Топология, лекция 14: Теорема Стоуна

Миша Вербицкий

14 апреля, 2008

Независимый Университет

Булевы кольца

Определение: Напомним, что **булевым кольцом** называется кольцо R такое, что все элементы R – **идемпотенты,** то есть удовлетворяют $r^2 = r$.

Замечание: Отметим, что в булевом кольце **выполнено соотношение $2x = 0$ для любого x.** Действительно,

$$0 = (x+1)^2 - x - 1 = (x^2 - x) + 2x = 2x.$$

Замечание: Пусть R – булево кольцо, а $I \subset R$ – простой идеал в R. **Тогда $R/I \cong \mathbb{F}_2$.** Действительно, все элементы R/I удовлетворяют $r(r-1) = 0$; поскольку в R/I нет делителей нуля, $r = 0$ или $r = 1$.

Замечание: Следовательно, **все простые идеалы в R максимальны.**

Пример: Пусть M – любое топологическое пространство, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – кольцо непрерывных функций на M со значениями в поле $\mathbb{F}_2$ из двух элементов. Тогда R – булево кольцо. Оно называется **кольцом открытозамкнутых подмножеств M**.

Пространство Зариского

Определение: Пусть R – кольцо, а $\operatorname{Spec}(R)$ – множество простых идеалов в R, снабженное **топологией Зариского**.

Напомним, что база открытых множеств в топологии Зариского состоит из множеств

$$A_f := \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R) \mid f \notin \mathfrak{m}\},$$

где $f \in R$ – какой-то элемент R. Пространство $\operatorname{Spec}(R)$ называется **спектром**, или **пространством Зариского** кольца R.

Пространство Зариского для $\mathbb{Z}$ (и для большинства колец) не хаусдорфово.

Лемма: R – кольцо, а $\operatorname{Spec}(R)$ – его пространство Зариского. **Тогда $\operatorname{Spec}(R)$ компактно.**

Пусть $M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ – покрытие $M = \operatorname{Spec}(R)$ элементами базы. Для доказательства Леммы **достаточно убедиться, что в $\bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ найдется конечное подпокрытие.**

Пространство Зариского компактно (доказательство)

Шаг 1. Пусть I - идеал, порожденный всеми f_α, где $M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha}$ – покрытие. Очевидно,

$$M = \bigcup_\alpha A_{f_\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \emptyset = \bigcap_\alpha V_{f_\alpha},$$

где $V_f := M \backslash A_f$ множество всех идеалов, содержащих f. **Поэтому никакой простой идеал не содержит всех f_α.**

Шаг 2.
Значит, I не содержится в максимальном идеале, и поэтому $1 \in I$. **Тогда 1 выражается в виде линейной комбинации конечного числа f_α:**

$$1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \ \ \lambda_i \in R.$$

Шаг 3.
Из этого следует, что **никакой простой идеал не содержит $\{f_i\}$**, то есть $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n V_{f_i}$, а поэтому $M = \bigcup_{i=1}^n A_{f_i}$. **Значит,** $\operatorname{Spec}(R)$ **компактно.**

Спектр булева кольца

Определение: Напомним, что **вполне несвязное топологическое пространство** – пространство, не имеющее связных подмножеств. **Открытозамкнутое подмножество** – подмножество, которое открыто и замкнуто. **Нетрудно видеть, что хаусдорфово пространство, имеющее базу из открытозамкнутых подмножеств, вполне несвязно.**

Замечание:
Для любого f в булевом кольце R, имеем $\operatorname{Spec}(R) = A_f \coprod A_{1-f}$**.** Действительно, $f \notin \mathfrak{m}$ равносильно $(1-f) \in \mathfrak{m}$, потому что $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$.

Замечание:
Из этого немедленно вытекает, что все множества A_f открытозамкнуты, и значит, **для булева кольца R,** $\operatorname{Spec}(R)$ **вполне несвязно.**

Замечание:
Также из этого следует, что **пространство** $\operatorname{Spec}(R)$ **хаусдорфово.** В самом деле, любые два идеала $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ отличаются на $f \in A$. Это значит, что один из этих идеалов содержится в A_f, а другой в A_{1-f} – непересекающиеся открытые множества.

