Топология, лекция 13: Вполне несвязные пространства

Миша Вербицкий

7 апреля, 2008

Независимый Университет

Связные пространства

Определение: Напомним, что **связным** называется топологическое пространство M, которое нельзя разбить в объединение непересекающихся открытых подмножеств. В противном случае называется **несвязным**.

Утверждение: Связное подмножество отрезка $[0, 1]$ – это отрезок, интервал или полуинтервал.

Утверждение:
Замыкание $\bar{Z}$ связного подмножества Z всегда связно.

Утверждение: Пусть X связно, а $f : X \longrightarrow Y$ – непрерывное отображение. Тогда $f(Y)$ связно.

Следствие: Если $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция на связном множестве, то $f(X)$ это отрезок, интервал или полуинтервал. В частности, **f принимает все промежуточные значения между $f(x_1)$ и $f(x_2)$.**

Компоненты связности

Утверждение: **Пусть X и Y – два пересекающихся связных подмножества топологического пространства M. Тогда $X \cup Y$ тоже связно.**

Определение: Пусть $x \in M$ – точка топологического пространства, а A_x – объединение всех связных подмножеств M, содержащих x. В силу вышесказанного, A_x связно. Множество A_x называется **компонентой связности** точки x.

Утверждение: **Каждое топологическое пространство является непересекающимся объединением своих компонент связности.**

Замечание: Если M представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств U и V, **каждая компонента связности M содержится целиком в U или в V.**

Произведение связных пространств

Напомним, что непрерывное отображение называется **открытым**, если оно переводит открытые множества в открытые.

Замечание: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями. Предположим, что X представлено в виде объединения непустых, непересекающихся открытых подмножеств U и V. Поскольку слои f связны, подмножества U и V содержат каждый слой целиком. Поэтому $U = f^{-1}(U_1)$, $V = f^{-1}(V_1)$, причем U_1 и V_1 не пересекаются. **Поскольку f открыто, U_1 и V_1 открыты и непусты.**

Следствие: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – открытое отображение со связными слоями, и Y связно. Тогда X связно.

Следствие: Произведение связных пространств X и Y связно.

Действительно, **отображение проекции $\pi : X \times Y$ открыто и имеет связные слои.**

Вполне несвязные пространства

Определение: Пространство M называется **вполне несвязным**, если у него нет связных подмножеств, кроме точек и $\emptyset$.

Определение: Подмножество M называется **открытозамкнутым**, если оно открыто и замкнуто.

Замечание: Пространство M связно тогда и только тогда, когда у него нет открытозамкнутых подмножеств, кроме M и $\emptyset$.

Замечание: Конечное пересечение, конечное объединение, дополнение открытозамкнутых подмножеств снова открытозамкнуто.

Утверждение: **Предположим, что у хаусдорфова топологического пространства M есть база топологии, состоящая из открытозамкнутых множеств. Тогда оно вполне несвязно.**

Примеры вполне несвязных пространств

Утверждение:
Произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.

Действительно, любое связное подмножество $M \times N$ должно проектироваться в связные подмножества M и N.

Пример: Пусть $M = \{0, 1\}$ – множество из двух точек, с дискретной топологией («**двоеточие**»). Произведение любого числа двоеточий компактно (по теореме Тихонова), хаусдорфово и вполне несвязно.

Замечание: Предположим, что (M, d) - метрическое пространство, причем метрика $d: \ M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ не принимает значений в интервале $]\alpha, \beta[$, где $\beta > \alpha$. **Тогда замкнутый шар $\bar{B}_\alpha(x)$ открытозамкнут.** Действительно, $\bar{B}_\alpha(x) = B_{\alpha+\varepsilon}(x)$, для любого ε такого, что $\alpha + \varepsilon \in]\alpha, \beta[$, а шар $B_{\alpha+\varepsilon}(x)$ открыт.

Следствие : Пространство $\mathbb{Z}_p$ p-адических целых чисел вполне несвязно. Действительно, p-адическая метрика принимает значения в множестве $\{p^s, s \in \mathbb{Z}\}$, значит, любой открытый шар в $\mathbb{Z}_p$ замкнут.

Пространства Стоуна

Определение: Компактное, вполне несвязное, хаусдорфово топологическое пространство называется **пространством Стоуна**

Лемма 1: Пусть M – пространство Стоуна, а $x, y \in M$ – две разные точки. Тогда у x и y есть непересекающиеся, открытозамкнутые окрестности.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$ – пересечение всех открытозамкнутых окрестностей x. Если Z не содержит y, какое-то открытозамкнутое подмножество $U \ni x$ не содержит y, тогда его дополнение $M\backslash U$ содержит y, и мы получим, что у x и y есть непересекающиеся открытозамкнутые окрестности.

