# 17. Топология, лекция 17: Свободные группы и теорема Зейферта–ван Кампена

## 17.1. Фундаментальная группа и универсальное накрытие

Начнем с повтора той части материала прошлой лекции, который понадобится сегодня.

Накрытия пространства $M$ образуют категорию. Объекты этой категории – накрытия, а морфизмы – отображения $\psi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$, коммутирующие с проекцией в $M$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие, причем $M$ и $\tilde{M}$ связны, локально линейно связны, и $\tilde{M}$ односвязно, то есть имеет тривиальную фундаментальную группу. Априори, фундаментальная группа $\pi_1(\tilde{M}, m)$ зависит от выбора точки $m$, но $\pi_1(\tilde{M}, m_1)$ изоморфно $\pi_1(\tilde{M}, m_2)$, если $m_1$ и $m_2$ лежат в одной компоненте линейной связности (это доказано на прошлой лекции).

Такое накрытие называется **универсальным**.

Поскольку $\tilde{M}$ односвязно, оно является накрытием Галуа. В самом деле, пусть $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi} \tilde{M}$ – связное накрытие, а $x \in \tilde{M}$ – любая точка. Пространство $\tilde{M}'$ локально линейно связно и линейно связно, а значит связно. Пусть $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ – любые точки, а $\gamma$ – путь, который их соединяет. Образ этого пути $\pi(\gamma)$ – петля в $\tilde{M}$, идущая из $x$ в $x$, но такая петля всегда стягиваема, поскольку $\pi_1(\tilde{M}, x) = 0$. Путь $\gamma$ является поднятием петли $\pi(\gamma)$, и коль скоро $\pi(\gamma)$ стягиваема, $\gamma$ – тоже петля (это было доказано в предыдущей лекции). Поэтому $y_1 = y_2$, и $\pi^{-1}(x)$ состоит из одного элемента. Следовательно $\tilde{M}' \cong \tilde{M}$, и все накрытия $\tilde{M}$ расщепляются.

Пусть $M_1, M_2$ – топологические пространства, снабженные непрерывными отображениями $\psi_1, \psi_2$ в $M$. Напомним, что **расслоенным**

**произведением** $M_1$ на $M_2$ над $M$ называется подмножество $M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех пар $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, таких, что $\psi_1(m_1) = \psi_2(m_2)$. Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как подмножество в $M_1 \times M_2$, с индуцированной топологией.

Обозначим за $\Psi: M_1 \times M_2 \longrightarrow M \times M$ отображение

$$\Psi(m_1, m_2) = (\psi_1(m_1), \psi_2(m_2)).$$

Легко видеть, что $M_1 \times_M M_2 = \Psi^{-1}(\Delta)$, где $\Delta \subset M \times M$ – диагональ. Поэтому, для $M$ хаусдорфова, расслоенное произведение – замкнутое подмножество в $M_1 \times M_2$.

На предыдущей лекции было доказано, что произведение накрытий – снова накрытие.

Вернемся к универсальному накрытию $\tilde{M} \longrightarrow M$. Любое накрытие $\tilde{M}$ расщепляется. Рассмотрим $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ как накрытие $\tilde{M}$, с проекцией $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$, переводящей $(m_1, m_2)$ в $m_1$.

Напомним, что накрытие называется **накрытием Галуа**, если $\tilde{M} \times_M \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ расщепляется. В силу односвязности $\tilde{M}$, $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ расщепляется, и $\tilde{M}$ – накрытие Галуа.

Поскольку $\tilde{M}$ локально связно, любое его накрытие локально связно. Локально связное пространство состоит из несвязного объединения своих компонент связности. Поскольку все компоненты связности $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ являются связными накрытиями $\tilde{M}$, они ему изоморфны.

Мы получили, что проекция каждой из компонент связности в $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ в $\tilde{M}$ – гомеоморфизм, что по первому аргументу, что по второму. Следовательно, каждая из этих компонент является графиком автоморфизма накрытия $\tilde{M}$ над $M$. Действительно, пусть $X$ – такая компонента, тогда проекции на первый и второй аргумент $\sigma_1, \sigma_2: X \longrightarrow \tilde{M}$ это гомеоморфизмы, а $X$ – график гомеоморфизма $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ (проверьте это).

Из вышесказанного следует, что каждая точка $(x, y) \in \tilde{M} \times_M \tilde{M}$ принадлежит графику автоморфизма $\psi \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$, где $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – группа автоморфизмов накрытия $\tilde{M}$ над $M$ (она еще называется **группой Галуа накрытия** $\tilde{M}$).

