Топология, лекция 16: Накрытия Галуа

Миша Вербицкий

21 апреля, 2008

Независимый Университет

Действие группы на пространстве

Определение: Пусть задано множество M. Напомним, что группа G **действует на множестве M**, если задан гомоморфизм из G в группу биекций $\operatorname{Bij}(M, M)$.

Определение: Пусть M – топологическое пространство, а G – группа. Мы говорим, что G **непрерывно действует на M**, если G действует на M, причем для любого $g \in G$, отображение $m \longrightarrow gm$ непрерывно.

Определение: В такой ситуации, **орбитой** точки $x \in M$ называется множество всех точек, которые можно получить из x действием G.

Факторпространство

Определение: Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Подмножество $U \subset M/\sim$ множества классов $M/\sim$ называется **открытым**, если его прообраз в M открыт. Это определяет топологию на $M/\sim$, которое называется **факторпространством** по соотношению эквивалентности $\sim$.

Предостережение: Факторпространство может быть нехаусдорфово, даже если M хаусдорфово.

Определение: Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. **Факторпространством** по действию группы называется пространство классов эквивалентности $M/\sim$, где $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Также факторпространство называют **пространство орбит действия G**.

Замечание: Пусть G - группа, действующая на топологическом пространстве M. Тогда естественная проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является открытым отображением.

Этальные отображения и накрытия

Определение:
Пусть M, $\tilde{M}$ – топологические пространства, а $\pi: \tilde{M} \longrightarrow M$ непрерывное отображение. π называется **этальным**, если у каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{M}$ есть окрестность $\tilde{U} \ni \tilde{x}$ такая, что $\pi\Big|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \longrightarrow \pi(\tilde{U})$ – это гомеоморфизм.

Определение: Отображение $\pi: \tilde{M} \longrightarrow M$ называется **накрытием**, если у каждой точки $x \in M$, есть окрестность $U \ni x$ такая, что $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times S$, где S – топологическое пространство с дискретной топологией, а отображение $\pi\Big|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ при таком изоморфизме совпадает с проекцией $U \times S \longrightarrow U$. **Базой накрытия** называется M, а его **слоем** над точкой x – прообраз $\pi^{-1}(x)$.

Замечание: Любое накрытие этально.

Замечание: Пусть $U \subset X$ - открытое подмножество, которое не является замкнутым. **Отображение вложения $j: U \longrightarrow X$ этально, но не является накрытием.**

Пример: Естественная проекция $\mathbb{R} \longrightarrow S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ является накрытием.

Вполне разрывное действие группы

Определение: Пусть G – группа, действующая на топологическом пространстве M. Говорится, что действие G **вполне разрывно**, если у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U такая, что $U \cap gU = \emptyset$ для любого $g \in G$ такого, что $g(x) \neq x$.

Утверждение: Пусть G – группа, вполне разрывно действующая на топологическом пространстве M. **Тогда проекция $M \xrightarrow{\pi} M/G$ является накрытием.**

Доказательство: Пусть $U \cap gU = \emptyset$ для любого $g \in G$ такого, что $g(x) \neq x$. Поскольку $M \xrightarrow{\pi} M/G$ открыто, биекция $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ – гомеоморфизм. Поскольку $\pi^{-1}(\pi(U))$ – объединение непересекающихся открытых множеств вида gU, где $g \in G$, **отображение $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ – накрытие.**

Замечание: Обратное тоже верно: **если $M \xrightarrow{\pi} M/G$ – накрытие, то действие G вполне разрывно.**

Пример: Действие $\mathbb{Z}^n$ на $\mathbb{R}^n$ вполне разрывно. Факторпространством по этому действию является n-мерный тор.

Морфизмы накрытий

Определение: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$, $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия M. Непрерывное отображение $\psi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$ называется **морфизмом накрытий**, если $\psi \circ \pi' = \pi$.

Замечание: Соотношения наподобие $\psi \circ \pi' = \pi$ изображают посредством диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"] & \tilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

в вершинах которой стоят объекты категории, а стрелочки обозначают морфизмы. Говорится, что эта диаграмма **коммутативна**, если морфизм, полученный композицией стрелочек, идущих из одного объекта в другой, не зависит от выбора пути по стрелочкам.

Определение:
Множество морфизмов из $\tilde{M}$ в $\tilde{M}'$ обозначается $\mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde{M}, \tilde{M}')$. Когда надо подчеркнуть зависимость от M, пишут $\mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde{M}, \tilde{M}')$.

