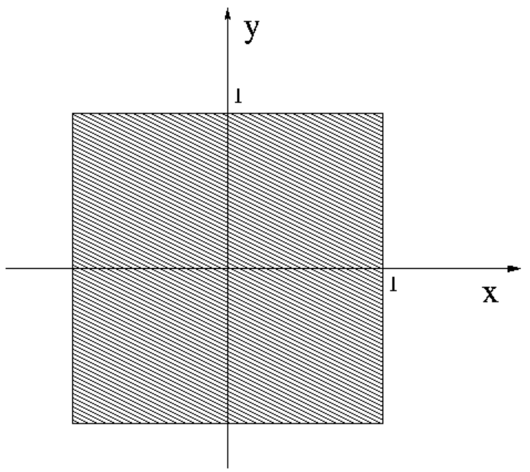
$$B_1(0) := \{x \in V \quad \nu(x) < 1\}$$

выпуклый.

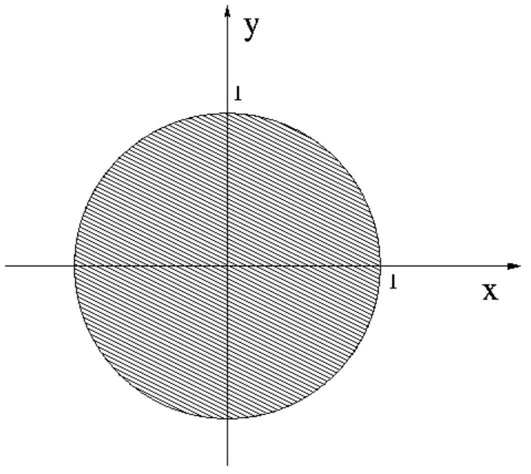
единичный шар в $\mathbb{R}^2$



в L^1-норме



в L^∞-норме



в L^2-норме (евклидовой)

Непрерывные отображения.

Определение:
Подмножество $Z \subset M$ метрического пространства называется **открытым**, если оно является объединением (открытых) ε-шаров.

Определение:
Последовательность $\{z_i\}$ **сходится к** z, если $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} d(z_i, z) = 0$

Определение:
Пусть $f: M_1 \longrightarrow M_2$ – отображение метрических пространств. Оно называется **непрерывным**, если верны следующие равносильные условия.

1. Отображение f **сохраняет пределы**: если последовательность $\{z_i\}$ сходится к z, то $\{f(z_i)\}$ сходится к $f(z)$.

2. Прообраз любого открытого множества открыт.

Непрерывные отображения (продолжение).

Композиция непрерывных отображений непрерывна.

Непрерывное отображение не обязано переводить последовательности Коши в последовательности Коши.

Пусть z - точка метрического пространства M. Тогда $x \xrightarrow{d_z} d(z,x)$ является непрерывным отображением из M в $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой.

Действительно, $d_z(x) - d_z(y) \leqslant d(x,y)$.

Определение:
Отображение метрических пространств называется **гомеоморфизмом**, если оно непрерывно, биективно, и обратное ему тоже непрерывно.

Эквивалентность норм.

Определение: Две нормы ν и ν' на векторном пространстве V называются **эквивалентными**, если тождественное отображение $(V,\nu) \longrightarrow (V,\nu')$ это гомеоморфизм.

Утверждение:
Пусть ν и ν' - нормы на векторном пространстве V. Эти нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют ненулевые числа C_1, C_2, такие, что для любого $x \in V$ выполнены неравенства

$$C_1\nu(x) \leqslant \nu'(x) \leqslant C_2\nu(x).$$

Теорема:
На конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Пусть $z = \sum_i \lambda_i x_i$, а x_i - базис в конечномерном пространстве V. Тогда

$$\nu(z) \leqslant \sum_i |\lambda_i|\nu(x_i) \leqslant \max_i \nu(x_i) \sum_i |\lambda_i| = C|z|_{L^1}$$

где $C = \max_i \nu(x_i)$.

Выпуклые множества и норма.

Теорема:
Пусть V - конечномерное векторное пространство, а B - непустое открытое, выпуклое, ограниченное подмножество в V. Предположим, что B центрально-симметрично, то есть для каждого $v \in B$ точка $-v$ тоже лежит в B. Тогда B является единичным шаром для какой-то нормы.

Stefan Banach
(1892 – 1945)