Обозначим проекцию $\tilde{M} \longrightarrow M$ за $\pi$. Для каждого $m \in M$, и любой пары точек $x, y \in \pi^{-1}(m)$, найдется автоморфизм $\nu$, графику которого $\Gamma_\nu$ принадлежит точка $(x, y) \in \tilde{M} \times_M \tilde{M}$. В силу того, что $\nu$ переводит $x \in \tilde{M}$ в $\sigma_2(\sigma_1^{-1}(x, y))$, имеем $\nu(x) = y$ (проверьте это).

Мы получили, что $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ транзитивно действует на множестве $\pi^{-1}(m)$. Поскольку $\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ – объединение непересекающихся графиков морфизмов, из $\nu_1(x) = \nu_2(y)$ следует $\nu_1 = \nu_2$. Следовательно, $G := \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует на $\pi^{-1}(m)$ транзитивно и свободно. Поэтому $M = \tilde{M}/G$, причем действие $G$ на $\tilde{M}$ свободно.

Пусть $g \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ – элемент группы Галуа универсального накрытия, переводящий $x \in \tilde{M}$ в $g(x)$, где $x \in \pi^{-1}(m)$. Рассмотрим путь $\gamma$, соединяющий $x$ и $g(x)$. Такой путь – единственный, с точностью до гомотопии, поскольку $\tilde{M}$ односвязно (докажите это). Образ $\gamma \circ \pi : [0,1] \longrightarrow M$ – это петля. Обозначим ее класс в $\pi_1(M,m)$ за $\gamma_g$. Поскольку путь $\gamma$ единственный с точностью до гомотопии, $\gamma_g$ зависит только от $x$ и $g$. Но коль скоро $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует на $\pi^{-1}(m)$ транзитивно, эта группа переводит путь, соединяющий $x, g(x)$, в путь, соединяющий $y, g(y)$, где за $y$ можно взять любую точку в $\pi^{-1}(m)$. Следовательно, $\gamma_g \in \pi_1(M,m)$ не зависит от выбора $x$, и однозначно определяется автоморфизмом $g \in Aut[\tilde{M} : M]$. Мы получили отображение $Aut[\tilde{M} : M] \longrightarrow \pi_1(M,m)$.

Если $g_1, g_2 \in Aut[\tilde{M} : M]$, причем $g_1$ переводит $x$ в $y$, а $g_2$ переводит $y$ в $z$, то $g_1 g_2$ переводит $x$ в $z$. Произведение путей $\gamma_{g_1}\gamma_{g_2}$ получается как $\pi(\gamma\gamma')$, где $\gamma$ – путь из $x$ в $y$, а $\gamma'$ – путь из $y$ в $z$. Следовательно, $\gamma_{g_1}\gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2}$, и построенное выше отображение $Aut[\tilde{M} : M] \longrightarrow \pi_1(M,m)$ – гомоморфизм групп.

В прошлой лекции мы убедились, что это изоморфизм (проверьте). Мы получили следующую теорему.

**Теорема 17.1:** Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – универсальное накрытие, причем $M$ и $\tilde{M}$ связны, локально линейно связны, и $\tilde{M}$ односвязно. Рассмотрим группу Галуа этого накрытия, $G = Aut[\tilde{M} : M]$. Тогда $M = \tilde{M}/G$, причем фундаментальная группа $M$ изоморфна $G$.
■

**Замечание 17.2.** Эта теорема позволяет вычислить $\pi_1(M,m)$ для пространств, полученных как фактор $\tilde{M}/G$ односвязного $\tilde{M}$ по группе $G$, действующей на $\tilde{M}$ вполне несвязно. Мы немедленно получаем, что фундаментальная группа окружности $S^1$ равна $\mathbb{Z}$. Действительно, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, но $\pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$, так как $\mathbb{R}$ стягиваемо. Аналогичный аргумент показывает, что $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$, где $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – $n$-мерный тор.

**Замечание 17.3.** Пусть $\tilde{M}_1 \longrightarrow M_1$, $\tilde{M}_2 \longrightarrow M_2$ – универсальные накрытия, $\pi_1(M_i) = G_i$. Поскольку $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ односвязно (проверьте это) и накрывает $M_1 \times M_2$ (проверьте), оно является универсальным накрытием $M_1 \times M_2$. Поэтому $\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2/G_1 \times G_2 = M_1 \times M_2$, и $\pi_1(M_1 \times$

$M_2) = G_1 \times G_2$. Мы получили, что фундаментальная группа произведения двух пространств – это произведение фундаментальных групп этих пространств.

**Замечание 17.4.** Этот факт можно получить, и не пользуясь накрытиями: непрерывное отображение из любого пространства $X$ в $M_1 \times M_2$ – пара отображений из $X$ в $M_1$ и из $X$ в $M_2$. Поэтому то же самое верно для петель и для классов гомотопий петель.