Тривиальные накрытия

Замечание: Накрытия пространства M образуют категорию. Объекты этой категории – накрытия M, а морфизмы определены выше.

Определение: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Мы говорим, что оно **расщепляется**, если $\tilde{M} = M \times V$, где V – множество с дискретной топологией, и это разложение совместимо с проекцией в M. Расщепляющееся накрытие также называют **тривиальным**.

Определение: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Если $U \subset M$ – открытое подмножество, то $\pi\Big|_{\pi^{-1}(U)}\pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ – тоже накрытие. Оно называется **ограничением накрытия π на U**. Ограничение накрытия π на достаточно малое открытое множество $U \subset M$ тривиально, по определению накрытия. Это свойство часто выражают, говоря, что накрытие **локально тривиально**.

Замечание: Пусть M связно, а $\tilde{M} \longrightarrow M$ – тривиальное накрытие M. Тогда $\tilde{M} = M \times S$, где S – множество связных компонент $\tilde{M}$. В частности, **все связные компоненты $\tilde{M}$ проектируются на M гомеоморфно.**

Локально связные пространства

Определение: Топологическое пространство M называется **локально связным**, если у каждой точки $x \in M$ есть связная окрестность

Утверждение: Пусть $\psi : \tilde M \longrightarrow \tilde M'$ – морфизм накрытий M, причем M локально связно. **Тогда ψ это накрытие $\tilde M'$.**

Доказательство. Шаг 1: Это утверждение локально по M, значит, **можно предположить, что M связно, а накрытия $\tilde M$ и $\tilde M'$ расщепляются.**

Шаг 2: В такой ситуации, $\tilde M = M \times S$, $\tilde M' = M \times S'$, а $\psi(m,s) = (m, \psi_S(s))$, где ψ_S – отображение, индуцированое ψ на множестве компонент связности $\tilde M$ и $\tilde M'$.

Шаг 3: Отображение $\psi(m,s) = (m, \psi_S(s))$ является тривиальным накрытием на каждой связной компоненте $\tilde M'$.

Этально односвязные пространства

Определение: Связное топологическое пространство M называется **этально односвязным**, если любое накрытие M расщепляется.

Теорема: **Любое выпуклое, замкнутое подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ этально односвязно.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие. Поскольку M локально связно, $\tilde{M}$ тоже локально связно. Значит, $\tilde{M}$ – несвязное объединение своих компонент связности. Для доказательства этальной односвязности M достаточно убедиться, что каждая из компонент связности $\tilde{M}$ является тривиальным накрытием. **Поэтому можно считать, что $\tilde{M}$ связно.**

Шаг 2: Поскольку $\tilde{M}$ связно, а M локально линейно связно, **$\tilde{M}$ линейно связно.** В самом деле, $\tilde{M}$ локально линейно связно, значит, все его компоненты линейной связности открыты.

Выпуклые подмножества $\mathbb{R}^n$ этально односвязны

Шаг 3: Рассмотрим M как метрическое пространство, с евклидовой метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^n$. Любые две точки $x, y \in \tilde{M}$ можно соединить путем $\gamma: [a,b] \longrightarrow \tilde{M}$, потому что $\tilde{M}$ линейно связно. **Определим длину пути $l(\gamma)$ как длину его образа $\gamma_\pi := \gamma \circ \pi$ в M.**

Шаг 4: Если две точки $\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon)$ содержатся в окрестности $U \subset \tilde{M}$, которая гомеоморфно проектируется на выпуклое подмножество $U \subset M$, можно заменить участок $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ пути γ на прообраз отрезка, соединяющего точки $\pi(\gamma(t)), \pi(\gamma(t+\varepsilon))$. По определению накрытия, γ покрывается такими открытыми множествами целиком Поскольку $\gamma([a,b])$ компактен, его можно покрыть конечным набором таких открытых множеств. Заменив каждый сегмент $(\gamma(t), \gamma(t+\varepsilon))$ на прямолинейный, как указано выше, **мы получим путь γ, который проектируется в ломаную $\gamma_\pi: [a,b] \longrightarrow M$.**

Выпуклые подмножества $\mathbb{R}^n$ этально односвязны (продолжение)

Шаг 5: Следовательно, **любые две точки $\tilde{M}$ можно соединить путем конечной длины. Определим метрику на $\tilde{M}$ по формуле**

$$\tilde{d}(x,y) = \inf_\gamma l(\gamma),$$

где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y.

