13. Топология, лекция 13: Вполне несвязные пространства

13.1. Примеры вполне несвязных пространств

Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что M называется **вполне несвязным** (totally disconnected), если любое подмножество M, взятое с индуцированной топологией, несвязно.

Подмножество $U \subset M$ называется **открытозамкнутым** (clopen), если оно одновременно открыто и замкнуто.

Замечание 13.1. Конечное пересечение, конечное объединение, дополнение открытозамкнутых подмножеств снова открытозамкнуто.

Замечание 13.2. Пусть в топологическом пространстве M есть предбаза из открытозамкнутых множеств. Тогда в M есть база из открытозамкнутых множеств. Действительно, базу можно получить из предбазы взятием конечных пересечений (докажите).

Замечание 13.3. Предположим, что у хаусдорфова топологического пространства M есть база топологии, состоящая из открытозамкнутых множеств. Тогда оно вполне несвязно. Действительно, в этом случае у каждого подмножества $Z \subset M$ есть база из открытозамкнутых множеств. В случае, когда Z содержит более одной точки, Z содержит непустое и не совпадающее с Z открытозамкнутое множество (выведите это из хаусдорфовости M).

Замечание 13.4. Пусть M – топологическое пространство, у которого есть база из открытозамкнутых множеств. Тогда тихоновское произведение M^I для любого набора индексов I имеет базу из открытозамкнутых множеств (докажите). Поэтому оно вполне несвязно.

Задача 13.5. Докажите, что произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.

Пример 13.6: Пусть $M = \{0, 1\}$ – множество из двух точек, с дискретной топологией (такое множество называется **двоеточием**). Произведение любого числа двоеточий компактно (по теореме Тихонова), хаусдорфово и вполне несвязно.

Замечание 13.7. Предположим, что (M, d) - метрическое пространство, причем метрика $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ не принимает значений в интервале $]\alpha, \beta[$, где $\beta > \alpha$. Тогда замкнутый шар $\bar{B}_\alpha(x)$ открытозамкнут. Действительно, $\bar{B}_\alpha(x) = B_{\alpha+\varepsilon}(x)$, для любого ε такого, что $\alpha+\varepsilon \in]\alpha, \beta[$, а шар $B_{\alpha+\varepsilon}(x)$ открыт.

Пример 13.8: Из этого немедленно следует, что пространство $\mathbb{Z}_p$ p-адических целых чисел вполне несвязно. Действительно, p-адическая метрика принимает значения в множестве $\{p^s, s \in \mathbb{Z}\}$, и в силу предыдущего замечания любой шар в $\mathbb{Z}_p$ открытозамкнут (докажите).

Задача 13.9. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Пример 13.10: Легко видеть, что $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел, с естественной топологией) вполне несвязно (докажите это) и некомпактно.

Задача 13.11. Найдите все компактные подмножества в $\mathbb{Q}$.

13.2. Пространства Стоуна

Определение 13.12. Компактное, вполне несвязное, хаусдорфово топологическое пространство называется **пространством Стоуна** (Stone space).

Лемма 13.13: Пусть M – пространство Стоуна, а $x, y \in M$ – две разные точки. Тогда у x и y есть непересекающиеся, открытозамкнутые окрестности.

Доказательство: Пусть $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$ – пересечение всех открытозамкнутых подмножеств, содержащих x. Если Z не содержит y, какое-то открытозамкнутое подмножество $U \ni x$ не содержит y, тогда его дополнение $M \backslash U$ содержит y, и мы получим, что у x и y есть непересекающиеся открытозамкнутые окрестности. Поэтому достаточно доказать, что $Z = \{x\}$.

Шаг 1: Предположим, что $Z \neq \{x\}$. Поскольку Z – пересечение замкнутых подмножеств M, оно замкнуто. Поскольку Z несвязно, Z есть объединение непересекающихся подмножеств $Z = Z_x \coprod Z'$, замкнутых

Marshall Harvey Stone
(1903 - 1989)

в Z,[1] где Z_x содержит x, а Z' не содержит x. Но коль скоро Z замкнуто, Z_x, Z' замкнуты в M (проверьте это).