## 17.2. Категория накрытий и фундаментальная группа

Пусть $G$ – группа, а $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ – категория, объекты которой – множества с действием $G$, а морфизмы – отображения множеств, совместимые с действием $G$. Эта категория называется **категорией множеств с действием** $G$.

Предположим, что $G = Aut[\tilde M : M]$, где $[\tilde M : M]$ – универсальное накрытие $M$. Для каждого множества $S$ с действием $G$, рассмотрим произведение $\tilde M \times S$, где $G$ действует по формуле $g(m, s) = (g(m), g(s))$ (такое действие называется **диагональным**). Взяв дискретную топологию на $S$, можно считать, что $\tilde M \times S$ – топологическое пространство. Поскольку действие $G$ на $\tilde M \times S$ вполне разрывно (проверьте это), фактор $(\tilde M \times S)/G$ – хаусдорфово топологическое пространство.

**Замечание 17.5.** Легко видеть, что $(\tilde M \times S)/G$ является накрытием $M$. В самом деле, локально по $M$, $\tilde M$ является тривиальным накрытием, изоморфным $M \times G$, где $G$ рассматривается как топологическое пространство с дискретной топологией. В таком случае, $(\tilde M \times S)/G$ изоморфно $M \times X$, следовательно, стандартное покрытие $(\tilde M \times S)/G \xrightarrow{\pi_X} M$ – накрытие. Для каждой точки $m \in M$, множество $\pi_x^{-1}(m)$ снабжено биекцией на $(G \times X)/G = X$.

**Теорема 17.6:** Пусть $\tilde M \longrightarrow M$ – универсальное накрытие, а $G$ – его группа Галуа, $G = Aut[\tilde M : M]$. Рассмотрим функтор

$$\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$$

из $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ в категорию $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий $M$, построенный выше. Тогда $\Psi$ – эквивалентность категорий.

**Доказательство:** Возьмем точку $m \in M$. Обратный функтор

$$\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \longrightarrow \mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$$

строится весьма просто. Пусть $M' \xrightarrow{\sigma} M$ – накрытие $M$, а $S_{M'} := \sigma^{-1}(m)$ – его слой над $m$. На множестве $S_{M'}$ задано действие $\pi_1(M)$, следующим образом. Пусть $x \in S_{M'}$ – любая точка, а $g \in G$ – элемент фундаментальной группы. Возьмем петлю $\gamma_g \in \Omega(M, m)$, представляющую $g$, и пусть $\tilde{\gamma}_g$ – ее поднятие в $m'$, с начальной точкой в $x$. Такое поднятие существует и единственно, как доказано в предыдущей лекции, и конечная точка $\tilde{\gamma}_g(1)$ однозначно определяется $x$ и $g$. Таким образом, каждое $g \in G$ задает отображение из $S_{M'}$ в $S_{M'}$ Легко видеть, что произведение двух петель соответствует композиции отображений, значит, $x \longrightarrow \tilde{\gamma}_g(1)$ задает действие $G$ на $S_{M'}$. При морфизме накрытий, поднятия путей переходят в поднятия путей, следовательно, $M' \longrightarrow S_{M'}$ задает функтор $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$.

Композиция $\Psi \circ \Phi$ переводит множество с действием $G$ в то же самое множество, что ясно из определения.

Чтобы убедиться, что композиция $\Phi \circ \Psi$ переводит накрытие в эквивалентное ему, достаточно проверить это на связных накрытиях. Но связные накрытия имеют вид $\tilde{M}/G'$, для подгрупп $G' \subset G$ (это утверждение называется "основная теорема теории Галуа для накрытий", и оно доказано в прошлой лекции). Применение функтора $\Phi$ к $M/G'$ дает, очевидно, множество $\Phi(\tilde{M}/G') = G/G'$ с естественным действием $G$. По построению,

$$\Psi(G/G') = (\tilde{M} \times G/G')/G = \tilde{M}/G'$$

(проверьте это). Значит, функтор $\Phi \circ \Psi$ эквивалентен тождественному. ■

**Замечание 17.7.** Каждое накрытие изоморфно факторнакрытию несвязной суммы нескольких копий универсального:

$$M' = \coprod_i \tilde{M}/G_i$$

в соответствие такому накрытию можно поставить множество

$$S = \coprod_i G/G_i$$

с естественным действием $G$. Это задает эквивалентность категории накрытий и категории множеств с действием $G$ чуть более явно. Докажите самостоятельно, что это та же самая эквивалентность категорий, что была построена выше.

