10. Топология, лекция 10: Равномерная сходимость

10.1. Банаховы пространства

Определение 10.1. Пусть (V, ν) – пространство с нормой. Напомним, что (V, ν) называется **банаховым**, если оно полно, как метрическое пространство.

Замечание 10.2. Предположим, что (V, ν_2) – конечномерное пространство с евклидовой нормой, заданной как $\nu_2(v) = g(v, v)$, где g – билинейная симметричная, невырожденная форма. В Лекции 2 мы доказали, что тождественный изоморфизм $(V, \nu) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (V, \nu_2)$ является липшицевым, и обратное ему отображение тоже липшицево (такие отображения называются **билипшицевыми**). Из этого следует, что $(V, \nu) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (V, \nu_2)$ переводит последовательности Коши в последовательности Коши. Поэтому (V, ν) полно.

Мы доказали следующее утверждение

Утверждение 10.3: Любое конечномерное нормированное пространство[1] – банахово.

Отметим также, что единичный шар в (V, ν) компактен. Действительно, он является замкнутым и ограниченным подмножеством в евклидовом пространстве (V, ν_2), что следует из билипшицевости тождественного отображения $(V, \nu) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (V, \nu_2)$.

Следующая полезная теорема была доказана Ф. Риссом.

Пусть (V, ν) – нормированное пространство, а $\bar{B}_1 \subset V$ – единичный замкнутый шар в V. Если $\bar{B}_1$ компактен, то V конечномерно.

Доказательство. Шаг 1: Если $\bar{B}_1$ компактен, из покрытия $\bar{B}_1$ открытыми шарами радиуса $\frac{1}{2}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть

[1] **Нормированное пространство** – пространство с нормой.

$\{x_1, ..., x_n\}$ центры шаров, которые составляют это подпокрытие. Тогда для каждого $v \in V$, $|v| \leqslant 1$, для какого-то x_i имеет место $|v - x_i| < \frac{1}{2}$.

Шаг 2: Следовательно, для каждого $w \in V$, такого, что $|w| \leqslant \lambda$, и для какого-то $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ имеет место $|w - \lambda x_i| < \frac{1}{2}\lambda$.

Шаг 3: Возьмем какой-то $v \in V$, $|v| \leqslant 1$. Выберем $x_{i_1} \in \{x_1, ..., x_n\}$ такой, что $|v - x_{i_1}| < \frac{1}{2}$. Применив утверждение предыдущего шага к $w = v - x_{i_1}$, $\lambda = 1/2$, получим, что

$$|v - x_{i_1} - \frac{1}{2}x_{i_2}| < \frac{1}{4},$$

для какого-то $x_{i_2} \in \{x_1, ..., x_n\}$. Применим утверждение предыдущего шага к $w = v - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k}$, $\lambda = 1/2^{n-1}$, воспользуемся индукцией, получим

$$\left| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k} \right| < \frac{1}{2^n}.$$

Шаг 4: Мы доказали, что

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k}.$$

Следовательно, v принадлежит линейной оболочке векторов $\{x_1, ..., x_n\}$, которая таким образом должна содержать V целиком. Поэтому V конечномерно. ■

Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что функцию $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ называют **ограниченной**, если $\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$. Пусть $C_b(M)$ – пространство непрерывных, ограниченных, вещественнозначных функций на M. Пусть

$$|f| := \sup_{x \in M} |f(x)|.$$

Легко видеть, что это норма (докажите). Такая норма называется **L^∞-нормой,** или же **$\sup$-нормой** на пространстве непрерывных, ограниченных, вещественнозначных функций.

Определение 10.4. Топология, определяемая sup-нормой на пространстве непрерывных, ограниченных функций $C_b(M)$, называется **топологией равномерной сходимости**. Последовательность функций, которая сходится в такой топологии, называется **равномерно сходящейся.**

Теорема 10.5: Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен. Более того, пространство $C_b(M)$ с sup-нормой – банахово.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши ограниченных функций. Поскольку

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant \sup_{x \in M} |f_i(x) - f_j(x)|,$$

для каждой точки $y \in M$, $\{f_i(y)\}$ – последовательность Коши. Поэтому f_i поточечно сходятся к функции $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

