Топология, лекция 10: Равномерная сходимость

Миша Вербицкий

24 марта, 2008

Независимый Университет

Банаховы пространства

Определение: Пусть (V, ν) – пространство с нормой. Напомним, что (V, ν) называется **банаховым**, если оно полно, как метрическое пространство.

Замечание: Мы доказали, что любое конечномерное векторное пространство V гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой. Этот гомеоморфизм билипшицев. Получаем

Утверждение:
Любое конечномерное нормированное пространство – банахово.

Замечание: Отметим также, что единичный шар в (V, ν) компактен.

Теорема Рисса: Пусть V – локально компактное нормированное пространство. **Тогда V конечномерно.**

Доказательство теоремы Рисса

Шаг 0: Если V локально компактно, **замкнутый шар $\bar{B}_1$ компактен.**

Шаг 1: Если шар $\bar{B}_1$ компактен, из покрытия $\bar{B}_1$ открытыми шарами радиуса $\frac{1}{2}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть $\{x_1, ..., x_n\}$ центры шаров, которые составляют это подпокрытие. **Тогда для каждого $v \in V$, $|v| \leqslant 1$, для какого-то x_i, имеем $|v - x_i| < \frac{1}{2}$.**

Шаг 2: Пусть $v \in \bar{B}_1$. Выберем x_{i_1} такой, что $|v - x_{i_1}| < \frac{1}{2}$, затем x_{i_2}, такой, что $|v - x_{i_1} - \frac{1}{2}x_{i_2}| < \frac{1}{4}$, и т.д. Воспользовавшись индукцией, получим

$$\left| v - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k} \right| < \frac{1}{2^n}.$$

Шаг 3: Мы доказали, что $v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} x_{i_k}$. Следовательно, **$v$ принадлежит линейной оболочке векторов $\{x_1, ..., x_n\}$.**

Топология равномерной сходимости

Определение: Напомним, что функцию $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ называют **ограниченной**, если $\sup_{x\in M}|f(x)| < \infty$. Пусть $C_b(M)$ – пространство непрерывных, ограниченных функций на M. Введем на $C_b(M)$ норму по формуле

$$|f| := \sup_{x\in M}|f(x)|.$$

Такая норма называется **L^∞-нормой,** или же **sup-нормой**.

Определение: Определенная этой нормой топология называется **топологией равномерной сходимости**. Последовательность функций, которая сходится в такой топологии, называется **равномерно сходящейся.**

Замечание: **Равномерно сходящаяся последовательность сходится поточечно.** Обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание: Поточечно сходящаяся последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции. **Предел равномерно сходящейся последовательности функций всегда непрерывен.**

Полнота sup-нормы

Теорема: Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен. Более того, пространство $C_b(M)$ с sup-нормой – банахово.

Доказательство. Шаг 1.
Пусть $\{f_i\} \subset C_b(M)$ – последовательность Коши. Поскольку

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant \sup_{x \in M} |f_i(x) - f_j(x)|,$$

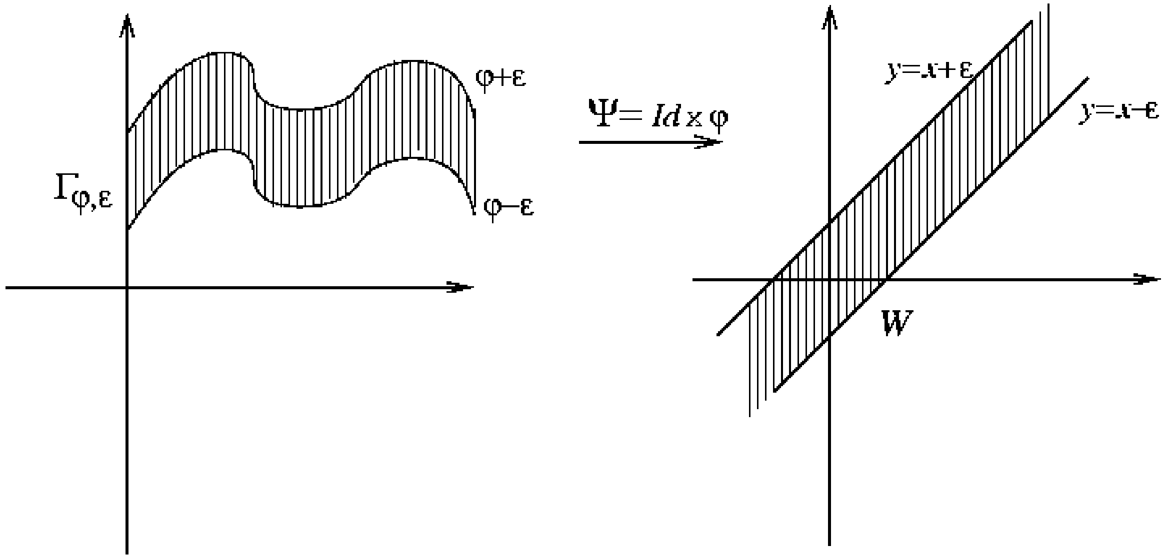
для каждой точки $y \in M$, $\{f_i(y)\}$ – последовательность Коши. **Поэтому f_i поточечно сходятся к функции $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$.**