## 17.3. Как восстановить фундаментальную группу по категории накрытий

**Замечание 17.8.** Пусть $G$ – группа, а $\mathcal{C} = \mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ – категория множеств с действием $G$. Рассмотрим $G$ как объект $\mathcal{C}$, то есть множество с действием $G$, определенным формулой $(g, x) \longrightarrow gx$. Тогда все морфизмы из $G$ в себя обратимы, и группа $\mathsf{Aut}(G) = \mathcal{M}\mathrm{or}(G, G)$ изоморфна $G$. В самом деле, пусть $\nu \in \mathcal{M}\mathrm{or}(G, G)$ переводит 1 в $x$. Тогда $\nu(g1) = g(\nu(x)) = gx$. Такой морфизм, очевидно, биективен, а композиция $\nu_x\nu_y$ равна $\nu_{xy}$.

**Лемма 17.9:** Пусть $\bar{G} \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объект $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, который обладает следующими свойствами

**(i)** Все морфизмы из $\bar{G}$ в себя являются изоморфизмами

**(ii)** Для любого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(\bar{G}, X)$ непусто.

Тогда $\bar{G}$ изоморфен $G$ как объект $\mathcal{C}$.

**Доказательство. Шаг 1:** Все объекты $\mathcal{C}$ получены объединением непересекающихся орбит действия $G$. Каждая такая орбита имеет вид $G/G'$, где $G'$ – стабилизатор точки. Нетривиальные морфизмы из орбиты $G/G_1$ в $G/G_2$ возможны, только если $G_2 \supset G_1$ (проверьте это).

**Шаг 2:** Поскольку $\mathcal{M}\mathrm{or}(\bar{G}, X)$ всегда непусто, $\bar{G}$ – объединение орбит вида $G/G_i$, среди которых хотя бы одна изоморфна $G$.

**Шаг 3:** Пусть $\bar{G}$ содержит две орбиты $X_1, X_2$, причем $X_1$ изоморфна $G$. Рассмотрим морфизм из $\bar{G}$ в себя, тождественный на всех орбитах, кроме $X_1$, и отображающий $X_1$ в $X_2 = G/G'$ (такой морфизм существует в силу Шага 1). Такой морфизм не биективен, значит, он не может быть изоморфизмом.

**Шаг 4:** Мы получили, что $\bar{G}$ состоит из одной орбиты (шаг 3), причем эта орбита изоморфна $G$ (шаг 2). Это доказывает, что $\bar{G}$ изоморфно $G$. ∎

**Замечание 17.10.** Из доказанной выше леммы следует, что группа $G$ однозначно восстанавливается по категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$: если категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G_1, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G_2, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ эквивалентны, то группы $G_1, G_2$ изоморфны.

## 17.4. Свободная группа и свободное произведение групп

Пусть $G, H$ – группы. Рассмотрим множество $\overline{G * H}$, состоящее из последовательностей (слов) вида $g_1h_1g_2h_2...g_nh_n$, где $g_i \in G$, $h_i \in H$. Рассмотрим соотношение эквивалентности, порожденное

$$g_1h_1g_2h_2...g_ih_ig_{i+n}h_{i+n}...g_nh_n \sim g_1h_1g_2h_2...g_ig_{i+n}g_nh_n \qquad (17.4.1)$$

если $h_i = 1$, и

$$g_1h_1g_2h_2...g_ih_ig_{i+n}h_{i+n}...g_nh_n \sim g_1h_1g_2h_2...g_ih_ih_{i+n}g_{i+2}...g_nh_n \qquad (17.4.2)$$

если $g_{i+n} = 1$. Иными словами, в каждом слове все сочетания вида $g_1 1 g_2$ можно заменить на $g_1g_2$, а $h_1 1 h_2$ на $h_1h_2$. Множество классов эквивалентности обозначается $G * H$. Слова можно умножать:

$$g_1h_1g_2h_2...g_nh_n \cdot g_1'h_1'g_2'h_2'...g_{n'}'h_{n'}' := g_1h_1g_2h_2...g_nh_ng_1'h_1'g_2'h_2'...g_{n'}'h_{n'}'.$$

Такое умножение, очевидно, ассоциативно. Из (17.4.1) и (17.4.2) немедленно следует, что

$$g_1h_1g_2h_2...g_nh_nh_n^{-1}g_n^{-1}...h_2^{-1}g_2^{-1}h_1^{-1}g_1^{-1} = 1,$$

значит, $G * H$ это группа.

**Определение 17.11.** Группа $G * H$ называется **свободным произведением**, или же **амальгамой**, или же **копроизведением** групп $G$ и $H$.