Категории (напоминание)

Определение:
Напомним, что **категорией** $\mathcal{C}$ называется набор объектов $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$, таких, что для каждой пары $X, Y \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ задано множество $\mathcal{M}or(X, Y)$ **морфизмов из X в Y**. На морфизмах задано отображение композиции

$$\mathcal{M}or(X, Y) \times \mathcal{M}or(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{M}or(X, Z),$$

которое ассоциативно. В каждом множестве $\mathcal{M}or(X, X)$ выделен **тождественный морфизм** Id_X, причем композиция любого морфизма φ с тождественным равна φ.

Примеры категорий:
Категория множеств
(морфизмы – произвольные отображения),
категория линейных пространств
(морфизмы – линейные отображения),
категории колец, полей, групп
(морфизмы – гомоморфизмы),
категория топологических пространств
(морфизмы – непрерывные отображения).

Функторы (напоминание)

Определение:
Напомним, что **ковариантный функтор** из категории $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ задается отображением $F: \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_2)$ и отображениями

$$F: \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X),F(Y)),$$

определенными для любых $X,Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$, переводящими Id_x в $\mathrm{Id}_{F(X)}$ и согласованными с взятием композиций.

Определение: Напомним, что **контравариантный функтор** из категории $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ задается отображением $F: \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_2)$ и отображениями $F: \mathcal{M}\mathrm{or}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(Y),F(X))$, переводящими Id_x в $\mathrm{Id}_{F(X)}$ и согласованными с взятием композиций.

Пространство Стоуна булева кольца

Замечание: Мы доказали, что $\operatorname{Spec}(R)$ для любого булева кольца – хаусдорфово, компактное, вполне несвязное топологическое пространство. Оно называется **пространство Стоуна** булева кольца.

Замечание: Легко видеть, что гомоморфизм колец $\varphi: R \longrightarrow R_1$ задает непрерывное отображение спектров $\operatorname{Spec}(R_1) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ (прообраз идеала – снова идеал). Таким образом, **соответствие $R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ задает контравариантный функтор из категории булевых колец в категорию пространств Стоуна**.

Теорема Стоуна о представимости булевой алгебры:
Это – эквивалентность категорий.

Рассмотрим функтор из категории пространств Стоуна в категорию булевых колец: $M \longrightarrow C(M, \mathbb{F}_2)$, где $C(M, \mathbb{F}_2)$ – пространство непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. **Для доказательства теоремы Стоуна надо убедиться, что эти функторы взаимно обратны.**

Спектр кольца непрерывных функций

Утверждение:
Любое пространство Стоуна (хаусдорфово, компактное, вполне несвязное топологическое пространство) M гомеоморфно $\operatorname{Spec}(R)$, где $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ – пространство непрерывных функций на M со значениями в $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Лемма: Пусть M – пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Пусть $\mathfrak{m} \subsetneq R$ – некоторый идеал. Тогда все функции $f \in \mathfrak{m}$ имеют общий нуль в M (точку, где все эти функции зануляются).

Доказательство. Шаг 1:
Если у $\mathfrak{m}$ нет общего нуля, то $M = \bigcup_{f \in \mathfrak{m}} f^{-1}(1)$. Мы получили открытое покрытие M. Поскольку M компактно, из него можно выбрать конечное подпокрытие. **Поэтому есть конечный набор $f_1, ..., f_n \in \mathfrak{m}$ такой, что $M = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(1)$.**

Общие нули идеала в кольце функций

Шаг 2: Каждый элемент $f \in R$ имеет вид χ_U, где $U = f^{-1}(1)$ открытозамкнуто, а χ_U – характеристическая функция U. Поэтому **есть такой набор открытозамкнутых множеств U_i с $\chi_{U_i} \in \mathfrak{m}$, что $M = \bigcup_{i=1}^n U_i$.**

Шаг 3: $\chi_{U\cup V} = \chi_U + \chi_V + \chi_U\chi_V$. Пусть теперь $W = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Воспользовавшись индукцией, получим, что $\chi_W = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, ...)$**, где P - полином без свободного члена.**

Шаг 4: Мы получили, что $1 = \chi_M = P(\chi_{U_1}, \chi_{U_2}, ...) = P(f_1, f_2, ...)$. Поэтому 1 лежит в идеале $\mathfrak{m}$. Противоречие! **Значит, у $\mathfrak{m}$ есть общий нуль.**

Замечание:
Аналогичное утверждение верно в кольце полиномов $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$: любой идеал $\mathfrak{m} \subsetneq \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ имеет общий нуль в $\mathbb{C}^n$. Это утверждение называется **"теорема Гильберта о нулях".** Для $n = 1$, из теоремы Гильберта следует, что любой полином имеет корень (Основная Теорема Алгебры).