Шаг 6: Метрика $\tilde{d}$ согласована с исходной топологией на $\tilde{M}$.

Шаг 7: Докажем, что $(\tilde{M},\tilde{d})$ полно. Поскольку $\tilde{d}(x,y) \geqslant d(\pi(x),\pi(y))$, для любой последовательности Коши $\{x_i\}$ в $\tilde{M}$, ее образ $\{\pi(x_i)\}$ – последовательность Коши. Поскольку M полно, $\{\pi(x_i)\}$ сходится к точке $\underline{x} \in M$. Поэтому почти все члены последовательности $\{x_i\}$ содержатся в $\pi^{-1}(U)$, для любой окрестности $U \ni x$. Выберем U таким образом, что $\bar{U}$ компактно, а $\pi^{-1}(\bar{U})$ – объединение непересекающихся связных компактов, гомеоморфных и изометричных $\bar{U}$. Компоненты $\pi^{-1}(\bar{U})$ компактны и не пересекаются, значит, отстоят друг от друга на положительное расстояние. Поэтому почти все элементы последовательности Коши $\{x_i\}$ содержатся в одной из связных компонент $\bar{U}_0$. Поскольку $\bar{U}_0$ изометрична $\bar{U}$ и компактна, $\{x_i\}$ сходится.

Выпуклые подмножества $\mathbb{R}^n$ этально односвязны (окончание)

Шаг 8: По построению, метрика в $\tilde{M}$ является внутренней (вычисляется как длина путей), а значит, удовлетворяет условию Хопфа-Ринова. Также это пространство полно и локально компактно. **По теореме Хопфа-Ринова, расстояние в $\tilde{M}$ реализуется геодезическими.**

Шаг 9: Для близких $x, y \in \tilde{M}$, $\tilde{d}(x,y) = d(\pi(x), \pi(y))$, потому что π этально. **Поэтому π переводит геодезическую, соединяющую x и y, в отрезок.**

Шаг 10: Геодезические в $\tilde{M}$ проектируются в отрезки прямой. Следовательно, $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}) \longrightarrow (M, d)$ – изометрия. **Мы доказали, что π это гомеоморфизм.**

Следствие: Отрезок, квадрат, шар этально односвязны.

Расслоенные произведения

Определение: Пусть $X \xrightarrow{\psi} M$, $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывные отображения. Рассмотрим подмножество $\tilde{X} \subset X \times \tilde{M}$, состоящее из всех пар $(x, \tilde{m})$ таких, что $\psi(x) = \pi(\tilde{m})$, с топологией, индуцированной с $X \times \tilde{M}$. Это пространство называется **расслоенным произведением** X и $\tilde{M}$, и обозначается $X \times_M \tilde{M}$.

Лемма: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. **Тогда расслоенное произведение $X \times_M \tilde{M}$ – накрытие X.**

Доказательство: Обозначим за π_X проекцию из $\tilde{X}$ на X. В окрестности $U \ni \psi(x)$, расслоение π расщепляется: $\pi^{-1}(U) = U \times S$. **Поэтому в $U_X := \psi^{-1}(U)$, имеем $\pi_X^{-1}(U_X) = U_X \times S$.**

Определение: В такой ситуации, $X \times_M \tilde{M} \longrightarrow X$ называется **индуцированным накрытием** X.