Поэтому **достаточно доказать, что $Z \not\ni y$.**

Шаг 2: Поскольку Z несвязно, **Z есть объединение непересекающихся подмножеств $Z = Z_x \coprod Z_y$,** замкнутых в Z. Поскольку Z замкнуто в M, **Z_x, Z_y тоже замкнуты.**

Доказательство Леммы 1 (продолжение)

Шаг 3: Поскольку M компактно и хаусдорфово, M нормально, то есть **любые два замкнутых, непересекающихся подмножества M имеют непересекающиеся окрестности.** Применив это к Z_x, Z_y, получим непересекающиеся окрестности $U_x \supset Z_x, U_y \supset Z_y$.

Шаг 4: Обозначим за K дополнение $M\backslash(U_x \cup U_y)$ Поскольку $Z = \bigcap_\alpha U_\alpha$, имеем

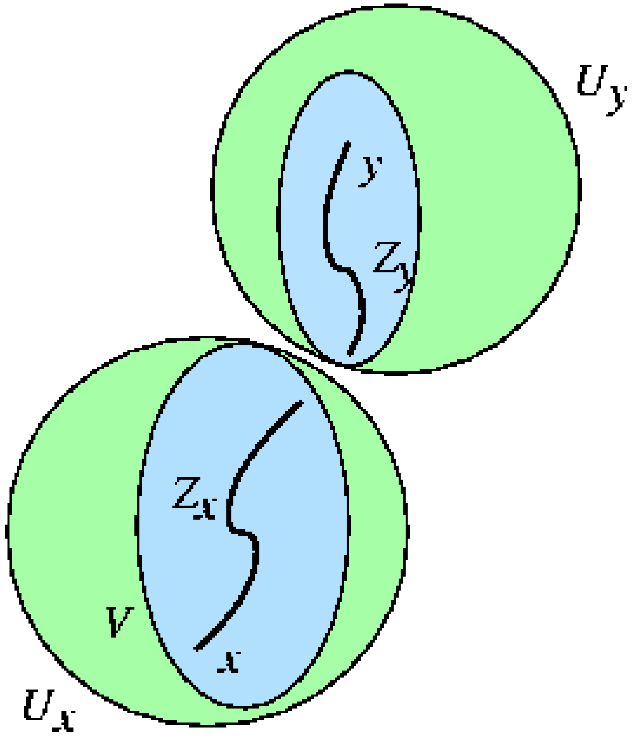
$$K \subset \bigcup_\alpha (M\backslash U_\alpha).$$

Поскольку K замкнуто, оно компактно. Поэтому $K \subset \bigcup_\alpha (M\backslash U_\alpha)$ имеет конечное подпокрытие:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (M\backslash U_i)$$

Из этого следует, что $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$ **открытозамкнуто, содержит x, и содержится в $M\backslash K = U_x \cup U_y$.**

Доказательство Леммы 1 (окончание)



Непересекающиеся окрестности Z_x, Z_y

Шаг 4: $U = (U \cap U_x) \coprod (U \cap U_y)$. Поскольку U_x, U_y открыты, $U \cap U_x$ открыто и замкнуто в U. Следовательно, $V = U \cap U_x$ открыто и замкнуто в M. Это множество не содержит y, и содержит x. **Мы получили открыто-замкнутую окрестность x, не содержащую y.**. **Лемма 1 доказана.**

Marshall Harvey Stone
(1903 - 1989)

Открытозамкнутые подмножества в пространстве Стоуна

Из Леммы 1 немедленно следует

Теорема: Пусть M – пространство Стоуна. Тогда у M есть база топологии, состоящая из открытозамкнутых подмножеств.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ – топология на M, а $\mathcal{T}_1$ – топология, полученная из базы, состоящей из всех открытозамкнутых подмножеств M. Тогда

$$(M, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M, \mathcal{T}_1)$$

биективно и непрерывно. В силу Леммы 1, $\mathcal{T}_1$ хаусдорфово. Непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом. Значит, $(M, \mathcal{T}) \xrightarrow{\mathsf{Id}} (M, \mathcal{T}_1)$ **– гомеоморфизм.**

Вложение пространства в тихоновское двоеточие

Замечание: Из Леммы 1 немедленно вытекает, что для любой пары точек $x, y \in M$, **существует непрерывная функция** $f: M \longrightarrow \{0,1\}$, **принимающая значение 1 на x и 0 на y.**

Пусть $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Рассмотрим отображение

$$M \xrightarrow{\Psi} \{0,1\}^R,$$

переводящее m в $\prod_{\varphi \in R} \varphi(m)$.

Оно непрерывно и инъективно, а поскольку M компакт, является гомеоморфизмом на образ. Мы получили следующую теорему.