Общие нули идеала в кольце функций

Лемма: Пусть M – пространство Стоуна, а $R = C(M, \mathbb{F}_2)$. Пусть $\mathfrak{m} \subset R$ – максимальный идеал. Тогда **у функций $f \in \mathfrak{m}$ есть единственный общий нуль (точка, где они все зануляются).**

Доказательство. Существование нуля уже доказано, осталось доказать единственность.

Шаг 1: Пусть есть две несовпадающие точки $x_1 \neq x_2 \in M$ такие, что все $f \in \mathfrak{m}$ зануляются в x_1 и x_2. Поскольку непрерывные функции на M разделяют точки, **гомоморфизм**

$$R \xrightarrow{\psi} \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2, \quad \psi(f) = (f(x_1), f(x_2))$$

сюрьективен. В самом деле, для какой-то f, $f(x) = 0$, $f(y) = 1$, значит, множество $\{1, 0, f, 1 - f\}$ сюрьективно отображается на $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$.

Шаг 2: $\psi(\mathfrak{m}) = 0$, поскольку все элементы $\mathfrak{m}$ зануляются в x_1, x_2. Мы получили сюрьективный гомоморфизм $\psi: R/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Это невозможно, поскольку $R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$. **Значит, общий нуль $\mathfrak{m}$ единственный.**

Общие нули идеала в кольце функций

Мы получили биекцию $M \xrightarrow{\Psi} \operatorname{Spec}(R)$: максимальные идеалы в $R = C(M, \mathbb{F}_2)$ взаимно однозначно соответствуют точкам $m \in M$. База открытых множеств в $\operatorname{Spec}(R)$ порождена множествами вида $A_f = f^{-1}(1)$, которые открыты в M. Поэтому Ψ непрерывно. Непрерывная биекция из компакта – гомеоморфизм. **Мы доказали, что M гомеоморфно $\operatorname{Spec}(R)$.**

Чтобы доказать взаимную обратность функторов $M \longrightarrow C(M, \mathbb{F}_2)$ и $R \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$, **осталось убедиться, что кольцо непрерывных $\mathbb{F}_2$-значных функций на $\operatorname{Spec}(R)$ изоморфно R.** Поскольку каждый неединичный элемент R содержится в максимальном идеале, гомоморфизм $R \xrightarrow{\Phi} C(\operatorname{Spec}(R), \mathbb{F}_2)$, переводящий f в его значение $f(\mathfrak{m}) \in R/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_2$ является вложением колец.

Непрерывные функции на $\operatorname{Spec}(R)$ порождены как кольцо характеристическими функциями открытых подмножеств A_f, потому что такие функции образуют базу открытых подмножеств. **Следовательно, Φ сюрьективно. Мы доказали теорему Стоуна об эквивалентности категории булевых алгебр категории пространств Стоуна.**

Marshall Harvey Stone
(1903 - 1989)

Топология, лекция 15: Фундаментальная группа

Миша Вербицкий

4 апреля, 2008

Независимый Университет

Гомотопные отображения

Определение: Пусть $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения. **Гомотопией** f_0 в f_1 называется непрерывное отображение $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ такое, что $f\Big|_{X\times\{0\}} = f_0$, $f\Big|_{X\times\{1\}} = f_1$.

Замечание: Гомотопные отображения - отображения, которые можно непрерывно продеформировать одно в другое.

Определение: Пусть f_0, f_1 принадлежат какому-то выделенному классу отображений. Говорится, что $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ **гомотопия в классе** $\mathcal{A}$, если для любого t, отображение $f_t := f\Big|_{X\times\{t\}} : X \longrightarrow Y$ принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Пример: Пусть f_0, f_1 непрерывные отображения из отрезка $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$, причем $f_i(a) = a'$, $f_i(b) = b'$. **Тогда f_0 гомотопно f_1 в классе отображений, переводящих a в a', b в b'.**

Доказательство:
Следующее отображение осуществляет искомую гомотопию:
$f : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow [c,d], \quad f(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$