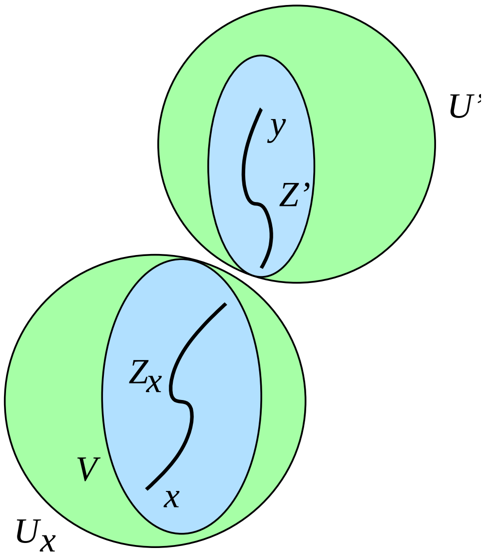
Шаг 2: Поскольку M компактно и хаусдорфово, M нормально, то есть любые два замкнутых, непересекающихся подмножества M имеют непересекающиеся окрестности (Лекция 8). Применив это к Z_x, Z', получим непересекающиеся окрестности $U_x \supset Z_x, U' \supset Z'$.

Шаг 3: Обозначим за K дополнение $M \backslash (U_x \cup U')$ Поскольку $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$, имеем

$$K \subset \bigcup_\alpha (M \backslash U_\alpha).$$

Поскольку K замкнуто, а M компактно, K тоже компактно. Поэтому

[1] Обозначение $X = Y \coprod Z$ используется, чтобы указать, что X есть объединение непересекающихся множеств Y и Z.



Непересекающиеся окрестности Z_x, Z'

открытое покрытие $K \subset \bigcup_\alpha (M \backslash U_\alpha)$ имеет конечное подпокрытие:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (M \backslash U_i)$$

где все U_i открытозамкнуты, и содержат Z. Из этого следует, что $U := \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ открытозамкнуто, содержит x, и содержится в $M \backslash K = U_x \cup U'$.

Шаг 4: $U = (U \cap U_x) \coprod (U \cap U')$. Поскольку U_x, U' открыты, $U \cap U_x$ открыто и замкнуто в U. Следовательно, $V = U \cap U_x$ открыто и замкнуто в M. Это множество не пересекается с Z', и содержит x, по построению. Значит, пересечение всех открытозамкнутых окрестностей x не не пересекается с Z'. Мы пришли к противоречию, и доказали, что $Z = \{x\}$. Лемма 13.13 доказана. ■

Из этой леммы немедленно следует

Теорема 13.14: Пусть M – пространство Стоуна. Тогда у M есть база топологии, состоящая из открытозамкнутых подмножеств.

Доказательство: Пусть $\mathcal{T}$ – топология на M, а $\mathcal{T}_1$ – топология, полученная из базы, состоящей из всех открытозамкнутых подмножеств M.

Естественное отображение

$$(M, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M, \mathcal{T}_1)$$

биективно и непрерывно (проверьте). В силу Леммы 13.13, пространство $(M, \mathcal{T}_1)$ хаусдорфово (докажите это). Непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом, следовательно, топология $\mathcal{T}$ экивалентна $\mathcal{T}_1$). ■

Замечание 13.15. Из Леммы 13.13 немедленно вытекает, что для любой пары точек $x, y \in M$, существует непрерывная функция

$$f:\ M \longrightarrow \{0,1\},$$

принимающая значение 1 на x и 0 на y.

Пусть $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Рассмотрим отображение

$$M \xrightarrow{\ \Psi\ } \{0,1\}^R,$$

переводящее m в $\prod_{\varphi\in R}\varphi(m)$. Оно непрерывно, что следует из определения тихоновской топологии (проверьте это). Из Замечания 13.15 следует, что Ψ инъективно; поскольку M компактно, из этого вытекает, что Ψ – это гомеоморфизм на его образ. Мы получили следующую теорему

Теорема 13.16: Пусть M – пространство Стоуна. Тогда M гомеоморфно замкнутому подмножеству в тихоновском произведении $\{0,1\}^I$, для какого-то набора индексов I.

14. Топология, лекция 14: Теорема Стоуна о представлении булевых колец и теория категорий

14.1. Категории

Определение 14.1. **Категорией** $\mathcal{C}$ называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами" и так далее), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

Данные:

Объекты: Множество $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$ объектов $\mathcal{C}$ (иногда рассматривают не множество, а *класс* $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, задано множество $\mathcal{M}or(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y.

