15. Топология, лекция 15: Фундаментальная группа

15.1. Гомотопные отображения

Определение 15.1. Пусть $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения. **Гомотопией** f_0 в f_1 называется непрерывное отображение $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ такое, что $f\Big|_{X\times\{0\}} = f_0$, $f\Big|_{X\times\{1\}} = f_1$.

Замечание 15.2. Гомотопные отображения - отображения, которые можно непрерывно продеформировать одно в другое.

Замечание 15.3. Пусть f_0, f_1 принадлежат какому-то выделенному классу отображений, например, к классу C-липшицевых отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Говорится, что $f : X\times[0,1] \longrightarrow Y$ **гомотопия в классе** $\mathcal{A}$, если для любого t, отображение $f_t := f\Big|_{X\times\{t\}} : X \longrightarrow Y$ принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Задача 15.4. Пусть $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ – гладкие функции. Докажите, что f и g гомотопны в классе гладких отображений.

Следующее утверждение вполне очевидно.

Утверждение 15.5: Пусть $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ – гомотопные отображения, а $g : P \longrightarrow X$, $h : Y \longrightarrow Z$ - непрерывные отображения. Тогда $f_0 \circ h$ гомотопно $f_1 \circ h$, а $g \circ f_0$ гомотопно $g \circ f_1$.

Доказательство: Пусть $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ – гомотопия f_0 в f_1. Гомотопию $f_0 \circ h$ в $f_1 \circ h$ строим как композицию $f \circ h : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ (проверьте, что это гомотопия). Гомотопию $g \circ f_0$ в $g \circ f_1$ получим, взяв композицию $g \times \mathsf{Id}_{[0,1]} : P \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ и $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$. ■

Следующее утверждение также тривиально, но весьма полезно.

Утверждение 15.6: Пусть $f_0, f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения, причем f_0 гомотопно f_1, а f_1 гомотопно f_2. Тогда f_0 гомотопно f_2.

Доказательство: Пусть $\tilde{f}: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ – гомотопия f_0 в f_1, а $\tilde{\tilde{f}}: X \times [1,2] \longrightarrow Y$ – гомотопия f_1 в f_2. Рассмотрим отображение $f: X \times [0,1] \longrightarrow Y$

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \tilde{f}(2\lambda), & \text{если } \lambda \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{\tilde{f}}(2\lambda), & \text{если } \lambda \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (15.1.1)$$

Если f непрерывно, оно, очевидно, является гомотопией f_0 в f_2, поэтому для доказательства Утверждения 15.6, достаточно убедиться, что f непрерывно.

Легко убедиться, что отображение $\varphi: A \longrightarrow B$ непрерывно, если для каждого $Z \subset A$, образ $\varphi(\bar{Z})$ замыкания Z лежит в замыкании $\overline{\varphi(Z)}$ (проверьте это).

Пусть $Z \subset X \times [0,1]$ – некоторое подмножество, причем

$$Z_1 = Z \cap X \times [0,1/2] \ \text{ и } \ Z_2 = Z \cap X \times [1/2,1].$$

Легко видеть, что $\bar{Z} = \bar{Z}_1 \cup \bar{Z}_2$, соответственно

$$f(\bar{Z}) \subset f(\bar{Z}_1) \cup f(\bar{Z}_2) \subset \overline{f(Z_1)} \cup \overline{f(Z_2)}$$

(последнее включение следует из того, что ограничения $f\Big|_{X\times[0,1/2]}$ и $f\Big|_{X\times[1/2,1]}$ непрерывны). Поэтому f непрерывно. Утверждение 15.6 доказано. ■

Замечание 15.7. Предыдущее утверждение означает, что гомотопии можно "склеивать" между собой: приклеив гомотопию из f_0 в f_1 к гомотопии f_1 в f_2, мы получим гомотопию f_0 в f_2. Первое отображение непрерывно деформируется во второе, второе в третье, и взяв эти две деформации одну за другой, мы получаем, что первое можно непрерывно продеформировать в третье.

Замечание 15.8. Из Утверждения 15.6 следует, что отношение "f гомотопно g" транзитивно. Оно также рефлексивно и симметрично (проверьте). Множество классов эквивалентности отображений $f: X \longrightarrow Y$ с точностью до гомотопии называется **множество классов гомотопической эквивалентности отображений**, или же **множество гомотопических классов отображений**.