Свойства гомотопии

Утверждение: Пусть $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ – гомотопные отображения, а $g : P \longrightarrow X$, $h : Y \longrightarrow Z$ - непрерывные отображения. **Тогда $f_0 \circ h$ гомотопно $f_1 \circ h$, а $g \circ f_0$ гомотопно $g \circ f_1$.**

Доказательство: Гомотопию $f_0 \circ h$ в $f_1 \circ h$ строим как композицию $f \circ h : X \times [0,1] \longrightarrow Z$. Гомотопию $g \circ f_0$ в $g \circ f_1$ получим, взяв композицию $g \times \mathrm{Id}_{[0,1]} : P \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ и $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$.

В дальнейшем, нам потребуется следующая

Лемма: Отображение $\varphi : A \longrightarrow B$ топологических пространств непрерывно, если для каждого $Z \subset A$, образ $\varphi(\bar{Z})$ замыкания Z лежит в замыкании $\overline{\varphi(Z)}$.

Доказательство: Пусть $X \subset B$ замкнут. Для непрерывности f достаточно доказать, $f^{-1}(X)$ замкнут. Пусть это не так, а $z \in A$ – точка замыкания, не лежащая в $f^{-1}(X)$. Тогда $f(z)$ лежит в замыкании $f(f^{-1}(X)) = X$, но поскольку X замкнуто, $f(z) \in X$. Противоречие! Значит, f непрерывно.

Транзитивность гомотопии

Утверждение: Пусть $f_0, f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения, причем f_0 гомотопно f_1, а f_1 гомотопно f_2. Тогда f_0 гомотопно f_2.

Доказательство: Пусть $\tilde f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ – гомотопия f_0 в f_1, а $\tilde{\tilde f} : X \times [1,2] \longrightarrow Y$ – гомотопия f_1 в f_2. Рассмотрим отображение $f : X \times [0,1] \longrightarrow Y$

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \tilde f(2\lambda), & \text{если } \lambda \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{\tilde f}(2\lambda), & \text{если } \lambda \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

(мы склеиваем гомотопию f_0 с f_1 и гомотопию f_1 с f_2 по f_1). Если f непрерывно, оно, очевидно, является гомотопией f_0 в f_2. **Поэтому для доказательства гомотопности f_0 и f_2 достаточно убедиться, что f непрерывно.**

Пусть $Z \subset X \times [0,1]$ – некоторое подмножество, причем $Z_1 = Z \cap X \times [0,1/2]$ и $Z_2 = Z \cap X \times [1/2,1]$. Легко видеть, что $\bar Z = \bar Z_1 \cup \bar Z_2$, соответственно $f(\bar Z) \subset f(\bar Z_1) \cup f(\bar Z_2) \subset \overline{f(Z_1)} \cup \overline{f(Z_2)}$ **Поэтому f непрерывно.** **Мы доказали, что f_0 и f_2 гомотопны.**

Классы гомотопической эквивалентности

Замечание: Предыдущее утверждение означает, что гомотопии можно "склеивать"между собой: приклеив гомотопию из f_0 в f_1 к гомотопии f_1 в f_2, мы получим гомотопию f_0 в f_2. Первое отображение непрерывно деформируется во второе, второе в третье, и взяв эти две деформации одну за другой, мы получаем, что первое можно непрерывно продеформировать в третье.

Определение:
Мы доказали, что отношение “f гомотопно g"транзитивно. Оно также рефлексивно и симметрично. Множество классов эквивалентности отображений $f: X \longrightarrow Y$ с точностью до гомотопии называется **множество классов гомотопической эквивалентности отображений**, или же **множество гомотопических классов отображений**.

Отмеченные пространства

Определение: Пара $\Big($топологическое пространство M, точка $m \in M\Big)$ называется **отмеченным пространством**, обозначается (M, m). Отмеченное пространство это топологическое пространство, в котором выбрана точка.

Определение: Непрерывное отображение отмеченных пространств $\varphi: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ – непрерывное отображение из X в Y, которое переводит x в y. Во избежание путаницы, непрерывные отображения отмеченных пространств называются **морфизмами отмеченных пространств**.

Замечание: Легко видеть, что **отмеченные пространства образуют категорию:** композиция морфизмов – снова морфизм, композиция очевидно ассоциативна, а тождественное отображение $\mathsf{Id}_{(X,x)}: (X, x) \longrightarrow (X, x)$ является морфизмом отмеченных пространств.