Шаг 2. Пусть $\varphi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, а $\Gamma_{\varphi,\varepsilon} \subset M \times \mathbb{R}$ это объединение всех ε-отрезков вида $m \times [\varphi(m) - \varepsilon, \varphi(m) - \varepsilon]$. Рассмотрим отображение $\Psi = \varphi \times \mathrm{Id}: M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Поскольку

$$\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Psi^{-1}\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x-y| \leqslant \varepsilon\right\}\right),$$

множество $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто.

Полнота sup-нормы (продолжение)



Шаг 3. Для каждого i, обозначим за ε_i число $|f - f_i|$. График Γ_f лежит в замкнутом множестве $\Gamma_{f_i,\varepsilon_i}$. Получаем

$$\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i,\varepsilon_i}.$$

Поэтому **Γ_f замкнут.**

Шаг 4. Имеем $f^{-1}([a,b]) = \pi(\Gamma_f \cap M \times [a,b])$. Поскольку проекция $\pi : M\times[-C,C] \longrightarrow$ имеет компактные слои, она замкнута. **Поэтому $f^{-1}([a,b])$ замкнуто, а значит, f непрерывно.**

Пространства Фреше

Определение: Пусть V – топологическое векторное пространство, с хаусдорфовой топологией, заданной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$. Напомним, что V называется **пространством Фреше**, когда оно **полно,** то есть когда каждая последовательность $\{x_i\}$, которая является последовательностью Коши относительно всех полунорм ν_α, сходится к $x \in V$.

Пусть M – локально компактное топологическое пространство, а V – пространство непрерывных функций на M. Для каждого компактного подмножества $K \subset M$, рассмотрим полунорму на V,

$$|f|_K := \sup_{x \in K} |f(x)|$$

Определение: Эта система полунорм задает на V топологию, которая называется **топология равномерной сходимости на компактах**.

Замечание: Эта система полунорм полна. Действительно, поточечный предел последовательности Коши существует, и непрерывен на каждом компакте.

Пространство гладких функций на отрезке

Определение: Пусть $C^\infty([0,1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

Утверждение:
$C^\infty([0,1])$ с такой системой полунорм – пространство Фреше.

Доказательство: Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant \left|\varphi^{(k)}\right|_{C^{n-k}},$$

для любой последовательности Коши $\{f_i\}$, $\{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши. Предел последовательности $\{f_i\}$ будет k-кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий.

Замкнутость графика отображения влечет непрерывность

Лемма 1: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – отображение топологических пространств, причем график $\Gamma_f \subset X \times Y$ замкнут. Предположим, что Y компактно. **Тогда f – непрерывно.**

Доказательство. Пусть $\pi_X: X \times Y \longrightarrow X$ - отображение проекции. Для каждого замкнутого подмножества $A \subset Y$,

$$f^{-1}(A) = \pi_X(\Gamma_f \cap X \times A).$$

Если Y компактно, то отображение π_X замкнуто, поэтому множество $f^{-1}(A)$ замкнуто, а значит, f непрерывно.

sup-**метрика на пространстве отображений**

Определение:
Пусть X – топологическое пространство, Y – метрическое пространство. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **ограниченным**, если $f(X)$ лежит в шаре $B_r(y)$.