Задача 15.9. Пусть $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ - класс всех топологических пространств, а $\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ - множество гомотопических классов непрерывных отображений из X в Y. Докажите, что таким образом получается категория. Эта категория называется **гомотопическая категория**, а изоморфизмы в ней – **гомотопическими эквивалетностями**.

В дальнейшем нам понадобится следующая тривиальная лемма.

Лемма 15.10: Пусть f_0, f_1 непрерывные отображения из отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$, причем $f_i(a) = a'$, $f_i(b) = b'$. Тогда f_0 гомотопно f_1 в классе отображений, переводящих a в a', b в b'.

Следующее отображение осуществляет искомую гомотопию

$$f:\ [a,b]\times[0,1] \longrightarrow [c,d], \quad f(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

(проверьте это).

15.2. Категория отмеченных пространств и пространства петель

Определение 15.11. Пара

$$\Big(\text{топологическое пространство } M, \text{ точка } m\in M\Big)$$

называется **отмеченным пространством**, обозначается (M,m). Отмеченное пространство это топологическое пространство, в котором выбрана точка.

Определение 15.12. Непрерывное отображение отмеченных пространств $\varphi:\ (X,x)\longrightarrow(Y,y)$ – непрерывное отображение из X в Y, которое переводит x в y. Во избежание путаницы, непрерывные отображения отмеченных пространств называются **морфизмами отмеченных пространств**.

Напомним, что **категорией** $\mathcal{C}$ называется набор объектов $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, таких, что для каждой пары $X, Y\in\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ задано множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)$ **морфизмов из** X **в** Y. На морфизмах задано отображение композиции

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y)\times\mathcal{M}\mathrm{or}(Y,Z)\longrightarrow\mathcal{M}\mathrm{or}(X,Z),$$

которое ассоциативно. В каждом множестве $\mathcal{M}\mathrm{or}(X,X)$ выделен **тождественный морфизм** Id_X, причем композиция любого морфизма φ с тождественным равна φ

Замечание 15.13. Легко видеть, что *отмеченные пространства образуют категорию:* композиция морфизмов – снова морфизм, композиция очевидно ассоциативна, а тождественное отображение

$$\mathsf{Id}_{(X,x)}: (X,x) \longrightarrow (X,x)$$

является морфизмом отмеченных пространств.

Определение 15.14. Пусть $f_0, f_1 : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – морфизмы отмеченных пространств. **Гомотопией морфизма** f_0 **к** f_1 называется отображение $f: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ такое, что $f(x,t) = y$ для любого $t \in [0,1]$.

Определение 15.15. Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что **путем из** $x \in M$ **в** $y \in M$ называется непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ из отрезка $[a,b]$ в M такое, что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Определение 15.16. Пусть (M,m) – отмеченное топологическое пространство. Рассмотрим множество путей $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ из m в m. Такие пути называются **петлями в** M. Множество всех петель обозначается $\Omega(M,m)$.

Если M – метрическое пространство, на $\Omega(M,m)$ вводится sup-метрика, заданная формулой

$$d(\gamma,\gamma') = \sup_{t\in[0,1]} d(\gamma(t),\gamma'(t)).$$

Пространство $\Omega(M,m)$ называется **пространством петель** для M. Если M метризуемо и локально компактно, топология на $\Omega(M,m)$ не зависит от выбора метрики на M (Лекция 11). В такой ситуации мы рассматриваем пространство петель $\Omega(M,m)$ как топологическое пространство.

Замечание 15.17. Рассмотрим окружность S^1 с отмеченной точкой. Легко видеть, что любой путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ из m в m задает морфизм $(S^1,0) \longrightarrow (M,m)$, и это соответствие взаимно однозначно. В дальнейшем, мы будем рассматривать $\Omega(M,m)$ как множество морфизмов отмеченных пространств $(S^1,0) \longrightarrow (M,m)$.

Замечание 15.18. Терминология теории категорий в применении к отмеченным пространствам может показаться избыточной. Это не так: язык теории категорий существенно экономит время и позволяет избежать двусмысленностей. Если вы испытываете дискомфорт от теоретико-категорного языка, всякий раз заменяйте "морфизм отмеченных пространств" на "непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку в отмеченную точку", и постижение топологии будет менее болезненным.