Пространство петель

Определение: Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что **путем из** $x \in M$ **в** $y \in M$ называется непрерывное отображение $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ из отрезка $[a,b]$ в M такое, что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Определение: Пусть (M,m) – отмеченное топологическое пространство. Рассмотрим множество путей $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ из m в m. Такие пути называются **петлями в** M. Множество всех петель обозначается $\Omega(M,m)$.

Замечание: Если M – метрическое пространство, на $\Omega(M,m)$ вводится sup-метрика, заданная формулой

$$d(\gamma,\gamma') = \sup_{t\in[0,1]} d(\gamma(t),\gamma'(t)).$$

Пространство $\Omega(M,m)$ называется **пространством петель** для M. Если M метризуемо и локально компактно, топология на $\Omega(M,m)$ не зависит от выбора метрики на M (Лекция 11). В такой ситуации мы рассматриваем пространство петель $\Omega(M,m)$ как топологическое пространство.

Петли с точностью до гомотопической эквивалентности

Определение: Пусть $f_0, f_1 : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – морфизмы отмеченных пространств. **Гомотопией морфизма f_0 к f_1** называется отображение $f: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ такое, что $f(x,t) = y$ для любого $t \in [0,1]$.

Замечание: Рассмотрим окружность S^1 с отмеченной точкой. Легко видеть, что любой путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ из m в m задает морфизм $(S^1, 0) \longrightarrow (M,m)$, и это соответствие взаимно однозначно. В дальнейшем, **мы будем рассматривать $\Omega(M,m)$ как множество морфизмов отмеченных пространств $(S^1, 0) \longrightarrow (M,m)$.**

Пусть (M,m) – отмеченное топологическое пространство. В силу транзитивности гомотопии, гомотопия задает отношение эквивалентности на множестве всех морфизмов $(S^1, 0) \longrightarrow (M,m)$, или, что то же самое, путей из m в m. **Множество классов гомотопической эквивалентности путей из m в m обозначается $\pi_1(M,m)$.**

Произведение петель

Пусть (M, m) – отмеченное топологическое пространство. Если $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow M$ – два пути из m в m, обозначим за $\widetilde{\gamma\gamma'} : [0,2] \longrightarrow M$ путь, который получен по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda) = \begin{cases} \gamma(\lambda), & \text{если} \quad \lambda \leqslant 1 \\ \gamma'(\lambda - 1), & \text{если} \quad \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Непрерывность этого пути следует из того же аргумента, что и выше (отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно, если замыкание образа любого $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z)

Определим **произведение $\gamma\gamma'$ формулой $\gamma\gamma'(\lambda) = \widetilde{\gamma\gamma'}(2\lambda)$.**

Лемма: Определенная выше операция на $\Omega(M, m)$ переводит гомотопные пути в гомотопные: если γ_0 гомотопен γ_1, а γ_0' гомотопен γ_1', то $\gamma_0\gamma_0'$ гомотопен $\gamma_1\gamma_1'$.

Гомотопии и произведение петель

Доказательство: Пусть $\gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$, $\gamma' : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$ – гомотопии, соединяющие γ_0 и γ_1, а также γ_0' и γ_1'. Гомотопии путей это отображения из квадрата в M, а то, что концы пути остаются в m, означает, что две стороны квадрата идут в m (остальные две стороны идут в γ_0, γ_1 для первого квадрата, γ_0', γ_1' для второго).

Рассмотрим гомотопию между $\widetilde{\gamma_0\gamma_0'}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma_1'}$, полученную по формуле

$$\widetilde{\gamma\gamma'}(\lambda, t) = \begin{cases} \gamma(\lambda, t), & \text{если} \quad \lambda \leqslant 1 \\ \gamma'(\lambda - 1, t), & \text{если} \quad \lambda \geqslant 1. \end{cases}$$

Вышеприведенный аргумент (отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно, если замыкание образа любого $Z \subset X$ содержит образ замыкания Z) доказывает, что **это отображение непрерывно, значит, осуществляет гомотопию $\widetilde{\gamma_0\gamma_0'}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma_1'}$.**

Гомотопия $\gamma_0\gamma_0'$ и $\gamma_1\gamma_1'$ получается из этого, поскольку $\gamma_0\gamma_0'$ и $\gamma_1\gamma_1'$ **получены из $\widetilde{\gamma_0\gamma_0'}$ и $\widetilde{\gamma_1\gamma_1'}$ репараметризацией.**

Фундаментальная группа

Из этой леммы следует, что **произведение $\gamma, \gamma' \longrightarrow \gamma\gamma'$ – корректно определенная операция на множестве $\pi_1(M, m)$ классов гомотопической эквивалентности петель.**

Теорема: Определенная выше операция $\pi_1(M, m) \times \pi_1(M, m) \longrightarrow \pi_1(M, m)$ задает структуру группы на $\pi_1(M)$.