На множестве $\mathsf{Map}_b(X,Y)$ ограниченных отображений из X в Y определена sup-**метрика** формулой $d(f_1,f_2) := \sup_{x\in X} d(f_1(x), f_2(x))$

Теорема: Пусть X – топологическое пространство, Y – полное метрическое пространство, а $C_b(X,Y)$ – пространство непрерывных, ограниченных отображений, с sup-метрикой. Предположим, что любой замкнутый шар в Y компактен. **Тогда $C_b(X,Y)$ полно.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $d(f_1(x), f_2(x)) \leqslant d(f_1,f_2)$, последовательность Коши $\{f_i\}$ отображений поточечно сходится к ограниченному отображению $f \in \mathsf{Map}_b(X,Y)$. **Для доказательства полноты $C_b(X,Y)$ осталось проверить, что f непрерывно.**

Непрерывность предела последовательности Коши в $C_b(X,Y)$ (доказательство)

Шаг 2: Поскольку $\{f_i\}$ ограничены, они все принимают значение в каком-то замкнутом шаре. Заменив Y на этот замкнутый шар, можно считать, что Y компактно. В силу Леммы 1, **для доказательства непрерывности f достаточно убедиться, что его график замкнут.**

Шаг 3: Пусть $\varphi: X \longrightarrow Y$ непрерывно, а

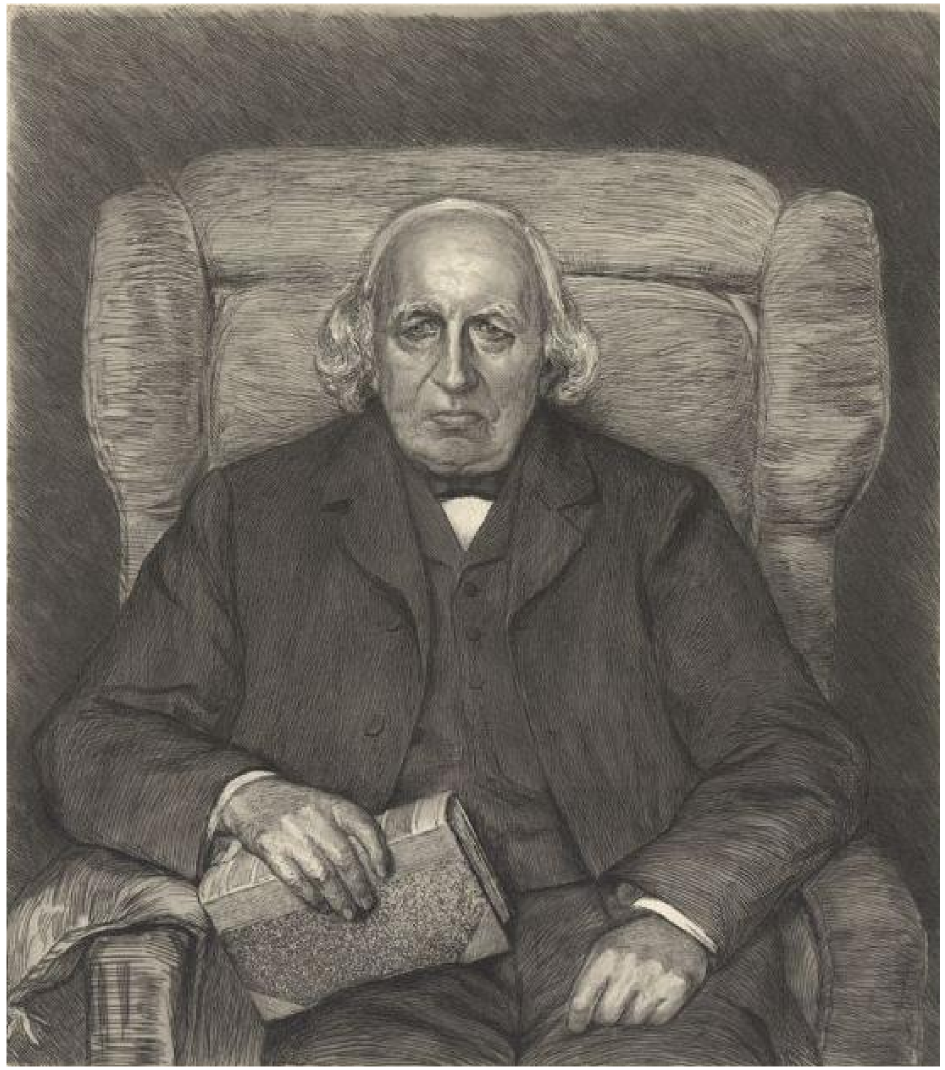
$$\Gamma_{\varphi,\varepsilon} := \{(x,y) \in X \times Y \ \mid\ d(f(x),y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Пусть $\Psi: X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ отображает (x,y) в $(\varphi(x),y)$. Тогда

$$\Gamma_{\varphi,\varepsilon} = \Psi^{-1}\left(\left\{(y_1,y_2) \in Y \times Y \mid d(y_1,y_2) \leqslant \varepsilon\right\}\right).$$

Следовательно, $\Gamma_{\varphi,\varepsilon}$ замкнуто.