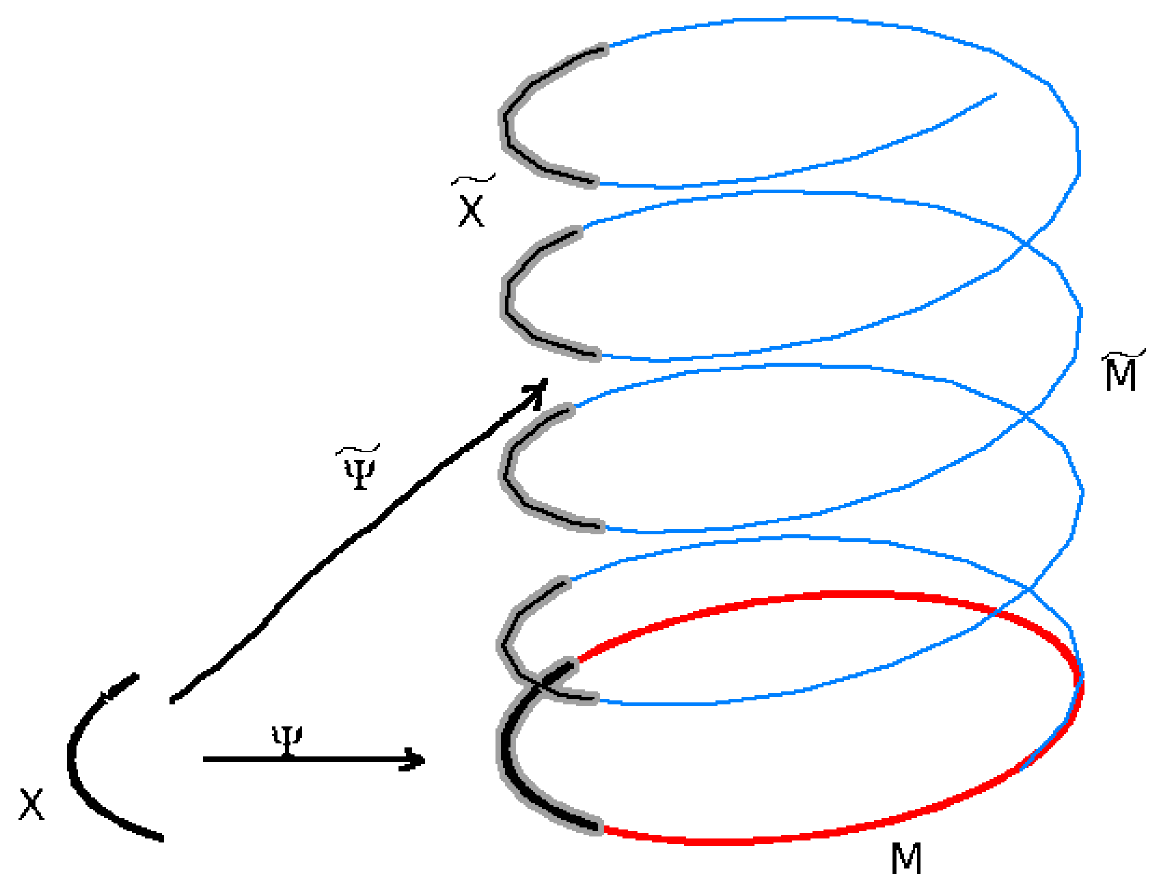
Поднятие накрытия

Определение: Пусть $\tilde M \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Отображение $X \xrightarrow{\tilde\psi} \tilde M$ называется **поднятием** ψ, если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} & \tilde M \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde\psi"] \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

Теорема: Пусть $\tilde M \xrightarrow{\pi} M$ – накрытие, а $X \xrightarrow{\psi} M$ – непрерывное отображение. Предположим, что X этально односвязно. **Тогда существует поднятие $X \xrightarrow{\tilde\psi} \tilde M$.** Более того, для любой точки $x \in X$ и любой точки $\tilde x \in \pi^{-1}(\psi(x))$, существует и единственно поднятие $X \xrightarrow{\tilde\psi} \tilde M$ такое, что $\tilde\psi(x) = \tilde x$.

Доказательство: Поскольку индуцированое накрытие $\pi_X : \tilde X \longrightarrow X$ расщепляется, имеем $\tilde X = X \times S$. **Для каждой из компонент связности $X \subset \tilde X$, естественная проекция $\tilde X \longrightarrow \tilde M$ задает поднятие $\tilde\psi : X \longrightarrow \tilde M$.** См. картинку.



Поднятие отображения $X \xrightarrow{\psi} M$ на накрытие

Накрытия и пути

Определение: Пусть (M,m) – отмеченное пространство, $(\tilde M,\tilde m)$ – его накрытие, а $\gamma\in\Omega(M,m)$ – петля. Поскольку отрезок односвязен, отображение $\gamma: [0,1]\longrightarrow M$ поднимается единственным образом до пути $\tilde\gamma: [0,1]\longrightarrow \tilde M$, причем $\tilde\gamma(0)=\tilde m$. Такой путь называется **поднятием петли γ на накрытие**.