**Задача 17.12.** Проверьте, что это произведение ассоциативно:

$$(F * G) * H = F * (G * H).$$

**Замечание 17.13.** Аналогичным образом определяется свободное произведение произвольного набора групп $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Пусть множество $\overline{\coprod_\alpha G_\alpha}$ состоит из слов вида $g_1g_2g_3...g_n$, составленных из букв $g_i \in G_\alpha$. Рассмотрим соотношение эквивалентности, порожденное

$$g_1g_2\cdots g_ig_{i+1}g_{i+2}\cdots g_n \sim g_1g_2\cdots g_ig_{i+2}\cdots g_n$$

если $g_{i+1} = 1$ (можно выкинуть из слова букву $g_{i+1}$, если $g_{i+1}$ равно 1), и

$$g_1g_2\cdots g_{i-1}g_ig_{i+1}g_{i+2}\cdots g_n \sim g_1g_2\cdots g_{i-1}(g_ig_{i+1})g_{i+2}\cdots g_n$$

если $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ (можно сгруппировать последовательно идущие буквы $g_i, g_{i+1}$ в $(g_i g_{i+1})$, если они обе принадлежат одной и той же группе $G_\alpha$. Произведение и обратный элемент в

$$\coprod_\alpha G_\alpha := \overline{\coprod_\alpha G_\alpha} / \sim$$

определяется той же самой формулой, что и для $G * H$; аналогичный аргумент показывает, что это группа (докажите это). Проверьте, что это определение для двух сомножителей дает $G * H$.

**Определение 17.14.** Определенная таким образом группа $\coprod_\alpha G_\alpha$ называется **свободным произведением**, или же **амальгамой**, или же **копроизведением** набора $\{G_\alpha\}$.

**Определение 17.15.** Копроизведение $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * ... * \mathbb{Z}$ ($n$ раз) называется **свободной группой от $n$ образующих**. Копроизведение вида $\coprod_\alpha G_\alpha$, где все $G_\alpha \cong \mathbb{Z}$, называется **свободной группой**.

**Замечание 17.16.** Легко видеть, что естественное отображение любого сомножителя в свободное произведение, $G_0 \longrightarrow \coprod_\alpha G_\alpha$, $g_0 \longrightarrow g_0$ является вложением (докажите это).

## 17.5. Представимые функторы

Пусть $\mathcal{C}$ – категория, а $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ некоторый объект. Определим **хом-функтор** $h_A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$ формулой $h_A(X) = \mathcal{M}\mathrm{or}(A, X)$.

Пусть $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$ – функтор из $\mathcal{C}$ в множества. Напомним, что $F$ называется **представимым**, если $F$ эквивалентен хом-функтору $h_A$ для какого-то объекта $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$. В этой ситуации, $A$ называется **представляющим объектом** для функтора $F$.

**Определение 17.17.** Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ – категории, а $F_1, F_2 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$. **Естественная трансформация функторов**

$$\Phi : F_1 \longrightarrow F_2$$

задается так. Для каждого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, задан морфизм

$$\Phi_X \in \mathcal{M}\mathrm{or}(F_1(X), F_2(X),$$

таким образом, что следующая диаграмма коммутативна для любого $\lambda \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$:

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{F_1(\lambda)} & F_1(Y) \\ \Phi_X \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Phi_Y \\ F_2(X) & \xrightarrow{F_2(\lambda)} & F_2(Y) \end{array}$$

Отметим, что частным случаем естественной трансформации функторов является эквивалентность функторов, определенная в лекции 14.

Если $\Phi: h_A \longrightarrow F$ – естественная трансформация функторов из $\mathcal{C}$ в множества, $\Phi$ однозначно определяется элементом $\Phi(\mathsf{Id}_A) \in F(A)$. Это можно видеть из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A) & \xrightarrow{f \mapsto f \circ \lambda} & \mathcal{M}\mathrm{or}(A, B) \\ \Phi_A \Big\downarrow & & \Big\downarrow \Phi_B \\ F(A) & \xrightarrow{F(\lambda)} & F(B) \end{array}$$

где $\lambda \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, B)$ – любой морфизм. Верхняя стрелка переводит $\mathsf{Id}_A$ в $\lambda$. Из коммутативности этой диаграммы получаем, что

$$\Phi_B(\lambda) = F(\lambda)(\Phi_A(\mathsf{Id}_A)),$$

значит, отображение $\Phi_B: \mathcal{M}\mathrm{or}(A, B) \longrightarrow F(B)$ целиком определяется элементом $\Phi_A(\mathsf{Id}_A) \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A)$. Мы получили следующую полезную лемму

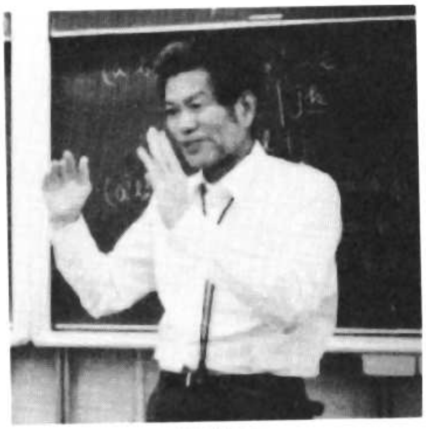
**Лемма 17.18:** (Лемма Ионеды, Yoneda lemma) Пусть $\mathcal{C}$ – категория, $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ ее объект, $h_A: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$ – хом-функтор, а $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$ еще функтор. Тогда множество естественных трансформаций функтора $h_A$ в $F$ биективно с $F(A)$.
■

Функторы $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$ сами образуют категорию: объекты этой категории – функторы $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$, а морфизмы – естественные преобразования. Из леммы Ионеды немедленно следует, что $\mathcal{M}\mathrm{or}(h_A, h_B) = \mathcal{M}\mathrm{or}(B, A)$. Мы получили такое утверждение.