15.3. Фундаментальная группа

Пусть (M, m) – отмеченное топологическое пространство. В силу Утверждения 15.6, гомотопия задает отношение эквивалентности на множестве всех морфизмов $(S^1, 0) \longrightarrow (M, m)$, или, что то же самое, путей из m в m. Множество классов гомотопической эквивалентности путей из m в m обозначается $\pi_1(M, m)$.

Если $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow M$ – два пути из m в m, обозначим за $\widetilde{\gamma\gamma'} : [0,2] \longrightarrow M$ путь, который получен по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda) = \begin{cases} \gamma(\lambda), & \text{если } \lambda \leqslant 1 \\ \gamma'(\lambda - 1), & \text{если } \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Непрерывность этого пути доказывается тем же самым аргументом, который использовался при доказательстве Утверждения 15.6 (отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно, если замыкание образа любого $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z).

Определим произведение $\gamma\gamma'$ формулой $\gamma\gamma'(\lambda) = \widetilde{\gamma\gamma'}(2\lambda)$.

Следующая лемма утверждает, что это произведение переводит гомотопные пути в гомотопные. Эта лемма тривиальна, и интуитивно очевидна. В самом деле, произведение путей – это обход M вдоль одного пути, потом вдоль другого; если мы непрерывно продеформируем первый путь и второй, то произведение путей тоже продеформируется, а значит, будет гомотопно исходному произведению.

Лемма 15.19: Определенная выше операция на $\Omega(M, m)$ переводит гомотопные пути в гомотопные: если γ_0 гомотопен γ_1, а γ_0' гомотопен γ_1', то $\gamma_0\gamma_0'$ гомотопен $\gamma_1\gamma_1'$.

Доказательство: Пусть

$$\gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M, \quad \gamma' : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$$

– гомотопии, соединяющие γ_0 и γ_1, а также γ'_0 и γ'_1. Гомотопии путей это отображения из квадрата в M, а то, что концы пути остаются в m, означает, что две стороны квадрата идут в m (остальные две стороны идут в γ_0, γ_1 для первого квадрата, γ'_0, γ'_1 для второго). Рассмотрим гомотопию между $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$, полученную по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda, t) = \begin{cases} \gamma(\lambda, t), & \text{если } \lambda \leqslant 1 \\ \gamma'(\lambda - 1, t), & \text{если } \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Вышеприведенный аргумент (отображение $f: X \longrightarrow Y$ непрерывно, если замыкание образа любого $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z) доказывает, что это отображение непрерывно, значит, осуществляет гомотопию $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$. Гомотопия $\gamma_0\gamma'_0$ и $\gamma_1\gamma'_1$ получается из этого, поскольку $\gamma_0\gamma'_0$ и $\gamma_1\gamma'_1$ получены из $\widetilde{\gamma_0\gamma'_0}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma'_1}$ репараметризацией. ■

Из этой леммы следует, что произведение $\gamma, \gamma' \longrightarrow \gamma\gamma'$ – корректно определенная операция на множестве $\pi_1(M, m)$ классов гомотопической эквивалентности путей из m в m.

Теорема 15.20: Определенная выше операция

$$\pi_1(M, m) \times \pi_1(M, m) \longrightarrow \pi_1(M, m)$$

задает структуру группы на $\pi_1(M)$.

Доказательство: Нужно проверить выполнение групповых аксиом. Роль единицы $\iota: [0,1] \longrightarrow M$ играет отображение $[0,1]$ в точку $m \in M$. Эта петля называется **тривиальной**. Обозначим за $\varphi_0: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \max(0, 2t-1)$, за $\varphi_1: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \min(1, 2t)$.

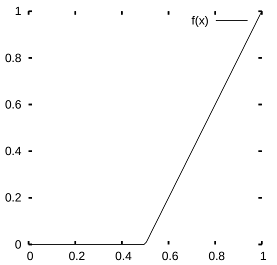


График функции $\varphi_0(t)$

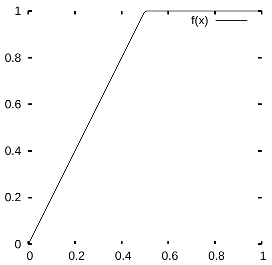


График функции $\varphi_1(t)$

Легко видеть, что $\gamma\iota = \varphi_0 \circ \gamma$, а $\iota\gamma = \varphi_1 \circ \gamma$. В силу Леммы 15.10, функции φ_1 и φ_2 гомотопны друг другу и тождественному отображению $x \longrightarrow x$ в классе функций, сохраняющих 0 и 1. Композиция уважает гомотопию (Утверждение 15.5), следовательно, путь $\gamma\iota$ гомотопен $\iota\gamma$ и гомотопен γ.