Композиция морфизмов: Если $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y), \psi \in \mathcal{M}or(Y, Z)$, задан морфизм $\varphi \circ \psi \in \mathcal{M}or(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ задан морфизм $\mathsf{Id}_A \in \mathcal{M}or(A, A)$.

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y)$, $\mathsf{Id}_x \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathsf{Id}_Y$.

Практически любая математическая структура является категорией. Например, категория множеств (морфизмы – произвольные отображения), категория линейных пространств (морфизмы – линейные отображения), категории колец, полей, групп (морфизмы – гомоморфизмы), категория топологических пространств (морфизмы – непрерывные отображения) и так далее.

Категории сами образуют категорию; морфизмами этой категории являются **функторы**.

Определение 14.2. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – категории. **Ковариантным функтором** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ называется следующий набор данных.

(i) Отображение $F: \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{C}_2)$, ставящее в соответствие объектам $\mathcal{C}_1$ объекты $\mathcal{C}_2$.

(ii) Отображение морфизмов $F: \mathcal{M}or(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}or(F(X), F(Y))$, определенное для любой пары объектов $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1)$.

Эти даные *определяют функтор из* $\mathcal{C}_1$ *в* $\mathcal{C}_2$, если $F(\varphi)\circ F(\psi) = F(\varphi\circ\psi)$, и $F(\mathsf{Id}_X) = \mathsf{Id}_{F(X)}$.

Легко видеть, что композиция функторов – тоже функтор; таким образом, категория всех категорий – тоже категория.

Пример 14.3: Любая "естественная операция" на математических объектах - это функтор. Например, отображение $X \longrightarrow 2^X$ на категории множеств, или отображение $M \longrightarrow M^I$ на топологических пространствах, для заданного набора индексов I, или отображение $V \longrightarrow V\oplus V$ на линейных пространствах. Другим примером функтора является **тождественный функтор** из категории в себя. Еще один пример функтора – отображение, ставящее в соответствие топологическому пространству его пространство связных компонент.

Определение 14.4. Если задана категория $\mathcal{C}$, можно определить **двойственную категорию** ("opposite category") $\mathcal{C}^{op}$. Множество объектов в $\mathcal{C}^{op}$ – то же самое, что и в $\mathcal{C}$, а $\mathcal{M}or_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(B,A)$. Соответственно, композиция $\varphi\circ\psi$ в $\mathcal{C}$ дает композицию $\psi^{op}\circ\varphi^{op}$ в $\mathcal{C}^{op}$. Проверьте, что это категория.

Определение 14.5. Контравариантный функтор из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ это функтор из $\mathcal{C}_1^{op}$ в $\mathcal{C}_2$.

Пример 14.6: Примером контравариантного функтора является отображение, ставящее векторному пространству V в соответствие двойственное пространство V^*. Другим примером функтора является отображение из топологических пространств в кольца, ставящее в соответствие топологическому пространству M кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на M (проверьте, что это функтор).

Определение 14.7. Пусть $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y,X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathsf{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathsf{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Замечание 14.8. Пусть $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объект категории $\mathcal{C}$. Тогда отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ задает ковариантный функтор из $\mathcal{C}$ в категорию Set множеств (проверьте это), а отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(Y,X)$ задает контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в Set (проверьте). Такие функторы называются **представимыми**.

Определение 14.9. Два функтора $F, G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X : F(X) \longrightarrow G(X)$, для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$,

$$F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi). \qquad (14.1.1)$$

Замечание 14.10. Подобные коммутационные отношения принято изображать **коммутативными диаграммами**. Так, к примеру, (14.1.1) можно записать следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \Psi_X}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array} \qquad (14.1.2)$$

Задача 14.11. Пусть $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$ – функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств. Предположим, что F *представим:* F эквивалентен функтору $Y \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$. Докажите, что тогда X определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Определение 14.12. Функтор $F: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если найдутся функторы $G, G': \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ такие, что $F \circ G$ эквивалентен тождественному функтору на $\mathcal{C}_1$, а $G' \circ F$ эквивалентен тождественному функтору на $\mathcal{C}_2$.