Шаг 4: Пусть $\varepsilon_i = d(f,f_i)$. Поскольку $\Gamma_f = \bigcap_i \Gamma_{f_i,\varepsilon_i}$ – пересечение замкнутых множеств, оно замкнуто. **Значит, f непрерывно.**



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815 - 1897)

Топология, лекция 0: Лемма Цорна и теорема Цермело

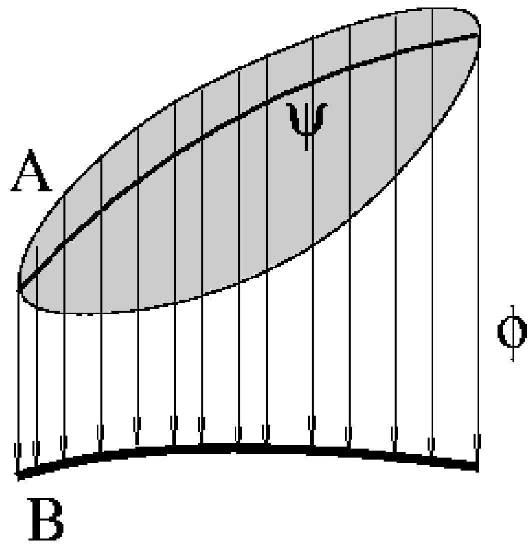
Миша Вербицкий

24 марта, 2008

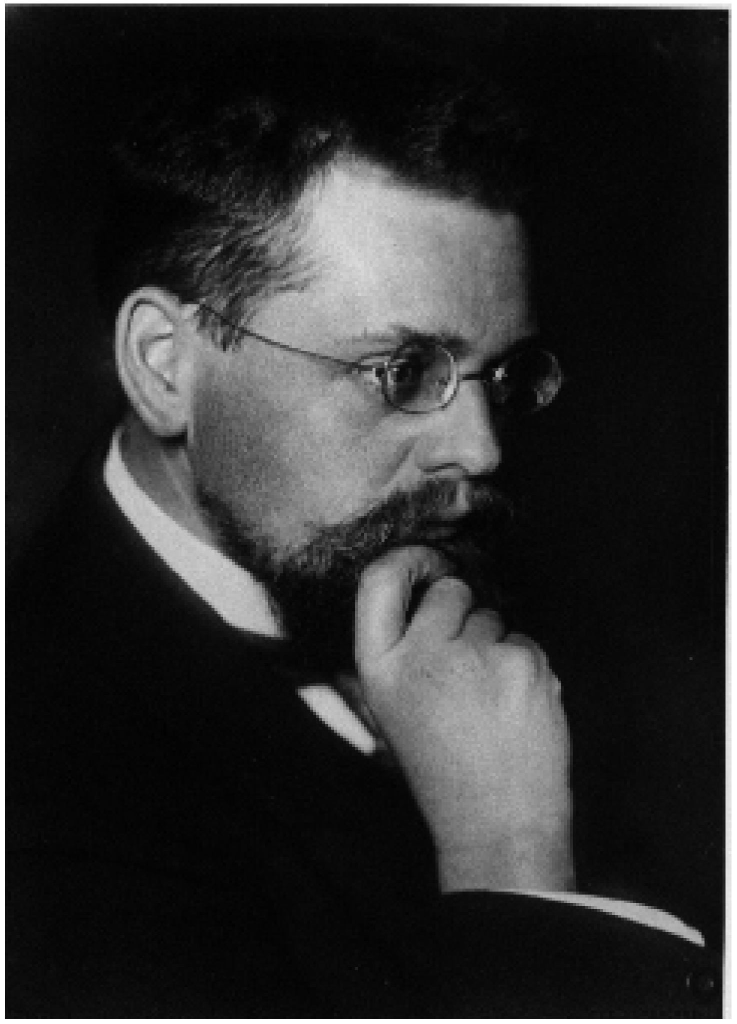
Независимый Университет

Аксиома выбора

Пусть $\varphi: A \longrightarrow B$ сюрьективное отображение множеств. **Сечением** отображения φ называется отображение $\psi: B \longrightarrow A$, такое, что $\psi \circ \varphi = \mathsf{Id}$.