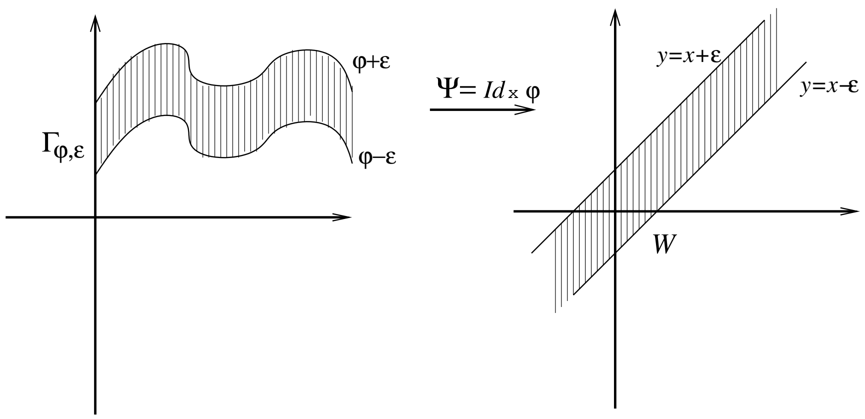
Шаг 2. Пусть $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, а $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} \subset M \times \mathbb{R}$ это объединение всех ε-отрезков вида $m \times [\varphi(m) - \varepsilon, \varphi(m) - \varepsilon]$. Можно думать про $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ как про объединение графиков функций $\varphi + c$, где $c \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Докажем, что множество $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто. Для этого рассмотрим отображение $\Psi = \varphi \times \mathsf{Id} : M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Легко видеть, что $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Psi^{-1}(W)$, где W – замкнутое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, составленное из всех пар (x, y), таких, что $|x - y| \leqslant \varepsilon$. Поскольку W замкнуто, а Ψ непрерывно, $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ также замкнуто.

Шаг 3. Для каждого i, обозначим за ε_i число $|f - f_i|$. График Γ_f лежит в замкнутом множестве $\Gamma_{f_i,\varepsilon_i}$. Поскольку последовательность $\{\varepsilon_i\}$ сходится к нулю, имеем

$$\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i,\varepsilon_i}.$$

График функции Γ_f является пересечением замкнутых множеств, поэтому он замкнут.

Шаг 4. Поскольку функция f ограниченна, можно рассматривать ее как функцию $f : M \longrightarrow [-C, C]$. Пусть $\pi : M \times [-C, C] \longrightarrow M$ – обычная проекция. Легко видеть, что $f^{-1}([a, b]) = \pi(\Gamma_f \cap M \times [a, b])$. Поскольку проекция $\pi : M \times [-C, C] \longrightarrow M$ имеет компактные слои, она замкнута (это было доказано на прошлой лекции). Поэтому $f^{-1}([a, b]) =$



Множество $\Gamma_{f,\varepsilon}$ *получено как* $\Psi^{-1}(W)$

$\pi(\Gamma_f \cap M \times [a,b])$ замкнуто, а значит, прообраз любого открытого интервала в $[-C,C]$ открыт. Поскольку открытые интервалы являются базой топологии, f непрерывно. Мы доказали, что $\{f_i\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. ■

10.2. Примеры пространств Фреше

Пусть V – топологическое векторное пространство, с хаусдорфовой топологией, заданной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$. Напомним, что V называется **пространством Фреше**, если каждая последовательность $\{x_i\}$, которая является последовательностью Коши относительно всех полунорм ν_α, сходится к $x \in V$.

Пусть M – локально компактное топологическое пространство, а V – пространство непрерывных функций на M. Для каждого компактного подмножества $K \subset M$, рассмотрим полунорму на V,

$$|f|_K := \sup_{x\in K} |f(x)|$$

Поскольку K компактно, а f непрерывно, имеем $\sup_{x\in K} |f(x)| < \infty$.

Эта система полунорм задает на V топологию, которая называется **топология равномерной сходимости на компактах**. Легко видеть, что V является пространством Фреше (докажите).

Другой пример пространства Фреше получается, если рассмотреть пространство $C^\infty([0,1])$ гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

Легко видеть, что

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant |\varphi^{(k)}|_{C^{n-k}}$$

для любой n-кратно дифференцируемой функции φ. (проверьте это). В частности, $\{f_i^{(k)}\}$ – последовательность Коши в C^{n-k}-топологии, если $\{f_i\}$ – последовательность Коши в C^n.