Замечание 14.13. Можно проверить, что это равносильно следующему: F задает биекцию на классах изоморфизма объектов, и биекцию $\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X), F(Y))$.

С точки зрения теории категорий, эквивалентные категории неразличимы.

Saunders Mac Lane
(1909-2005)

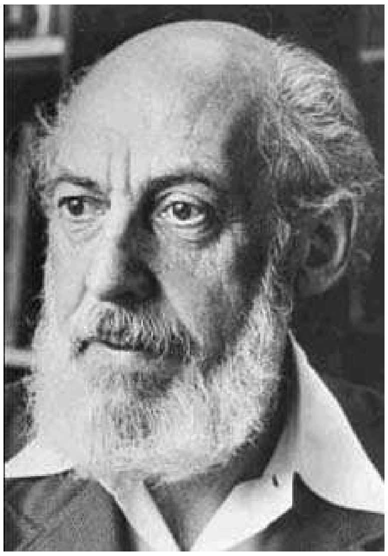
14.2. Теория категорий: история, замечания

Категории были изобретены топологами Самуэлем Эйленбергом и Сондерсом Мак Лэйном в 1942-45 годах, для употребления в топологии. Эйленберг и Мак Лэйн заметили, что алгебраические инварианты топологических пространств (такие, как фундаментальная группа) являются функторами. Также функторами являются различные естественные конструкции в топологии, например, "пространство петель", сопоставляющее пространству M пространство отображений $C(S^1, M)$ (Лекция 11). Эйленберг и Мак Лэйн обнаружили, что алгебраическую топологию гораздо проще изучать, если абстрагироваться от геометрической стороны дела. Несмотря на кажущуюся абстрактность, условие функториальности того или иного отображения во многих случаях достаточно для доказательства единственности и для его явного вычисления, и дополнительные геометрические детали только затрудняют работу.

Основным алгебраическим инвариантом топологического пространства является **группа когомологий**; к середине 1940-х, топологи знали с десяток разных геометрических определений когомологий, но работать с ними было неловко, потому что эквивалентность доказывать не умели. Эйленберг и Мак Лэйн, а в 1950-е – Эйленберг и Стинрод определили когомологии в терминах категорий, таким образом, что проверить различные свойства когомологий оказалось очень просто.

В конце 1950-х теория категорий легла в основу алгебраической геометрии, разработанной А. Гротендиком, Ж. Дьедонне и группой Бурбаки, в книге "Éléments de géométrie algébrique" и других книгах, и стала основным языком современной математики, без которого не обходится ни одна область, развившаяся после 1960-х.

В терминах категорий можно определить довольно много математических конструкций, не прибегая к "множествам", и их "элементам". Например, произведение объектов A и B категории $\mathcal{C}$ можно определить как такой объект $A \times B$, что функтор $X \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X, A \times B)$ из $\mathcal{C}$ в категорию множеств эквивалентен функтору $X \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X, A) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(X, B)$.



Samuel Eilenberg
(1913-1998)

Многие математики предлагают отказаться от теории множеств в изложении основ математики, и использовать вместо нее аксиomatическую теорию категорий.[1] Впрочем, сама теория категорий не свободна от теоретико-множественных трудностей, которые связаны с тем, что $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ для большинства категорий (для категории множеств, например) – не множество, а класс.

Следуя Гротендику и Вердье, теоретико-множественные трудности в определении категории обыкновенно обходят следующим способом. **Малой категорией** называется такая категория, у которой $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ – множества. Вместо категории "всех" (множеств, пространств, колец и так далее) рассматривают категорию множеств, пространств, колец и так далее, с мощностью, ограниченной некоторым (раз и навсегда выбранным) кардиналом, который называется **универсумом Гротендика**, и определяется аксиоматически. Пользуясь аксиомами универсума, легко видеть, что каждая категория с объектами малой мощности эквивалентна малой категории.

Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)

К сожалению, существование универсума равносильно существованию *сильно недостижимых кардиналов* в теории множеств. Подобная

[1] Первым тут был, видимо, Ловир (F. W. Lawvere), предложивший категории в качестве фундамента математики в своей диссертации в 1963-м году; с тех пор эту точку зрения разнообразно развивали и логики, и специалисты по категориям.