Обратный элемент γ^{-1} к пути γ строится так: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Рассмотрим функцию $\Phi: [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\Phi(t) = \min(2t, 2-2t)$,

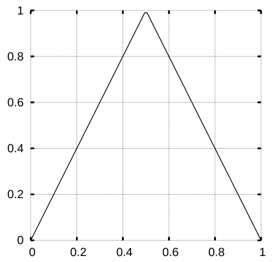
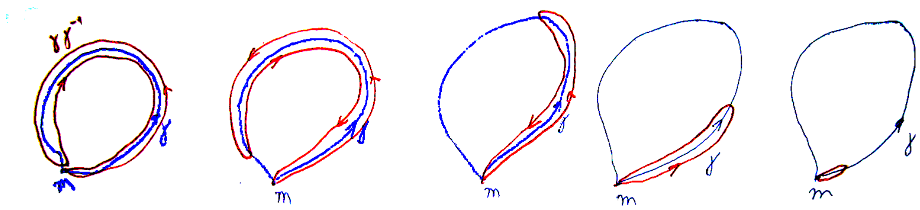


График функции $\Phi(t)$

Легко видеть, что $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$. Поскольку Φ гомотопен отображению $t \longrightarrow 0$ в классе функций, переводящих 0 и 1 в 0 (Лемма 15.10), путь $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$ гомотопен тривиальному.

Эту гомотопию можно увидеть из следующей картинки.



Стягивание петли $\gamma\gamma^{-1}$ в точку

Наконец, ассоциативность умножения видна из следующего рассуждения. Пусть γ_0, γ_1, γ_2 три пути из m в m, а $\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}: [0,3] \longrightarrow M$ – петля, определенная формулой

$$\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\lambda), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \\ \gamma_1(\lambda-1), & \text{если } 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \\ \gamma_2(\lambda-2), & \text{если } 2 \leqslant \lambda \leqslant 3. \end{cases}$$

Рассмотрим функции $\psi_1, \psi_2: [0,1] \longrightarrow [0,3]$ заданные формулами

$$\psi_1(t) = \max\left(2t, 4\left(t - 1/4\right)\right), \quad \psi_2(t) = \min\left(4t, 2\left(t + 1/2\right)\right)$$

Функции ψ_1 и ψ_2 - кусочно-линейные, их графики составлены из двух прямолинейных отрезков. У ψ_1 первый отрезок соединяет (0,0) и (1/2,1), второй отрезок соединяет (1/2,1) и (1,3). У ψ_2 первый отрезок соединяет (0,0) и (1/2,2), второй отрезок соединяет (1/2,2) и (1,3).

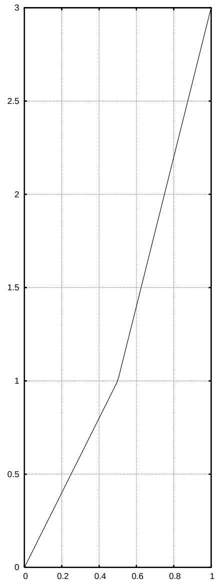


График функции $\psi_1(t)$

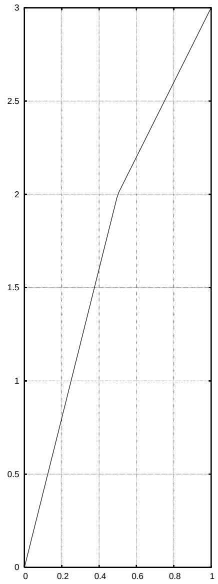


График функции $\varphi_2(t)$

Легко видеть, что $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2) = \psi_1 \circ \widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$, и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2 = \psi_2 \circ \widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$ (проверьте). Поскольку ψ_1 и ψ_2 гомотопны, из этого следует, что гомотопны петли $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$ и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$. Мы доказали, что $\pi_1(M,m)$ это группа. ■

Определение 15.21. Группа $\pi_1(M,m)$, определенная выше, называется **фундаментальной группой** топологического пространства (M,m).