Поскольку предел по C^0-норме непрерывен, как было доказано выше, предел по C^k-норме – k раз дифференцируемая функция. Действительно, f_i будет k-кратной первообразной для $f_i^{(k)}$, значит, f будет k-кратной первообразной для $f^{(k)} := \lim f_i^{(k)}$ (чтобы получить это, докажите, что взятие первообразной перестановочно с взятием предела по равномерной сходимости).

Замечание 10.6. Мы получили, что пространство $C^k([0,1])$ k раз дифференцируемых функций на $[0,1]$ полно относительно нормы $|\cdot|_{C^k}$. Действительно, пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши относительно этой нормы. Поскольку $|\cdot|_{C^k} \geqslant |\cdot|_{C^0}$, из Теоремы 10.5 следует, что любая последовательность Коши в норме $|\cdot|_{C^k}$ сходится к непрерывной функции. В силу вышесказанного, эта функция k раз дифференцируема.

Рассмотрим пространство $C^\infty([0,1])$ с системой норм, заданных C^i, $i = 0, 1, 2, ...$. В силу вышесказанного, если последовательность $\{f_i\}$ сходится во всех этих нормах, предел этой последовательности гладкий. Поэтому $C^\infty([0,1])$ – пространство Фреше.

10.3. sup-метрика на пространстве отображений

Определение 10.7. Пусть X – топологическое пространство, Y – метрическое пространство. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **ограниченным**, если $f(X)$ лежит в шаре $B_r(y)$ для какого-то $y \in Y$, и $r \in \mathbb{R}$.

На множестве $\operatorname{Map}_b(X,Y)$ ограниченных отображений из X в Y определена sup-**метрика** формулой $d(f_1, f_2) := \sup_{x\in X} d(f_1(x), f_2(x))$ (проверьте, что это метрика). Эта же метрика определяется на $C_b(M)$

посредством sup-нормы (проверьте). Тот же самый аргумент, что доказывает Теорему 10.5 о банаховости $C_b(M)$, доказывает полноту пространства $C_b(X,Y)$ непрерывных, ограниченных отображений. Для доказательства, надо убедиться, что последовательность Коши отображений $\{f_i\} \in C_b(X,Y)$ сходится поточечно к отображению $f \in \operatorname{Map}_b(X,Y)$, а затем воспользоваться замкнутостью графика f, чтоб доказать его непрерывность. Для этого используется такая лемма.

Лемма 10.8: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – отображение топологических пространств, причем график $\Gamma_f \subset X \times Y$ замкнут. Предположим, что Y компактно. Тогда f – непрерывно.

Доказательство: Пусть $\pi_X: X \times Y \longrightarrow X$ - отображение проекции. Для каждого замкнутого подмножества $A \subset Y$,

$$f^{-1}(A) = \pi_X(\Gamma_f \cap X \times A).$$

Если Y компактно, то отображение π_X замкнуто (Лекция 9), поэтому множество

$$\pi_X(\Gamma_f \cap X \times A)$$

тоже замкнуто, а значит, f непрерывно (докажите). ■

Теорема 10.9: Пусть X – топологическое пространство, Y – полное метрическое пространство, а $C_b(X,Y)$ – пространство непрерывных, ограниченных отображений, с sup-метрикой. Предположим, что любой замкнутый шар в Y компактен. Тогда $C_b(X,Y)$ полно.

Доказательство Теоремы 10.9.

Шаг 1: Поскольку $d(f_1(x), f_2(x)) \leqslant d(f_1, f_2)$, любая последовательность Коши $\{f_i\}$ отображений поточечно сходится к ограниченному отображению $f \in \operatorname{Map}_b(X,Y)$. Для доказательства полноты $C_b(X,Y)$ осталось проверить, что f непрерывно.

Шаг 2: Предположим, что любой замкнутый шар в Y компактен. Тогда для любой последовательность Коши

$$\{f_i\} \in \operatorname{Map}_b(X,Y),$$

$\{f_i\}$ целиком лежит в каком-то замкнутом шаре. Поэтому можно считать Y компактным, а значит, выполнено условие Леммы 10.8. Поэтому для доказательства непрерывности f достаточно убедиться в том, что его график замкнут.