аксиома независима от аксиом ZFC (Цермело-Френкеля плюс аксиома выбора). Непротиворечивость ZFC равносильна непротиворечивости ZFC, где дополнительно постулировано несуществование сильно недостижимых кардиналов. Из существования сильно недостижимых кардиналов можно вывести непротиворечивость ZFC в рамках самой ZFC, поэтому непротиворечивость аксиомы универсума строго сильнее, чем ZFC.

14.3. Булевы кольца и булевы алгебры

Определение 14.14. **Идемпотент** в кольце – элемент, удовлетворяющий соотношению $x^2 = x$. **Булево кольцо** – кольцо (коммутативное, с единицей), где любой элемент является идемпотентом.

Замечание 14.15. Отметим, что в булевом кольце выполнено соотношение $2x = 0$ для любого x. Действительно,

$$0 = (x+1)^2 - x - 1 = (x^2 - x) + 2x = 2x.$$

Булевы кольца чрезвычайно важны в логике и информатике, ибо категория булевых колец эквивалентна категории булевых алгебр, то есть алгебр логических высказываний.

Определение 14.16. Пусть A – множество, наделенное бинарными операциями $\wedge$ (коньюнкция, "и"), $\vee$ (дизъюнкция, "или"), и $\neg$ (негация, "не"), и выделены элементы 1 ("правда") и 0 ("ложь"). A называется **булевой алгеброй**, если выполнены следующие условия.

ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$

дистрибутивность: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$

дополнительность: $a \vee \neg a = 1$, $a \wedge \neg a = 0$.

Замечание 14.17. Этим условиям, очевидно, удовлетворяет любой набор логических утверждений, которые могут принимать значения "истинно" и "ложно". Логические операции ("и", "или", "не") превращают такой набор утверждений в булеву алгебру.

Замечание 14.18. Пусть A – булева алгебра. Зададим на A умножение и сложение следующим образом: $a \cdot b := a \wedge b$, $a + b := (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$ (сумма соответствует "симметрической разности", или, что то же самое, "исключающему или"). Полученные операции удовлетворяют аксиомам кольца (это ясно из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности; проверьте). Ноль и 1 играют роль 0 и 1, а соотношение $a^2 = a$ следует из аксиомы дополнительности $a + \neg a = 1$, которая (после домножения на a) влечет

$$a \wedge a + a \wedge \neg a = a$$

применив $a \wedge \neg a = 0$ (дополнительность), обретем $a^2 = a$. Мы получили функтор F из категории булевых алгебр в категорию булевых колец.

Теорема 14.19: Этот функтор – эквивалентность категорий.

Доказательство: Чтобы доказать, что $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1$ эквивалентность, надо построить обратный функтор G, то есть из каждого булева кольца произвести булеву алгебру. Делается это весьма просто: если A – булево кольцо, операции $\neg, \wedge, \vee$ определяются формулами $\neg a = 1 - a$, $a \wedge b = ab$, $a \vee b = ab + a + b$. Аксиомы булевой алгебры проверяются непосредственно (проверьте их), а взаимная обратность F и G очевидна из конструкции. ■

Пример 14.20: Пусть M – любое топологическое пространство, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M со значениями в поле $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Тогда R – булево кольцо. Оно называется **кольцом открытозамкнутых подмножеств** M, а соответствующая булева алгебра – **алгеброй открытозамкнутых подмножеств**.

Следующая простая лемма известна из Лекции 9.

Лемма 14.21: Пусть R – булево кольцо, а $I \subset R$ – максимальный идеал в R. Тогда $R/I \cong \mathbb{F}_2$.

Доказательство: Поскольку R состоит из идемпотентов, поле R/I тоже состоит из идемпотентов. Это значит, что все его элементы являются корнями многочлена $x^2 - x = 0$. По теореме Безу, многочлен степени m в поле не может иметь больше m разных корней, значит, R/I состоит из двух элементов. ■

Замечание 14.22. Похожий аргумент доказывает, что каждый простой идеал в булевом кольце – максимальный. Действительно, пусть $I \subset R$ – простой идеал. Тогда R/I – кольцо без делителей нуля, все элементы которого – идемпотенты. Для любого $x \in R/I$, имеем $x(1-x) = 0$, значит, или x или $1 - x$ равны 0.