Теорема: **Любое пространство Стоуна гомеоморфно замкнутому подмножеству в тихоновском произведении $\{0,1\}^I$, для какого-то набора индексов I.**

Топология, лекция 14: Булевы алгебры и категории

Миша Вербицкий

7 апреля, 2008

Независимый Университет

Определение категории

Определение: **Категорией** $\mathcal{C}$ называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами"и так далее), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

ДАННЫЕ:

Объекты: Множество $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ **объектов** $\mathcal{C}$ (иногда рассматривают не множество, а класс $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, задано множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y.

Композиция морфизмов: Если $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y), \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, Z)$, задан морфизм $\varphi \circ \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ задан морфизм $\mathrm{Id}_A \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A)$.

Определение категории (продолжение)

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y)$, $\mathsf{Id}_x \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathsf{Id}_Y$

Примеры категорий:
Категория множеств
(морфизмы – произвольные отображения),
категория линейных пространств
(морфизмы – линейные отображения),
категории колец, полей, групп
(морфизмы – гомоморфизмы),
категория топологических пространств
(морфизмы – непрерывные отображения).

Функторы

Категории сами образуют категорию; морфизмами этой категории являются **функторы**.

Определение: Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ – категории. **Ковариантным функтором** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ называется следующий набор данных.

1. **Отображение** $F: \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}b(\mathcal{C}_2)$**,** ставящее в соответствие объектам $\mathcal{C}_1$ объекты $\mathcal{C}_2$.

2. **Отображение морфизмов** $F: \mathcal{M}or(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}or(F(X),F(Y))$**,** определенное для любой пары объектов $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1)$.

Чтобы эти данные задавали функтор, они **должны удовлетворять условию** $F(\varphi) \circ F(\psi) = F(\varphi \circ \psi)$**.**

Примеры функторов

Любая "естественная операция"на математических объектах - это функтор. Например:

Отображение $X \longrightarrow 2^X$ – функтор на категории множеств.

Отображение $M \longrightarrow M^I$ – функтор на топологических пространствах, для любого заданного набора индексов I.

Отображение $V \longrightarrow V \oplus V$ – функтор на линейных пространствах.

Тождественный функтор из категории в себя.

Ображение, ставящее в соответствие топологическому пространству множество его связных компонент.

Контравариантные функторы

Определение: Если задана категория $\mathcal{C}$, определим **двойственную категорию** $\mathcal{C}^{op}$. Множество объектов в $\mathcal{C}^{op}$ – то же самое, что и в $\mathcal{C}$, а $\mathcal{M}\text{or}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \mathcal{M}\text{or}_{\mathcal{C}}(B,A)$. Соответственно, композиция $\varphi \circ \psi$ в $\mathcal{C}$ дает композицию $\psi^{op} \circ \varphi^{op}$ в $\mathcal{C}^{op}$.

Определение: **Контравариантный функтор** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ – это ковариантный функтор из $\mathcal{C}_1^{op}$ в $\mathcal{C}_2$.

Пример: Отображение, ставящее в соответствие топологическому пространству M кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на M – контравариантный функтор из топологических пространств в кольца.

Пример: Пусть $X \in \mathcal{O}\text{b}(\mathcal{C})$ – объект категории $\mathcal{C}$. Тогда отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\text{or}(X,Y)$ задает ковариантный функтор из $\mathcal{C}$ в категорию Set множеств, а отображение $Y \longrightarrow \mathcal{M}\text{or}(Y,X)$ задает контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в Set. Такие функторы называются **представимыми**.

Изоморфизм и эквивалентность функторов

Определение: Пусть $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ – объекты категории $\mathcal{C}$. Морфизм $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y)$ называется **изоморфизмом**, если существует $\psi \in \mathcal{M}or(Y, X)$ такой, что $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ и $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$. В таком случае, объекты X и Y называются **изоморфными**.

Определение: Два функтора $F, G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X: F(X) \longrightarrow G(X)$, причем для любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}or(X, Y)$, имеем $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$.

Замечание: Подобные коммутационные отношения принято изображать **коммутативными диаграммами**. Так, к примеру, условие $F(\varphi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\varphi)$. можно записать следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\Psi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Эквивалентность категорий

Определение: Функтор $F: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если он задает изоморфизм в категории всех категорий.