Утверждение: Пусть (M,m) – отмеченное пространство, $(\tilde M,\tilde m)$ – его накрытие, $\gamma,\gamma'\in\Omega(M,m)$ – гомотопные петли, а $\tilde\gamma$, $\tilde\gamma'$ – их поднятия. **Тогда $\tilde\gamma(1)=\tilde\gamma'(1)$.**

Доказательство: Пусть $h: [0,1]\times[0,1]\longrightarrow M$ – отображение из квадрата, которое осуществляет гомотопию γ и γ'. По определению, h переводит две противоположные стороны квадрата в γ и γ', а две другие – в m. Поскольку квадрат односвязен, h поднимается до $\tilde h: [0,1]\times[0,1]\longrightarrow\tilde M$, таким образом, что $(0,0)$ переходит в $\tilde m$. На двух сторонах квадрата h постоянное, но поднятие тривиального пути, очевидно, тривиально. Поэтому на этих двух сторонах $\tilde h$ тоже постоянное. Значит,

$$\tilde\gamma(1)=\tilde h(1,0)=\tilde h(1,1)=\tilde\gamma'(1).$$

Фундаментальная группа и накрытия

Определение: Отмеченное пространстви (M, m) называется **односвязным**, если $\pi_1(M, m) = \{1\}$.

Утверждение: Пусть (M, m) – связное и локально линейно связное односвязное отмеченное пространство. **Тогда M этально односвязно.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим связное накрытие $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$. Пусть $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(x)$. Поскольку $\tilde{M}$ локально линейно связно и связно, оно линейно связно, а значит, **точки x_1, x_2 можно соединить путем $\tilde{\gamma}$.**

Шаг 2: Рассмотрим путь $\gamma := \tilde{\gamma} \circ \pi$. Этот путь гомотопен тривиальному, потому что $\pi_1(M, m) = \{1\}$. **Поднятие тривиального пути тривиально, а значит, оба его конца совпадают. Поэтому $x_1 = x_2$.**

Замечание: Обратное утверждение тоже верно, хотя и в более ограничительных предположениях.

Фундаментальная группа $\pi_1(M, m)$: зависимость от m

Пусть $x, y \in M$, а ξ – путь из x в y. Для каждой петли $\gamma \in \Omega(M, y)$, рассмотрим путь $\xi\gamma\xi^{-1}$, определенный по формуле

$$\xi\gamma\xi^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \xi(3\lambda), & \text{если } \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/3 \\ \gamma(3\lambda - 1), & \text{если } \ 1/3 \leqslant \lambda \leqslant 2/3, \\ \xi(3 - \lambda), & \text{если } \ 2/3 \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

(проходим из x в y по ξ, обходим y по γ, и возвращаемся в x в обратную сторону по ξ). Легко видеть, что $\xi\gamma\gamma'\xi^{-1}$ гомотопно $\xi\gamma\xi^{-1}\xi\gamma'\xi^{-1}$.

Замечание: Мы получили, что **группа $\pi_1(M, y)$ изоморфна $\pi_1(M, x)$.**

Замечание: Нетрудно убедиться, что **этот изоморфизм зависит от выбора пути γ.**

Накрытие неодносвязного пространства

Утверждение: Пусть (M, m) – отмеченное пространство, которое связно и локально линейно связно. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U с $\pi_1(U, x) = \{1\}$, и M этально односвязно. **Тогда $\pi_1(M, m) = \{1\}$.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $\pi_1(m, x)$ множество гомотопических классов путей из m в x. **Тот же аргумент, что и выше, позволяет построить биекцию между $\pi_1(m, x)$ и $\pi_1(M, m)$.**

Шаг 2: Пусть $U \subset M$ – односвязное подмножество, $x \in U$ – точка, а γ – – какой-то путь из m в x. Обозначим за $\mathcal{U}_\gamma$ множество всех пар $(y, \gamma' \in \pi_1(m, y))$, где $y \in U$, $\pi_1(U) = \{1\}$, и существует путь ν из y в x, целиком лежащий в U и такой, что $\gamma'\nu\gamma^{-1}$ гомотопно нулю. **Поскольку все пути из x в y, лежащие в U, гомотопны, естественная проекция из $\mathcal{U}_\gamma$ в U – гомеоморфизм.**

Накрытие неодносвязного пространства (продолжение)

Шаг 3: Пусть $\tilde{M}$ – множество всех пар $(x, \gamma \in \pi_1(m, x))$, с топологией, база которой задана множествами вида $\mathcal{U}_\gamma$. Легко видеть, что пересечение таких множеств имеет такой же вид, и поэтому $\mathcal{U}_\gamma$ задает топологию на $\tilde{M}$. Естественная проекция $\tilde{M} \longrightarrow M$ этальна по построению, а поскольку $\pi^{-1}(U)$ – объединение $\mathcal{U}_\gamma$ для всех гомотопических классов путей из m в $x \in U$, **$\tilde{M}$ – это накрытие M.**