Замечание 15.22. Пусть

$$(X,x) \xrightarrow{f} (Y,y)$$

– морфизм отмеченных пространств. Для любого пути $\gamma \in \Omega(X,x)$, композиция $\gamma \circ f$ задает путь в (Y,y). Пользуясь тем. что композиция f с гомотопными отображениями гомотопна (Утверждение 15.5), мы получаем, что $\gamma \longrightarrow \gamma \circ f$ определяет отображение на классах эквивалентности петель $\pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$. Из конструкции этого отображения сразу ясно, что это гомоморфизм групп. Отображение фундаментальных групп, индуцированное f, часто обозначается той же самой буквой.

Замечание 15.23. Напомним, что **функтор** из категории $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ задается отображением

$$F: \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_2)$$

и отображениями

$$F: \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X),F(Y)),$$

определенными для любых $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$, переводящими Id_X в $\mathsf{Id}_{F(X)}$ и совместимыми с взятием композиций.

Замечание 15.24. Взятие фундаментальной группы определяет функтор из категории отмеченных пространств в категорию групп (проверьте это).

Замечание 15.25. Пусть $f_0, f_1 : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ - гомотопные отображения. Тогда соответствующие гомоморфизмы фундаментальных групп совпадают. В самом деле, если f_0 гомотопно f_1, то $\gamma \circ f_0$ гомотопно $\gamma \circ f_1$, для любой петли $\gamma \in \Omega(X,x)$.

15.4. Стягиваемые пространства, ретракты, гомотопическая эквивалентность

Определение 15.26. Пусть (X,x) – отмеченное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $\iota_x : X \longrightarrow X$, переводящее все точки X в x. Пространство X называется **стягиваемым**, если ι_x гомотопно тождественному отображению Id_X.

Пример 15.27: Пусть (X,x) – подмножество $\mathbb{R}^n$. Это подмножество называется **звездчатым**, если для любой точки $x' \in X$, отрезок $[x,x']$ целиком лежит в X. Рассмотрим отображение

$$X \times [0,1] \xrightarrow{\Psi} X,$$

переводящее (x',t) в $x - t(x-x')$. Легко видеть, что Ψ это гомотопия Id_X и ι_x (докажите это). Мы получили, что любое звездчатое подмножество стягиваемо.

Замечание 15.28. Пусть (X, x) – стягиваемое пространство. Легко видеть, что отображение $\iota_x : X \longrightarrow X$ задает тривиальный гомоморфизм

$$\pi_1(X, x) \xrightarrow{\iota_x} \pi_1(X, x)$$

(все элементы группы $\pi_1(X, x)$ переходят в 1). Поскольку отображение ι_x гомотопно тождественному, а гомотопные отображения топологических пространств индуцируют одинаковые отображения фундаментальных групп, тождественное отображение $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\mathsf{Id}} \pi_1(X, x)$ равно отображению, переводящему все элементы в 1. Поэтому $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Определение 15.29. Если $\pi_1(X, x) = \{1\}$, отмеченное пространство (X, x) называется **односвязным**. В этой ситуации еще говорят, что у (X, x) **нулевая фундаментальная группа**.

Определение 15.30. Пусть $X \subset Y$ – подмножество. Предположим, что существует отображение $Y \xrightarrow{\Psi_1} X$, тождественное на $X \subset Y$, и гомотопное тождественному отображению Id_Y. В этом случае X называется **деформационным ретрактом** Y, или просто **ретрактом**. Гомотопия Ψ_1 и Id_Y называется **ретракцией** Y **на** X.

Пример 15.31: Пусть Y - множество всех ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$, а $X \subset Y$ – единичная сфера. Рассмотрим отображение $Y \xrightarrow{\Psi_1} X, v \longrightarrow \frac{v}{|v|}$. Отображение Ψ_1 гомотопно тождественному:

$$\Psi(v, t) = \frac{v}{|v|^t}$$

осуществляет гомотопию Ψ_1 и $\Psi_0 = \mathsf{Id}_Y$.