**Утверждение 17.19:** Пусть $\mathcal{C}$ – категория, а $\mathcal{F}$ – категория представимых функторов $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{ets}$, с морфизмами, которые задаются естественными преобразованиями функторов. Тогда контравариантный функтор $A \longrightarrow h_A$ задает эквивалентность категорий $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F}^\circ$.
■

**Замечание 17.20.** В частности, объект категории, представляющий заданный функтор, определяется этим функтором однозначно с точностью до изоморфизма.

Мы излагали лемму Ионеды и эквивалентность категорий для ковариантных функторов, но то же самое верно и для контравариантных функторов, с заменой ковариантного функтора $h_A(X) = \mathcal{M}\mathrm{or}(A, X)$ на контравариантный $h_A^\circ(X) = \mathcal{M}\mathrm{or}(X, A)$.



米田信夫

Nobuo Yoneda
(1930-1996)

## 17.6. Лемма Ионеды: история, замечания

Нобуо Ионеда был студентом Шокичи Иянага (Shokichi Iyanaga, 1906-2006) в университете Токио. В начале 1950-х Самуэль Эйленберг путешествовал по Японии, и Ионеда, еще студентом, сопровождал его в качестве переводчика. Закончив университет, Ионеда отправился продолжать учебу к Эйленбергу в Принстон. В скором времени после этого, Эйленберг уехал в Париж (Эйленберг был участником группы Бурбаки), и в 1954-м году Ионеда поехал в Париж к Эйленбергу. В Париже Ионеда имел длинную беседу с Сондерсом Мак Лэйном (сначала в кафе перед Гар дю Нор, а потом на вокзале; они закончили разговаривать в дверях отбывающего поезда). Под впечатлением этой беседы, Мак Лэйн назвал лемму, которую он узнал от Ионеды на вокзале, леммой Ионеды.

Кроме знаменитой леммы, Ионеда придумал интерпретацию групп $Ext^*$ в терминах расширений модулей, чем положил начало современной гомологической алгебре.

После возвращения в Японию Ионеда не занимался математикой. В начале 1960-х он заинтересовался компьютерными науками, под влиянием Шокичи Иянага, и был одним из авторов языка Алгол 68, а после создания факультета компьютерных наук стал профессором компьютерной науки в университете Токио.

Интересно, что лемма Ионеды сейчас входит в стандартный курс компьютерных наук, ибо на теории категорий в значительной степени построена теоретическая основа функционального программирования.

Помимо Ионеды, Иянага был наставником Горо Азумая (изобретателя алгебр Азумаи), Кунихико Кодаира (открывшего сотни ключевых теорем алгебраической и комплексной геометрии), Кенкичи Ивасава (знаменитого автора разложения Ивасавы и важных теорем теории чисел) и Тсунео Тамагава, прославленного "числами Тамагавы".

Иянага был учеником Тейджи Такаги (1875-1960), который был студентом Давида Гильберта. Такаги был автором десятков учебников, обеспечив Японию университетскими учебниками по всем разделам математики. Такаги занимался теорией чисел, и в 1898 году придумал аксиоматическое определение поля.

## 17.7. Произведение и копроизведение в категории

Свободную группу можно охарактеризовать следующим свойством.

**Утверждение 17.21:** Пусть $G$, $H$ – группы, $G * H$ их свободное произведение, а $G \overset{\iota}{\hookrightarrow} G * H$, $H \overset{\iota}{\hookrightarrow} G * H$ – естественные вложения. Тогда каждая пара гомоморфизмов $G \xrightarrow{\varphi} P$, $H \xrightarrow{\psi} P$ в группу $P$ продолжается до гомоморфизма $G * H \xrightarrow{\varphi * \psi} P$ таким образом, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "\varphi"'] & & H \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& G * H \arrow[d, "\varphi * \psi"] & \\
& P &
\end{tikzcd}$$

Более того, гомоморфизм $\varphi * \psi$ определяется отображениями $\psi$ и $\psi$ однозначно.