14.4. Спектр Зариского для булева кольца

Определение 14.23. Пусть R – булево кольцо, а $\mathsf{Spec}(R)$ – множество максимальных (или простых; в силу Замечания 14.22, все простые идеалы в R максимальны) идеалов в R, снабженное **топологией Зариского**. Напомним, что база открытых множеств в топологии Зариского состоит из множеств

$$A_f := \{\mathfrak{m} \in \mathsf{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{m}\},$$

где $f \in R$ – какой-то элемент R. Пространство $\mathsf{Spec}(R)$ называется **спектром**, или **пространством Зариского** кольца R.

Замечание 14.24. Для любого $f \in R$, имеем $\mathsf{Spec}(R) = A_f \coprod A_{1-f}$. Действительно, $f \notin \mathfrak{m}$ равносильно $(1-f) \in \mathfrak{m}$, потому что $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$.

Замечание 14.25. Из этого немедленно вытекает, что все множества A_f открытозамкнуты, и значит, $\mathsf{Spec}(R)$ вполне несвязно (докажите).

Замечание 14.26. Если $x \neq y \in \mathsf{Spec}(R)$ – максимальные идеалы, найдется $f \in x$, $f \notin y$. В этом случае, A_f, A_{1-f} – непересекающиеся окрестности x и y. Мы получили, что $\mathsf{Spec}(R)$ хаусдорфово.

Лемма 14.27: Пусть R – кольцо, а $\mathsf{Spec}(R)$ – его пространство Зариского. Тогда $\mathsf{Spec}(R)$ компактно.

Доказательство: Пусть $M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ – покрытие $M = \mathsf{Spec}(R)$. Для доказательства Леммы достаточно убедиться, что в $\bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ найдется конечное подпокрытие (проверьте). Обозначим $V_f := M \backslash A_f$. Это множество состоит из всех идеалов, содержащих f. Пусть I - идеал, порожденный всеми f_α. Очевидно,

$$M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \emptyset = \bigcap_\alpha V_{f_\alpha}.$$

Поэтому никакой максимальный идеал не содержит всех f_α. Значит, I не содержится в максимальном идеале, и поэтому $1 \in I$. Из этого следует, что 1 выражается в виде линейной комбинации конечного числа f_α:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \ \lambda_i \in R.$$

Мы получаем, что

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} V_{f_i},$$

а поэтому $M = \bigcup_{i=1}^{n} A_{f_i}$. Мы доказали, что $M = \mathsf{Spec}(R)$ компактно. ■

Замечание 14.28. Мы доказали, что $\mathsf{Spec}(R)$ для любого булева кольца – хаусдорфово, компактное, вполне несвязное топологическое пространство. Оно называется **пространство Стоуна** булева кольца.

Замечание 14.29. Соответствие

$$R \longrightarrow \mathsf{Spec}(R)$$

задает контравариантный функтор из категории булевых колец в категорию пространств Стоуна[1] (докажите это).

Оказывается, что каждое пространство Стоуна M можно получить таким образом. Из Утверждения 14.33, доказанного ниже, следует, что M гомеоморфно спектру кольца $C(M, \mathbb{F}_2)$ непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Лемма 14.30: Пусть M – пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Пусть $\mathfrak{m} \subsetneq R$ – некоторый идеал. Тогда все функции $f \in \mathfrak{m}$ имеют общий нуль в M (точку, где все эти функции зануляются).

Доказательство. Шаг 1. Если у $\mathfrak{m}$ нет общего нуля, то

$$M = \bigcup_{f \in \mathfrak{m}} f^{-1}(1).$$

[1] Напомним, что пространства Стоуна – хаусдорфовы, компактные, вполне несвязные топологические пространства.

Мы получили открытое покрытие M. Поскольку M компактно, из него можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому есть конечный набор $f_1, ..., f_n \in \mathfrak{m}$ такой, что $M = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(1)$.

Шаг 2. Каждый элемент $f \in R$ имеет вид χ_U, где $U = f^{-1}(1)$, а χ_U – характеристическая функция U. Поэтому есть такой набор открытых множеств U_i с $\chi_{U_i} \in \mathfrak{m}$, что $M = \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Шаг 3. $\chi_{U\cup V} = \chi_U + \chi_V + \chi_U\chi_V$. Пусть теперь $W = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Воспользовавшись индукцией, получим, что $\chi_W = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, ...)$, где P - полином без свободного члена.