Шаг 4: Наконец, пусть $\gamma \in \pi_1(M, m)$ класс, негомотопный нулю, пусть $\tilde{\gamma}$ – его поднятие в $\tilde{M}$, такое, что $\gamma(0)$ соответствует паре (m, γ_0), где γ_m – тривиальный путь. Тогда $\gamma(1)$ соответствует паре (m, γ), значит, **накрытие $\tilde{M} \longrightarrow M$ нетривиально.**

Замечание: В предположениях доказанного выше утверждения, этальная односвязность эквивалентна обычной.

Замечание: Построенное таким образом накрытие $\tilde{M} \longrightarrow M$ односвязно, потому что поднятие нетривиального класса $\gamma \in \pi_1(M, m)$ никогда не является петлей в $\tilde{M}$.

Произведение накрытий

Определение: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M, \tilde{M}' \xrightarrow{\pi'} M$ – накрытия M. Рассмотрим расслоенное произведение $\tilde{M} \times_M \tilde{M}' \subset \tilde{M} \times \tilde{M}'$, состоящее из всех $(x, y) \in \tilde{M} \times \tilde{M}'$, таких, что $\pi(x) = \pi'(y)$. Тогда $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ называется **произведением накрытий**.

Замечание: **Произведение $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ является накрытием M.** В самом деле, локально по M, $\tilde{M}$ изоморфно $S \times M$, $\tilde{M}'$ изоморфно $S' \times M$, следовательно, $\tilde{M} \times_M \tilde{M}'$ изоморфно $S \times S' \times M$.

Замечание: Для любого накрытия M_1 над M,

$$\mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M} \times_M \tilde{M}') = \mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M}) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(M_1, \tilde{M}').$$

Определение: Пусть $\varphi: M_1 \longrightarrow M_2$ – морфизм накрытий M. Рассмотрим подмножество $\Gamma_\varphi \subset M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех пар вида $(x, \varphi(x))$. Это подмножество называется **графиком** морфизма M.

Мы будем обозначать накрытие $\tilde{M} \longrightarrow M$ как $[\tilde{M} : M]$.

Связные накрытия

Определение: Пусть $[\tilde M : M]$ – накрытие. Оно называется **связным**, если M и $\tilde M$ связны и локально связны.

Утверждение: Пусть $[\tilde M : M]$ – накрытие, причем M связно и локально связно. **Тогда $\tilde M$ является несвязным объединением своих компонент связности $\tilde M_i$. Более того, каждая из компонент $\tilde M_i$ является связным накрытием M.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку M локально связно, а $\tilde M$ локально гомеоморфно M, оно тоже локально связно. Поэтому любая связная компонента $\tilde M$ открыта. **Значит, $\tilde M$ – несвязное объединение своих компонент связности.**

Шаг 2: Пусть $U \subset M$ – связное открытое подмножество, над которым $\tilde M$ расщепляется. Тогда $\pi^{-1}(U)$ – несвязное объединение нескольких копий U. Каждая из этих копий целиком лежит в одной из связных компонент $\tilde M_i$, следовательно, $\tilde M_i \cap \pi^{-1}(U)$ тоже несвязное объединение копий U. **Поэтому $\tilde M_i$ – накрытие.**

Графики морфизмов связных накрытий

Следствие: Пусть $[\tilde M : M]$ – связное накрытие. Тогда график любого морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde M, \tilde M)$ – связная компонента в $\tilde M \times_M \tilde M$. Связная компонента $\tilde M' \subset \tilde M \times_M \tilde M$ является графиком морфизма $\varphi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(\tilde M, \tilde M)$ тогда и только тогда, когда проекция $\tilde M'$ на первую компоненту задает изоморфизм $\tilde M' \longrightarrow \tilde M$.