Замечание 15.32. Отмеченное пространство (X, x) является стягиваемым тогда и только тогда, когда $\{x\}$ – ретракт X.

Определение 15.33. Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется **гомотопической эквивалентностью**, если существуют отображения $g, g' : Y \longrightarrow X$ такие, что $g \circ f$ гомотопно Id_Y, а $f \circ g'$ гомотопно Id_X. Аналогичным образом определяется гомотопическая эквивалентность отмеченных пространств: $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ гомотопическая эквивалентность, если есть $g, g' : (Y, y) \longrightarrow (X, x)$ и $g \circ f$ гомотопно Id_Y, а $f \circ g'$ гомотопно Id_X как отображение отмеченных пространств.

Пример 15.34: Если $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ – деформационный ретракт, то пространство X гомотопически эквивалентно Y. Действительно, естественное вложение $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ в композиции с $Y \xrightarrow{\Psi_1} X$ дает Id_X, а композиция $\Psi_1 \circ j$ гомотопна Id_Y, по определению деформационного ретракта. В частности, любое стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно точке.

Замечание 15.35. Пусть $(X,x) \xrightarrow{f} (Y,y)$ – гомотопическая эквивалентность отмеченных пространств, а $\pi_1(X,x) \xrightarrow{f} \pi_1(Y,y)$ соответствующее отображение фундаментальных групп. Тогда существуют морфизмы g, g', такие, что $g \circ f$ гомотопно Id_Y, а $f \circ g'$ гомотопно Id_X. Значит, у $\pi_1(X,x) \xrightarrow{f} \pi_1(Y,y)$ нет ядра (потому что на фундаментальных группах $f \circ g' = \mathsf{Id}_{\pi_1(X,x)}$). С другой стороны, поскольку $g \circ f = \mathsf{Id}_{\pi_1(Y,x)}$, отображение $\pi_1(X,x) \xrightarrow{f} \pi_1(Y,y)$ сюрьективно. Мы доказали, что это изоморфизм групп.

Следствие 15.36: Пусть (X,x) и (Y,y) – гомотопически эквивалентные отмеченные пространства. Тогда $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

15.4.1. История, замечания

Понятие гомотопии и фундаментальной группы было впервые строго определено Пуанкаре, в 1895-м году. Гомотопные пути и фундаментальную группу определил в 1866-м году Камиль Жордан; впрочем, Жордан в работах по топологии не пользовался понятием группы (которое он сам же и ввел, тоже в 1860-х, следуя Галуа, в работах о разрешимости алгебраических уравнений).

Фундаментальная группа есть первый (и самый простой) алгебраический инвариант топологических пространств. Существует немало функторов аналогичной природы: гомотопические группы, когомологии, K-теория, кобордизмы и т.д. Эти конструкции изучаются в алгебраической топологии, методами теории категорий.

Строгое изучение топологии затруднено патологичностью общих топологических пространств. Алгебраические топологи по большей части ограничиваются *CW-комплексами*, пространствами, которые склеены из симплексов (многомерных тетраэдров) наподобие многогранников.

В большинстве курсов топологии, никакие другие пространства, кроме CW-комплексов, не рассматриваются, или практически не рассматриваются. Ограничив таким образом класс изучаемых пространств, можно перевести на язык категорий любое геометрическое утверждение.

В той (достаточно общей) геометрической ситуации, с которой имеют дело в метрической геометрии и анализе, считать алгебраические инварианты пространств чрезвычайно затруднительно. По этой причине предмет алгебраической топологии практически никак не соотносится с предметом общей топологии. С другой стороны, без понимания основ общей топологии заниматься геометрией и топологией проблематично.

Основные достижения математики XX века относились к алгебраической топологии и алгебраической геометрии; на протяжении столетия эти две науки параллельно и чрезвычайно интенсивно развивались, используя язык категорий и гомологической алгебры, специально разработанный для такой цели.

Каноническим учебником алгебраической топологии является книжка Фукса, Фоменко, "Курс гомотопической топологии". Для других целей полезен том Свитцера "Алгебраическая топология: гомотопии и гомологии". Теории категорий посвящен учебник Мак Лэйна "Категории для работающего математика". Гомологическая алгебра изложена в прекрасной книге "Методы гомологической алгебры" Гельфанда-Манина.

Marie Ennemond Camille Jordan
(1838 - 1922)