Доказательство: Нужно проверить выполнение групповых аксиом.

Роль единицы $\iota : [0,1] \longrightarrow M$ в $\pi_1(M, m)$ играет отображение $[0,1]$ в точку $m \in M$. Эта петля называется **тривиальной**. Обозначим за $\varphi_0 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \max(0, 2t-1)$, за $\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \min(1, 2t)$.

Обозначим за $\varphi_0 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \max(0, 2t-1)$, за $\varphi_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ отображение $t \longrightarrow \min(1, 2t)$.

Фундаментальная группа: существование единицы

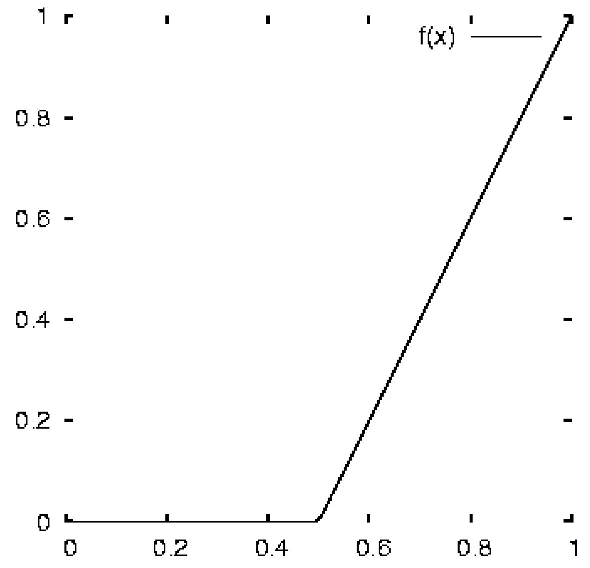


График функции $\varphi_0(t)$

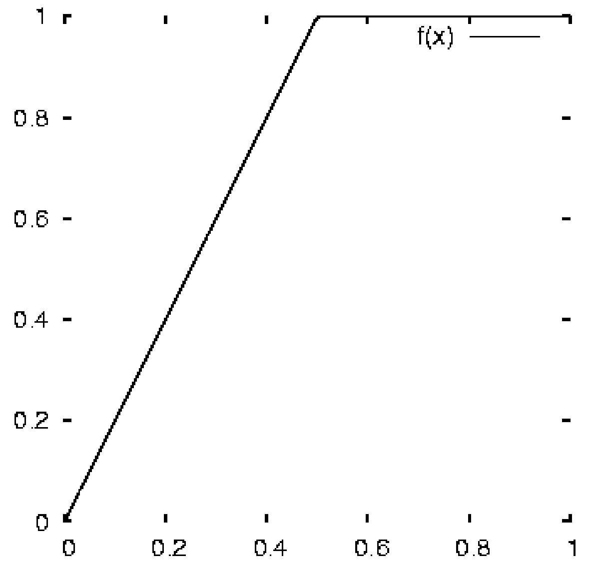


График функции $\varphi_1(t)$

Легко видеть, что $\gamma\iota = \varphi_0 \circ \gamma$, а $\iota\gamma = \varphi_1 \circ \gamma$. Функции φ_1 и φ_2 гомотопны друг другу и тождественному отображению $x \longrightarrow x$ в классе функций, сохраняющих 0 и 1. **Композиция уважает гомотопию, следовательно, путь $\gamma\iota$ гомотопен $\iota\gamma$ и гомотопен γ.**

Фундаментальная группа: обратный элемент

Обратный элемент γ^{-1} к пути γ строится так: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Рассмотрим функцию $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $\Phi(t) = \min(2t, 2-2t)$,