Шаг 4. Мы получили, что $1 = \chi_M = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, ...) = P(f_1, f_2, ...)$. Поэтому 1 лежит в идеале $\mathfrak{m}$. Противоречие! Значит, у $\mathfrak{m}$ есть общий нуль. ■

Лемма 14.31: Пусть M – пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M, со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Пусть $\mathfrak{m} \subset R$ – максимальный идеал. Тогда у функций $f \in \mathfrak{m}$ есть единственный общий нуль (точка, где они все зануляются).

Доказательство: Существование общего нуля следует из Леммы 14.30. Пусть есть две несовпадающие точки $x_1 \neq x_2 \in M$ такие, что все $f \in \mathfrak{m}$ зануляются в x_1 и x_2. Поскольку непрерывные функции на M разделяют точки, гомоморфизм

$$R \xrightarrow{\psi} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2, \quad \psi(f) = (f(x_1), f(x_2))$$

сюрьективен (докажите). С другой стороны, $\psi(\mathfrak{m}) = 0$, поскольку все элементы $\mathfrak{m}$ зануляются в x_1, x_2. Это дает сюрьективный гомоморфизм $\psi: \ R/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Но поскольку $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$, это невозможно. Противоречие! Мы доказали единственность общего нуля максимального идеала. ■

Замечание 14.32. Лемма 14.31 дает биекцию $\mathsf{Spec}(R) \longrightarrow M$, где $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Докажем, что эта биекция – гомеоморфизм. База топологии на M задается открытозамкнутыми множествами, то есть множествами вида

$$A_f = \{x \in M \mid f(x) = 1\}$$

Те же самые A_f задают базу открытых подмножеств в $\mathsf{Spec}(R)$.

Мы доказали такое утверждение

Утверждение 14.33: Пусть M – пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M, со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Тогда M гомеоморфно $\operatorname{Spec}(R)$. ■

Замечание 14.34. Аналогичный, но более простой, аргумент доказывает, что кольцо непрерывных, $\mathbb{F}_2$-значных функций на $\operatorname{Spec}(R)$ изоморфно R. Действительно, отображение $(f, \mathfrak{m}) \longrightarrow f/\mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$ задает гомоморфизм колец $R \xrightarrow{\Psi} C(\operatorname{Spec}(R), \mathbb{F}_2)$. Поскольку каждая непрерывная функция содержится в идеале, Ψ это вложение (докажите). Непрерывные функции на $\operatorname{Spec}(R)$ порождены характеристическими функциями открытых подмножеств A_f (докажите), а все такие функции получаются из R по формуле

$$\chi_{A_f} = \Psi(f).$$

Получается, что функторы $M \longrightarrow C(M, \mathbb{F}_2)$ и $R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ взаимно обратны. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 14.35: (теорема Стоуна о представимости булевых алгебр) Функтор $R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ задает эквивалентность между категорией булевых колец и двойственной категории к категории хаусдорфовых, компактных, вполне несвязных топологических пространств. ■

Замечание 14.36. Булевы алгебры и булевы кольца тоже эквивалентны (Теорема 14.19).

14.5. Булевы алгебры: история, замечания

Законы логики, которые лежат в основе определения булевой алгебры, сформулированы английским математиками Джорджем Булем (George Boole) в 1847-м и Августом де Морганом (August de Morgan) в 1860-м. Аксиоматическое определение булевых алгебр принадлежит Хантингтону (Edward Vermilye Huntington, 1904), но серьезно изучать булевы алгебры стали только после фундаментальных работ Маршалла Стоуна (1930-е). В 1960-е годы булевы алгебры нашли широкое применение в логике, где с их помощью доказывается невыводимость разных теоретико-множественных гипотез, таких, как аксиома выбора и континуум-гипотеза.

Marshall Harvey Stone
(1903 - 1989)

Теорема Маршалла Стоуна буквального обобщения на более общие (не булевы) кольца не имеет. Но в основании алгебраической геометрии лежит весьма похожий аргумент, принадлежащий Гротендику, который позволяет интерпретировать алгебраические объекты (кольца) как геометрические (пространства Зариского) и наоборот.