**Доказательство:** Пусть $\varphi * \psi$ переводит слово вида $g_1 h_1 g_2 h_2 ... g_n h_n$ в $\varphi(g_1)\psi(h_1)\varphi(g_2)\psi(h_2)...\varphi(g_n)\psi(h_n)$. Поскольку это отображение переводит эквивалентные слова в эквивалентные, и произведение слов в произведение, оно является гомоморфизмом. Единственность такого $\varphi * \psi$ очевидна, потому что группа $G * H$ порождена образами $G$ и $H$. ■

**Замечание 17.22.** Утверждение 17.21 называется **универсальным свойством копроизведения**. Его можно взять в качестве определения $G * H$. Действительно, в силу универсального свойства, $G * H$ является представляющим объектом для функтора $P \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(G, P) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(H, P)$ из групп в множества, а такой объект единственный (Замечание 17.20).

**Замечание 17.23.** Произведение и копроизведение можно определить на языке категорий: произведение объектов $A, B \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объект, представляющий функтор

$$X \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(X, A) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(X, B),$$

а копроизведение объектов $A, B \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – объект, представляющий функтор

$$X \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(A, X) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(B, X).$$

Аналогичным образом определяется произведение и копроизведение любого набора объектов. Произведение и копроизведение не всегда существует, но определено однозначно с точностью до изоморфизма, что следует из леммы Ионеды (Замечание 17.20).

**Замечание 17.24.** В большинстве известных категорий (группы, множества, топологические пространства, векторные пространства), определение произведения согласовано с категорным определением, приведенным выше (проверьте это).

**Замечание 17.25.** В категории топологических пространств, копроизведение – это несвязная сумма; в категории множеств, копроизведение – непересекающееся объединение, а в категории векторных пространств, копроизведение – это прямая сумма пространств. Проверьте это.

## 17.8. История свободной группы и копроизведений

Свободную группу открыл немецкий математик Вальтер фон Дайк, ученик Клейна. Фон Дайк в 1882-м году первым дал современное определение группы и был автором топологической классификации неориентируемых римановых поверхностей (двумерных многообразий), которую он получил в 1888 году.

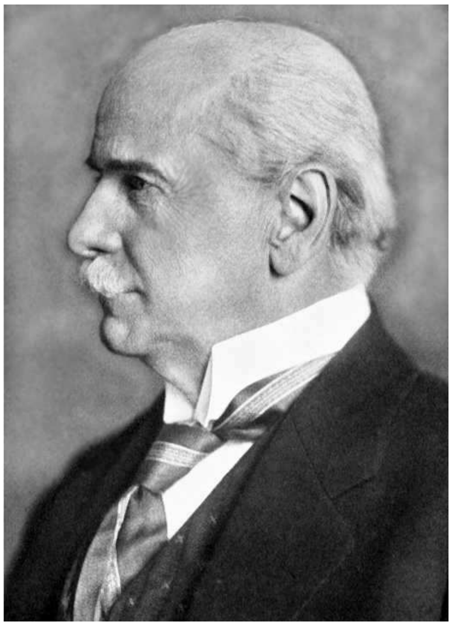
Фон Дайка интересовали фуксовы группы (дискретные подгруппы группы изометрий плоскости Лобачевского). В той же самой работе 1882-го года, в которой он определил группы, фон Дайк обратил внимание на то, что некоторые фуксовы группы являются в некотором смысле простейшими; это и были свободные группы. Еще фон Дайк был создателем Немецкого Музея Науки и Технологии и издал полное собрание писем Кеплера.

Название "свободная группа" принадлежит Якобу Нильсену (Jacob Nielsen), датскому математику, ученику Макса Дэна (Max Dehn), который в 1924-м году доказал, что любая подгруппа конечно-порожденной свободной группы свободна.

Категорное определение свободного произведения как объекта, представляющего функтор

$$X \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(A, X) \times \mathcal{M}\mathrm{or}(B, X),$$

принадлежит Сондерсу Мак Лэйну который в работе "Groups, categories and duality" (1948), нашел категорные интерпретации множеству понятий общей (универсальной) алгебры.



Walther Franz Anton von Dyck
(1856-1934)

## 17.9. Теорема Зейферта–ван Кампена

**Теорема 17.26:** (теорема Зейферта–ван Кампена, "Seifert-van Kampen Theorem") Пусть $M = X \cup Y$ – объединение топологических пространств $X$ и $Y$, причем $X, Y$ локально связные, локально односвязные, замкнутые в $M$ и связные, а $X \cap Y$ связно и односвязно. Тогда $\pi_1(M)$ изоморфно свободному произведению $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

**Доказательство. Шаг 1:** Категория $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G * H, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств, на которых задано действие $G$ и $H$ (априори, никак не согласованное). Функтор из $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G * H, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ в $\mathcal{C}$ переводит $S$ в то же самое множество $S$, где действие $G$ и $H$ определяется из вложений $G \hookrightarrow G * H$, $H \hookrightarrow G * H$. Обратный функтор определяется из того, что для каждого множества $I$ с действием $G$ и $H$ заданы гомоморфизмы $G, H \longrightarrow \Sigma_I$, где $\Sigma_I$ – группа биективных отображений из $I$ в $I$. В силу универсального свойства $G * H$, такие гомоморфизмы однозначно продолжаются до гомоморфизма $G * H \longrightarrow \Sigma_I$. Это задает функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G * H, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, очевидно, обратный исходному.