Доказательство. Шаг 1: Если $\tilde M'$ – график, он открытозамкнут в $\tilde M \times_M \tilde M$ (это локальное утверждение, а локально $\tilde M'$ – объединение нескольких компонент $\tilde M \times_M \tilde M$). **Поэтому он является связной компонентой.**

Шаг 2: Любая связная компонента $\tilde M' \subset \tilde M \times_M \tilde M$ является накрытием M, как мы уже доказали. Если $\tilde M'$ гомеоморфно проектируется на $\tilde M$, проекция на вторую компоненту задает морфизм накрытий из $\tilde M \cong \tilde M'$ на $\tilde M$. **По построению, $\tilde M'$ является графиком этого морфизма.**

Накрытия Галуа

Замечание: Из этого следует, что

$$\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde M}(\tilde M, \tilde M \times_M \tilde M) = \mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde M, \tilde M).$$

Действительно, морфизмы $\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde M}(\tilde M, \tilde M \times_M \tilde M)$ взаимно однозначно соответствуют компонентам $\tilde M \times_M \tilde M$, которые изоморфно проектируются на $\tilde M$, а это то же самое, что графики морфизма.

Определение: Пусть $[\tilde M : M]$ – связное накрытие. Оно называется **накрытием Галуа**, если накрытие $\tilde M \times_M \tilde M \longrightarrow \tilde M$ расщепляется.

Замечание: Поскольку $\mathcal{M}\mathrm{or}_{\tilde M}(\tilde M, \tilde M \times_M \tilde M) = \mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde M, \tilde M)$, $[\tilde M : M]$ **является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда $\tilde M \times_M \tilde M$ – объединение графиков морфизмов $\nu \in \mathcal{M}\mathrm{or}_M(\tilde M, \tilde M)$.**

Замечание: Накрытие $[\tilde M : M]$ **является накрытием Галуа когда каждая пара $(x, y) \in \tilde M \times_M \tilde M$ принадлежит графику морфизма ν.**

Действие группы автоморфизмов накрытия

Определение: Пусть G – группа, действующая на множестве M. Действие группы называется **свободным**, если для любого неединичного $g \in G$ и любого $m \in M$, имеем $gm \neq m$. Действие группы называется **транзитивным**, если M состоит из одной орбиты.

Замечание: В силу вышесказанного, $[\tilde M : M]$ **является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда группа автоморфизмов** $\operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ **действует транзитивно на слоях** $[\tilde M : M]$**.**

Замечание: Пусть $[\tilde M : M]$ – связное накрытие. **Тогда** $\operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ **свободно действует на** M**.** Действительно, пусть $g \in \operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ – элемент, сохраняющий $x \in M$. Тогда график Γ_g пересекается с графиком тождественного отображения. Но поскольку график автоморфизма является связной компонентой $\tilde M \times_M \tilde M$, они совпадают.

Определение: Пусть $[\tilde M : M]$ – накрытие Галуа. Тогда группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ называется **группой Галуа накрытия**.

Теория Галуа для накрытий

Лемма (очевидная): Пусть $W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow W_2$ – накрытия, причем $W_1 \longrightarrow W_2$ инъективно, а W_3 связно, $[W_2 : W_3]$ расщепляется. **Тогда $W_1 : W_3$ тоже расщепляется.**

Утверждение: Пусть $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ – накрытия, причем $[M_1 : M_3]$ – накрытие Галуа. **Тогда $[M_1 : M_2]$ – тоже накрытие Галуа.**

Доказательство. Рассмотрим последовательность накрытий

$$M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_1 \longrightarrow M_1.$$

Накрытие $M_1 \times_{M_3} M_1 \longrightarrow M_1$ расщепляется, потому что $[M_1 : M_3]$ накрытие Галуа, а естественное вложение $M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1 \times_{M_3} M_1$ инъективно. Применив Лемму, получаем, что $M_1 \times_{M_2} M_1 \longrightarrow M_1$ расщепляется.

Замечание: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа, а $G = \operatorname{Aut}[\tilde{M} : M]$ – его группа Галуа. Отметим, что G вполне разрывно действует на $\tilde{M}$, и поэтому **для любой подгруппы $G' \subset G$, определено факторпространство $\tilde{M}/G'$, которое тоже является накрытием.**

Основная теорема теории Галуа

Определение: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – связное накрытие. **Факторнакрытием** $[\tilde{M} : M]$ называется накрытие $[\tilde{M}' : M]$ такое, что задан сюрьективный морфизм накрытий $\tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$.