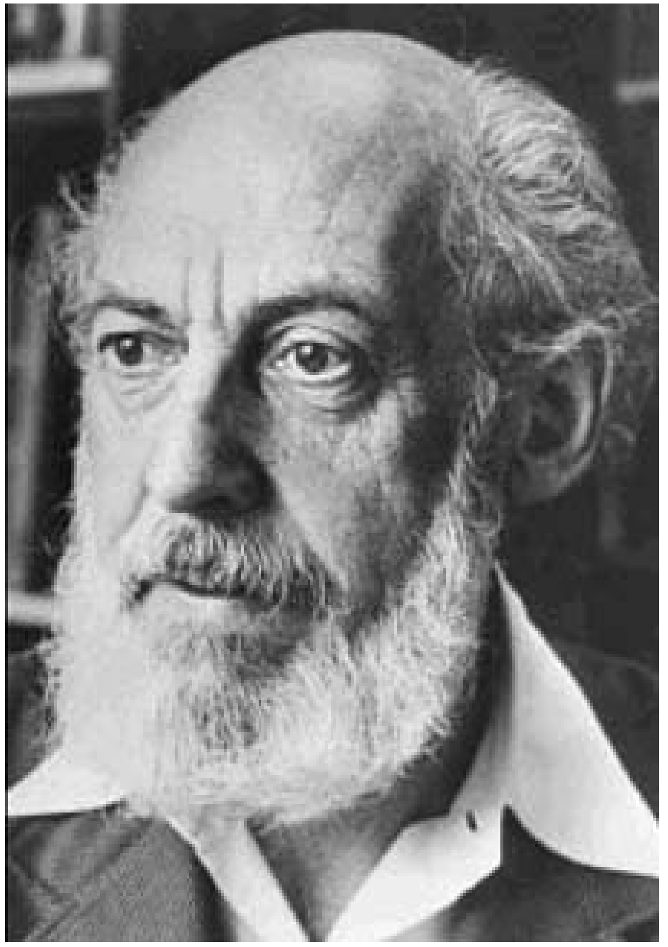
Иначе говоря, задан функтор $G: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ такой, что композиции $G \circ F$ и $G \circ F$ эквивалентны тождественым функторам $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$.

Замечание: Можно проверить, что это равносильно следующему: F задает биекцию на классах изоморфизма объектов, и биекцию

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X), F(Y)).$$

С точки зрения теории категорий, эквивалентные категории неразличимы.

Saunders Mac Lane
(1909-2005)



Samuel Eilenberg
(1913-1998)

Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)

Булевы кольца

Определение: **Идемпотент** в кольце – элемент, удовлетворяющий соотношению $x^2 = x$. **Булево кольцо** – кольцо (коммутативное, с единицей), где любой элемент является идемпотентом.

Замечание: Отметим, что в булевом кольце выполнено соотношение $2x = 0$ для любого x. Действительно,

$$0 = (x+1)^2 - x - 1 = (x^2 - x) + 2x = 2x.$$

Пример: Пусть M – любое топологическое пространство, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M со значениями в поле $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Тогда R – булево кольцо. Оно называется **кольцом открытозамкнутых подмножеств M**.

Булевы кольца чрезвычайно важны в логике и информатике, ибо **категория булевых колец эквивалентна категории булевых алгебр, то есть алгебр логических высказываний.**

Булевы алгебры

Определение: Пусть A – множество, наделенное бинарными операциями $\wedge$ (коньюнкция, "и"), $\vee$ (дизъюнкция, "или"), и $\neg$ (негация, "не"), и выделены элементы 1 ("правда") и 0 ("ложь"). A называется **булевой алгеброй**, если выполнены следующие условия.

ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \;\; a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a, \;\; a \vee b = b \vee a$

дистрибутивность: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \;\; a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a, \;\; a \wedge (a \vee b) = a$

дополнительность: $a \vee \neg a = 1, \;\; a \wedge \neg a = 0.$

Замечание: Этим условиям, очевидно, удовлетворяет любой набор логических утверждений, которые могут принимать значения “истинно” и “ложно”. **Логические операции ("и", "или", "не") превращают такой набор утверждений в булеву алгебру.**

Булевы алгебры эквивалентны булевым кольцам

Пусть A – булева алгебра.
Зададим на A умножение и сложение следующим образом: $a \cdot b := a \wedge b$, $a + b := (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$ (сумма соответствует "симметрической разности", или, что то же самое, "исключающему или").

Полученные операции удовлетворяют аксиомам кольца (это ясно из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности).

Соотношение $a^2 = a$ следует из аксиомы дополнительности $a + \neg a = 1$, которая (после домножения на a) влечет $a \wedge a + a \wedge \neg a = a$. Применив $a \wedge \neg a = 0$ (дополнительность), обретем $a^2 = a$. **Мы получили функтор F из категории булевых алгебр в категорию булевых колец.**

Теорема: Этот функтор – эквивалентность категорий.

Булевы алгебры эквивалентны булевым кольцам (доказательство)

Доказательство: Чтобы доказать, что $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1$ – эквивалентность, надо построить обратный функтор G, то есть из каждого булева кольца произвести булеву алгебру. Если R – булево кольцо, операции $\neg, \wedge, \vee$ определяются формулами $\neg a = 1 - a$, $a \wedge b = ab$, $a \vee b = ab + a + b$. Аксиомы булевой алгебры проверяются непосредственно (проверьте их), а взаимная обратность F и G очевидна из конструкции.