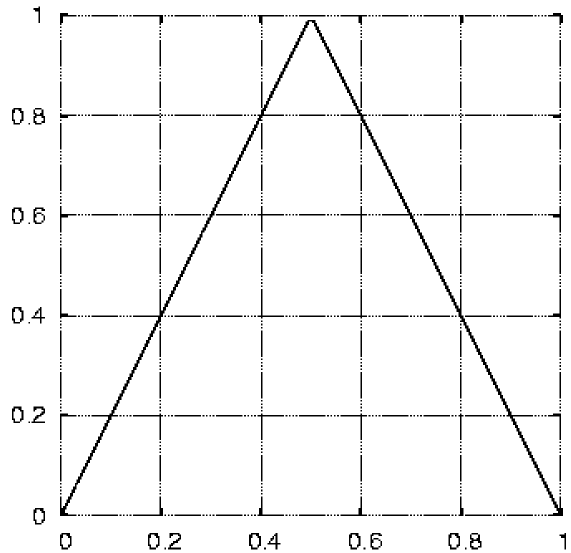
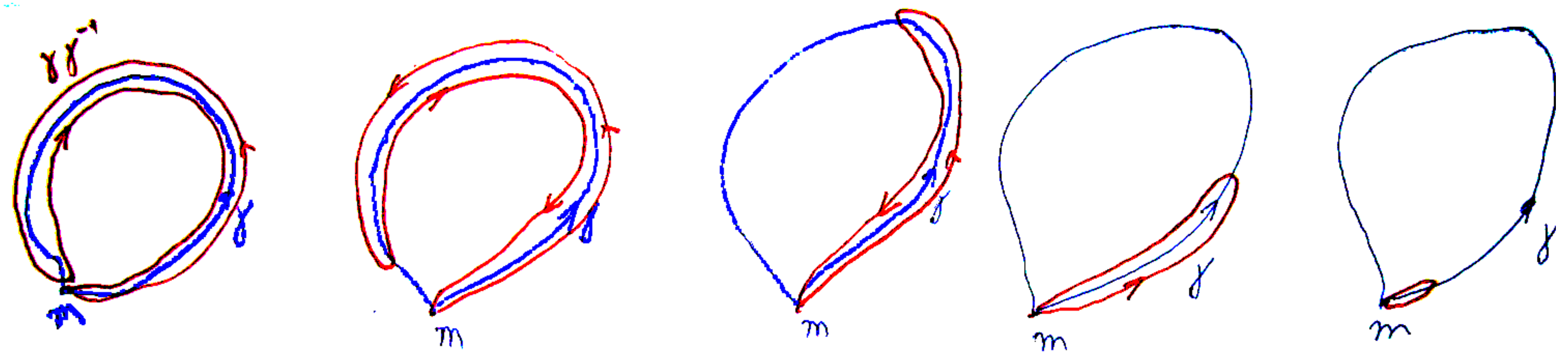


График функции $\Phi(t)$

Легко видеть, что $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$. Поскольку Φ гомотопен отображению $t \longrightarrow 0$ в классе функций, переводящих 0 и 1 в 0, путь $\gamma\gamma^{-1} = \Phi \circ \gamma$ гомотопен тривиальному.

Фундаментальная группа: обратный элемент (иллюстрация)

Эту гомотопию можно увидеть из следующей картинки.



Стягивание петли $\gamma\gamma^{-1}$ в точку

Фундаментальная группа: ассоциативность

Пусть γ_0, γ_1, γ_2 три пути из m в m, а $\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}: [0,3] \longrightarrow M$ – петля, определенная формулой

$$\widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda) = \begin{cases} \gamma_0(\lambda), & \text{если} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \\ \gamma_1(\lambda - 1), & \text{если} \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, \\ \gamma_2(\lambda - 2), & \text{если} \quad 2 \leqslant \lambda \leqslant 3. \end{cases}$$

Рассмотрим кусочно-линейные функции $\psi_1, \psi_2: [0,1] \longrightarrow [0,3]$

$$\psi_1(t) = \max\left(2t, 4\left(t - 1/4\right)\right), \quad \psi_2(t) = \min\left(4t, 2\left(t + 1/2\right)\right)$$

графики которых составлены из двух прямолинейных отрезков. У ψ_1 первый отрезок соединяет (0,0) и (1/2,1), второй отрезок соединяет (1/2,1) и (1,3). У ψ_2 первый отрезок соединяет (0,0) и (1/2,2), второй отрезок соединяет (1/2,2) и (1,3).