Аксиома выбора утверждает, что каждое сюрьективное отображение имеет сечение



Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
(1871 - 1953)

Результаты, требующие аксиомы выбора

1. Теорема о существовании максимальных идеалов.

2. Теорема о существовании базиса в бесконечномерном векторном пространстве (“базиса Коши-Гамеля”).

3. Теорема Хана-Банаха о существовании замкнутой гиперплоскости, разделяющей два выпуклых, непересекающихся, замкнутых подмножества в топологическом векторном пространстве.

4. Теорема Тихонова о компактности произведения бесконечного количества компактов.

5. Из аксиомы выбора следует, что для любых множеств X, Y, **X равномощно подмножеству Y, либо Y равномощно подмножеству X.**

Утверждения 1, 2, 4, 5 равносильны аксиоме выбора, а теорема Хана-Банаха существенно слабее.

Частично упорядоченные множества

Определение: Пусть X – множество, а $R \subset X \times X$ – бинарное отношение на множестве X, обозначенное $x_1 \prec x_2$. Это отношение называется **отношением частичного порядка**, если оно удовлетворяет следующим свойствам.
транзитивность: из $x \prec y$ и $y \prec z$ следует $x \prec z$.
асимметричность: если $x \prec y$, то невозможно $y \prec x$.

Множество $(X, \prec)$ с отношением частичного порядка называется **частично упорядоченное множество**.

Определение: Пусть $(X, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Если для каких-то $x, y \in X$ имеет место $x \prec y$ либо $y \prec x$, мы говорим, что x и y **сравнимы**. Отношение $\prec$ называется **отношением линейного порядка** (total order), если любые два элемента сравнимы. Множество $(X, \prec)$ с отношением линейного порядка называется **линейно упорядоченное множество**.

Вполне упорядоченные множества

Определение: Пусть $(X, \prec)$ – линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ – его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется **минимальным**, если для любого $y \in Y$, имеем $y_0 \preccurlyeq y$. Линейно упорядоченное множество называется **вполне упорядоченным**, если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется **отношение полного порядка**.

Определение: **Начальным элементом** вполне упорядоченного множества называется его минимальный элемент. **Отрезком** линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется подмножество $Y \subset X$ такое, что для любых $x, z \in Y$, и любого $y \in X$ такого, что $x \prec y \prec z$, имеем $y \in Y$. **Начальным отрезком** вполне упорядоченного множества называется отрезок, содержащий минимальный элемент.

Замечание: Пусть $X_0 \subset X$ – начальный отрезок вполне упорядоченного множества, x_0 его начальный элемент, а x – минимальный элемент в $X \backslash X_0$ (мы предполагаем, что это множество непусто). **Тогда X_0 – множество всех y таких, что $x_0 \preccurlyeq y \prec x$.** Мы обозначаем такой отрезок $[x_0, x[$.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(1845 - 1918)

Сравнение ординалов

Определение: Два вполне упорядоченных множества называются **изоморфными**, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются **ординалами**, или же **ординальными числами**.

Теорема: Пусть X, Y – вполне упорядоченные множества. Тогда X изоморфно начальному отрезку Y, либо Y изоморфно начальному отрезку X. Более того, такой изоморфизм определен однозначно.

Доказательство теоремы о сравнении ординалов. Пусть Z – множество пар (X_1, Y_1) изоморфных начальных отрезков X и Y.

Шаг 1: Изоморфизм начальных отрезков (X_1, Y_1) определяется однозначно множеством X_1. В самом деле, пусть существует два различных вложения $\varphi: X_1 \longrightarrow Y$ и $\varphi': X_1 \longrightarrow Y$, задающие изоморфизм X_1 и начального отрезка Y. Обозначим за x минимальный элемент X_1, такой, что $\varphi(x) \neq \varphi'(x)$. Тогда $\varphi\Big|_{[x_0,x[} = \varphi'\Big|_{[x_0,x[}$, следовательно, $\varphi(x) = \varphi'(x)$.