Основная теорема теории Галуа для накрытий: Пусть $[\tilde{M} : M]$ – накрытие Галуа, $G = \operatorname{Aut}[\tilde{M} : M]$ – его группа Галуа, а $G' \subset G$ – любая подгруппа. **Тогда $\tilde{M}/G'$ – накрытие M. Более того, любое факторнакрытие $[\tilde{M} : M]$ получается таким образом.**

Доказательство. Пусть $[\tilde{M}' : M]$ – факторнакрытие $[\tilde{M} : M]$. Тогда $[\tilde{M} : \tilde{M}']$ – тоже накрытие Галуа, а значит, $\tilde{M}' = \tilde{M}/G'$, где $G' \subset G$ – группа автоморфизмов $\tilde{M}$ над $\tilde{M}'$.

Этальная фундаментальная группа

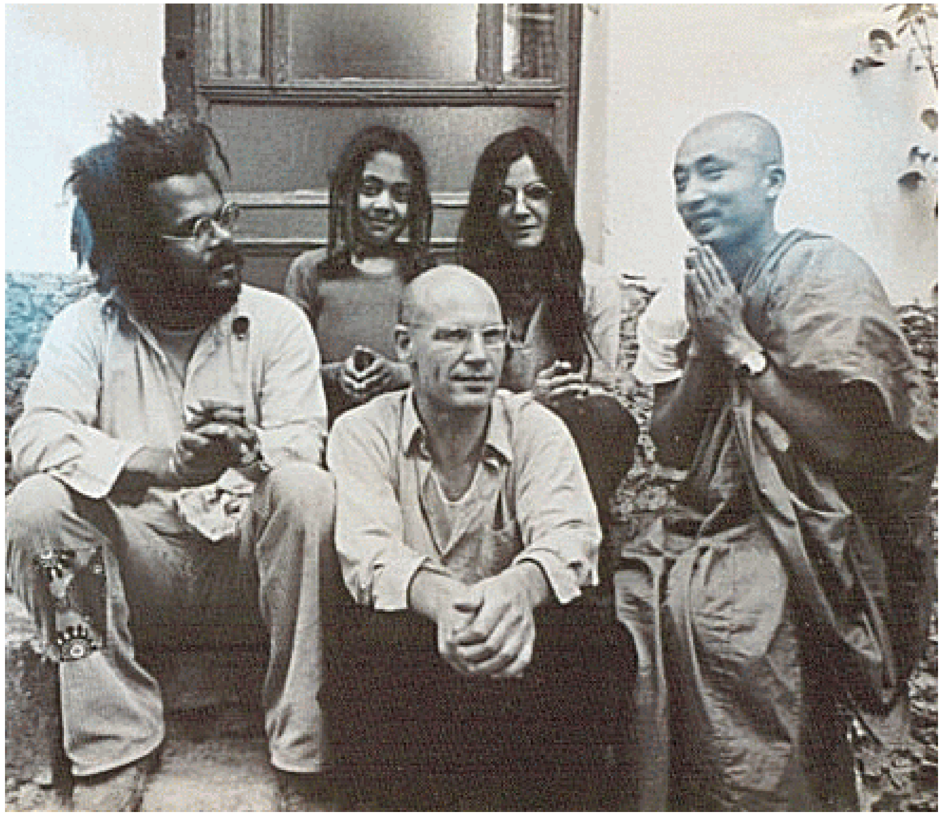
Определение: Пусть $[\tilde M : M]$ – связное накрытие. Оно называется **этальным универсальным накрытием**, если $\tilde M$ этально односвязно.

Замечание: Универсальное накрытие является накрытием Галуа. Действительно, **раз $\tilde M$ этально односвязно, то $\tilde M \times_M \tilde M$ расщепляется над $\tilde M$.**

Замечание: Универсальное накрытие единственно с точностью до изоморфизма. Действительно, пусть $\tilde M$, $\tilde M'$ – два универсальных накрытия. Поскольку **$\tilde M$ и $\tilde M'$ этально односвязны, любая связная компонента их произведения $\tilde M \times_M \tilde M'$ расщепляется над $\tilde M$ и над $\tilde M'$, значит, является графиком изоморфизма.**

Определение: Пусть $\tilde M \xrightarrow{\pi} M$ – универсальное накрытие. Группа Галуа $\operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ называется **этальной фундаментальной группой пространства M**.

Утверждение: Пусть (M, m) – отмеченное пространство, которое связно и локально линейно связно. Предположим, что у M есть база топологии, состоящая из множеств U с $\pi_1(U, x) = \{1\}$. **Тогда фундаментальная группа (M, m) изоморфна этальной фундаментальной группе.**



Alexander Grothendieck
(род. 28 марта 1928)