Фундаментальная группа: ассоциативность (продолжение)

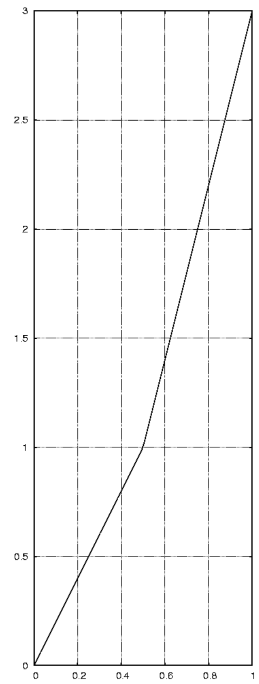


График функции $\psi_1(t)$

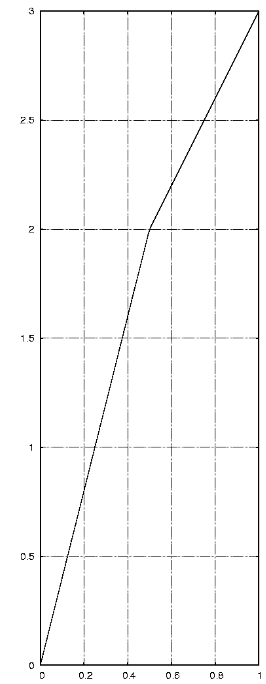


График функции $\varphi_2(t)$

Легко видеть, что $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2) = \psi_1 \circ \widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$, и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2 = \psi_2 \circ \widetilde{\gamma_0\gamma_1\gamma_2}(\lambda)$ Поскольку ψ_1 и ψ_2 гомотопны, из этого следует, что гомотопны петли $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$ и $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$. **Мы доказали, что $\pi_1(M, m)$ это группа.**

Фундаментальная группа

Определение: Группа $\pi_1(M, m)$, определенная выше, называется **фундаментальной группой** топологического пространства $(, m)$.

Замечание: Пусть $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$ – морфизм отмеченных пространств. Для любого пути $\gamma \in \Omega(X, x)$, композиция $\gamma \circ f$ задает путь в (Y, y). Пользуясь тем. что композиция f с гомотопными отображениями гомотопна, мы получаем, что $\gamma \longrightarrow \gamma \circ f$ определяет отображение на классах эквивалентности петель $\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$. Из конструкции этого отображения сразу ясно, что это гомоморфизм групп. Отображение фундаментальных групп, индуцированное f, часто обозначается той же самой буквой.

Замечание: Взятие фундаментальной группы **определяет функтор из категории отмеченных пространств в категорию групп.**

Замечание:

Пусть $f_0, f_1 : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ - гомотопные отображения. Тогда соответствующие гомоморфизмы фундаментальных групп совпадают.

Стягиваемые пространства

Определение: Пусть (X, x) – отмеченное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $\iota_x : X \longrightarrow X$, переводящее все точки X в x. Пространство X называется **стягиваемым**, если ι_x гомотопно тождественному отображению Id_X.

Пример: Пусть (X, x) – подмножество $\mathbb{R}^n$. Это подмножество называется **звездчатым**, если для любой точки $x' \in X$, отрезок $[x, x']$ целиком лежит в X. Рассмотрим отображение $X \times [0,1] \xrightarrow{\Psi} X$, переводящее (x', t) в $x - t(x - x')$. Легко видеть, что Ψ это гомотопия Id_X и ι_x (докажите это). Мы получили, что **любое звездчатое подмножество стягиваемо.**

Замечание: Пусть (X, x) – стягиваемое пространство. Легко видеть, что отображение $\iota_x : X \longrightarrow X$ задает тривиальный гомоморфизм $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\iota_x} \pi_1(X, x)$ (все элементы группы $\pi_1(X, x)$ переходят в 1). Поскольку отображение ι_x гомотопно тождественному, а гомотопные отображения топологических пространств индуцируют одинаковые отображения фундаментальных групп, **тождественное отображение $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\mathrm{Id}} \pi_1(X, x)$ равно отобраажению, переводящему все элементы в 1.** Поэтому **$\pi_1(X, x) = \{1\}$, для любого стягиваемого пространства X.**