Сравнение ординалов (продолжение)

Шаг 2: Мы получили, что Z упорядочено по включению, и это отношение задает на Z полный порядок. Пусть x – минимальный элемент X, не принадлежащий X_1 для какого-то $(X_1, Y_1) \in Z$. Если такого нет, это значит, что X изоморфен начальному отрезку Y. Если $Y_1 = Y$, мы все доказали. В противном случае, начальный отрезок $[x_0, x[$ изоморфен начальному отрезку $[y_0, y[$, следовательно, отрезок $[x_0, x]$ изоморфен $[y_0, y]$. Мы пришли к противоречию!

Замечание: Эта теорема определяет порядок на ординалах: один ординал меньше другого, если первый изоморфен отрезку второго.

Замечание: Ординалы можно складывать и умножать. Эти операции ассоциативны, некоммутативны, и сложение дистрибутивно слева относительни умножения.

Лемма Цорна и теорема Цермело

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$.

Лемма Цорна Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. Тогда в S найдется максимальный элемент.

Теорема Цермело: ("well-ordering theorem") Любое множество может быть вполне упорядочено.

Теорема: Следующие утверждения равносильны:
ZL: Лемма Цорна
WOT: Теорема Цермело
AC: Аксиома выбора.

Лемма Цорна и теорема Цермело (продолжение)

ZL$\Rightarrow$ WOT: Пусть X – любое множество, а S – множество всех пар $(X_1, \prec)$, где $X_1 \subset X$ – подмножество, а $\prec$ – отношение полного порядка на X_1.

Рассмотрим отношение частичного порядка на S: $(X_1, \prec) < (X_2, \prec)$, если $(X_1, \prec)$ это начальный отрезок $(X_2, \prec)$. Поскольку условие леммы Цорна выполнено для $(S, <)$, **в S есть максимальный элемент $(\Xi, \prec)$.** Если $\Xi \neq X$, возьмем $\xi \in X \backslash \Xi$, и определим отношение порядка на $\Xi_1 := \Xi \cup \{\xi\}$, положив $\Xi \prec \xi$. Тогда Ξ будет начальным отрезком Ξ_1. Это невозможно, так как Ξ максимальный. Значит, $\Xi = X$.

WOT $\Rightarrow$ AC: Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ – сюрьекция, а X вполне упорядочено. Определим сечение $Y \xrightarrow{\psi} X$, взяв за $\psi(y)$ минимальный (в смысле полного порядка) элемент $\varphi^{-1}(y)$.

Доказательство Леммы Цорна

AC $\Rightarrow$ ZL. Шаг 1: Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна, и не содержащее максимального элемента. **Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$, найдется $\xi \succneqq S_1$.**

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{S}$ – множество вполне упорядоченных подмножеств S, а $\gamma : \mathfrak{S} \longrightarrow S$ – отображение, переводящее $S_1 \subset S$ в элемент $\xi \in S$, удовлетворяющий $\xi \succ S_1$. Для доказательства существования γ используется аксиома выбора. Пусть

$$\mathfrak{R} := \{(S_1 \in \mathfrak{S}, \xi \in S) \mid \xi \succ S_1\}$$

Естественная проекция $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ сюрьективна (Шаг 1). **Сечение $\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{S}$ в композиции с проекцией $\mathfrak{R} \longrightarrow S$ задаст искомое отображение γ.**

Доказательство Леммы Цорна (продолжение)

Шаг 3: Пусть Θ – множество вполне упорядоченных подмножеств $P \subset S$ таких, что для каждого $p \in P$, начальный отрезок $[p_0, p[$ удовлетворяет $p = \gamma([p_0, p[)$. Когда $p = p_0$, это значит, что $p_0 = \gamma(\emptyset)$. **Тогда множество Θ вполне упорядочено по вложению.** Возьмем $P, Q \in \Theta$, и пусть p – минимальный элемент P такой, что отрезок $[p_0, p[$ лежит в Q, а $[p_0, p]$ уже не лежит в Q. Поскольку $p = \gamma([p_0, p[)$, а $[p_0, p[$ лежит в Q, из $p \notin Q$ следует, что $Q = [p_0, p[$. **Значит, P – начальный отрезок Q, либо Q – начальный отрезок P.**

Шаг 4: Объединение $P_\infty := \bigcup_{P \in \Theta} P$ лежит в Θ. **Это невозможно, потому что объединение $P_\infty \cup \gamma(P_\infty)$ строго больше P_∞, и тоже лежит в Θ.** Мы пришли к противоречию! Лемма Цорна доказана.