Шаг 3: Пусть $\varphi: X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение, где X – топологическое пространство, а Y – метрическое пространство. Обозначим за $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} \subset X \times Y$ множество

$$\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \{(x,y) \in X \times Y \;\;|\;\; d(f(x),y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Докажем, что $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто. В самом деле, пусть $\Psi: X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ отображает (x,y) в $(\varphi(x),y)$, а $A_\varepsilon \subset Y \times Y$ – множество всех пар (y_1,y_2) таких, что $d(y_1,y_2) \leqslant \varepsilon$. Множество A_ε, очевидно, замкнуто (проверьте), а $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Phi^{-1}(A_\varepsilon)$, значит, оно тоже замкнуто.

Шаг 4: Пусть $\varepsilon_i = d(f,f_i)$. Тогда

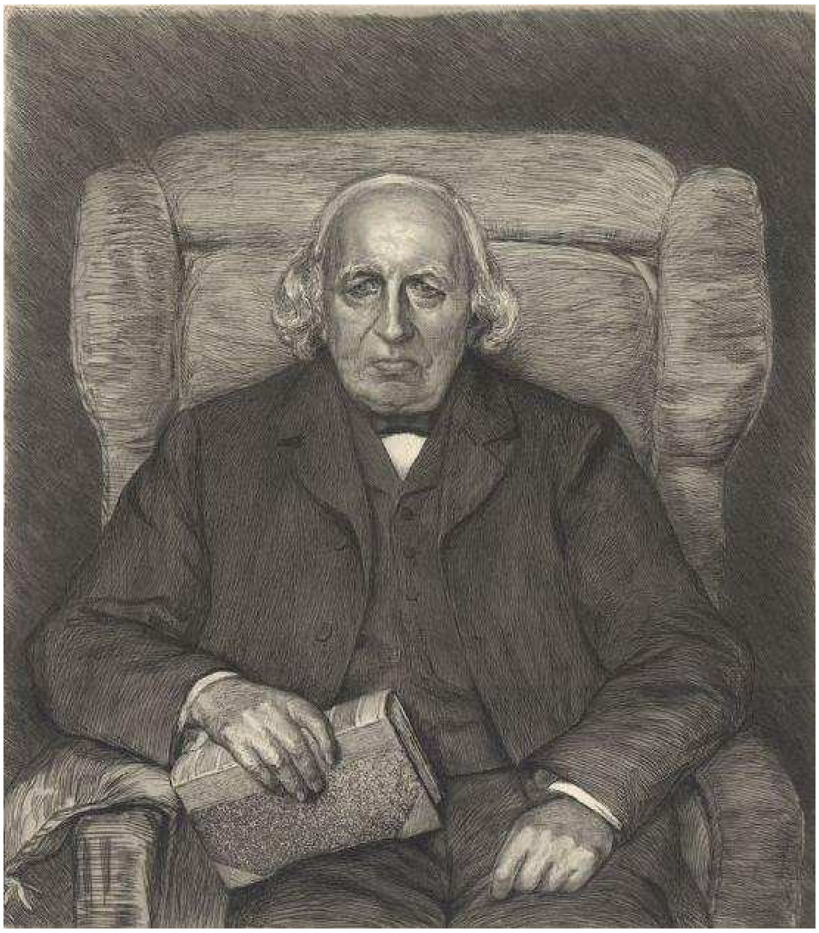
$$\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i,\varepsilon_i}$$

(проверьте). Значит, Γ_f – пересечение замкнутых множеств и оно замкнуто. В силу Шага 2, из этого следует непрерывность f. Мы доказали Теорему 10.9. ■

10.4. История, замечания

В 1821-м году Огюстен Коши опубликовал неправильное доказательство того, что поточечный предел непрерывных функций непрерывен. В скором времени, Абель и Фурье нашли контрпримеры к этому утверждению, а Дирихле обнаружил ошибку в доказательстве Коши.

Определение равномерной сходимости принадлежит, судя по всему, Кристофу Гудерманну (Christoph Gudermann). В 1841-м году ученик Гудерманна Карл Вейерштрасс опубликовал определение равномерной сходимости, и придумал немецкий термин "gleichmäßig konvergent", который переводится на русский как "равномерная сходимость" (по-английски – uniform convergence).



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815 - 1897)