**Шаг 2:** В силу Замечания 17.10, группа $G$ однозначно задается своей категорией $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$. Поэтому для изоморфизма $\pi_1(M) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, достаточно убедиться, что категория накрытий $M$ эквивалентна $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. В силу предыдущего шага, эта категория эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. Таким образом, теорема Зейферта–ван Кампена будет доказана, если мы докажем, что категория $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий $M$ эквивалентна $\mathcal{C}$.

**Шаг 3:** Функтор из $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ в $\mathcal{C}$ построить весьма нетрудно. Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\sigma} M$ – накрытие $M$. Соответствующие накрытия

$$\tilde{X} = \sigma^{-1}(X) \longrightarrow X, \quad \tilde{Y} = \sigma^{-1}(Y) \longrightarrow Y$$

называются **ограничениями** $\tilde{M}$ **на** $X$ **и** $Y$. Для каждой точки $m \in X \cap Y$, прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \tilde{X}$ наделен действием $\pi_1(X)$ (Теорема 17.6). Прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \tilde{Y}$ наделен действием $\pi_1(Y)$, по той же самой причине. Мы получили, что $\tilde{M} \longrightarrow \sigma^{-1}(m)$ задает функтор $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}$. Осталось доказать, что это эквивалентность.

**Шаг 4:** Пусть $S \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – множество с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$, а $\tilde{X} \xrightarrow{\sigma_X} X$, $\tilde{Y} \xrightarrow{\sigma_Y} Y$ – соответствующие накрытия, существующие в силу эквивалентности категории накрытий и категории множеств с действием фундаментальной группы (Теорема 17.6). Поскольку $X \cap Y$ связно, локально связно и односвязно,

$$\sigma_X^{-1}(X \cap Y) = \sigma_Y^{-1}(X \cap Y) = X \cap Y \times S,$$

где $S$ – множество связных компонент $\tilde{S}$. Пусть $x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}$, причем $x \in \sigma_X^{-1}(X \cap Y)$ равен $y \in \sigma_Y^{-1}(X \cap Y)$ при этом отождествлении. В таком случае мы напишем $x \sim y$. Пусть $\tilde{M} = \tilde{X} \coprod \tilde{Y} / \sim$ – фактор по отношению эквивалентности, определенному таким способом. Легко видеть, что естественная проекция $\sigma: \ \tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие (проверьте это). Действительно, проекция $\sigma$ этальна, потому что $M$ получается как фактор $X \coprod Y$ по отношению эквивалентности[1]

$$m \sim m' \Leftrightarrow m \in X, m' \in Y, \quad m = m' \text{ в } X \cap Y,$$

а прообраз $\sigma^{-1}(U)$ по построению гомеоморфен $U \times S$, если $\sigma_X$, $\sigma_Y$ расщепляется над $U \cap X$, $U \cap Y$.

[1] Для доказательства этого используйте замкнутость $X$ и $Y$ в $M$.

Мы построили функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$. Легко видеть, что этот функтор обратен $\Psi$ (проверьте это). Поэтому $\Psi$ – это эквивалентность категорий.

Мы доказали, что категория $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий $M$ эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. На шаге 1 было доказано, что $\mathcal{C}$ эквивалентна категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. В силу Теоремы 17.6, $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ эквивалентна $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(M), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. Используя Замечание 17.10, мы выводим из эквивалентности категорий

$$\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathcal{S}\mathrm{ets}) \sim \mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(M), \mathcal{S}\mathrm{ets})$$

изоморфизм групп

$$\pi_1(X) * \pi_1(Y) \cong \pi_1(M).$$

■

**Замечание 17.27.** Если $M = \bigcup M_i$, причем все частичные пересечения $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap ...$ односвязны, то $\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * ...$ Для конечного набора $M_i$ это можно получить индукцией из теоремы Зейферта–ван Кампена, пользуясь ассоциативностью копроизведения. Для бесконечного набора, индуктивный аргумент не годится. Впрочем, легко видеть, что доказательство, приведенное выше, работает для любого числа $M_i$, ценой неимоверного усложнения обозначений. Проверьте это самостоятельно.

## 17.10. История, замечания

Теорема Зейферта–ван Кампена была получена ван Кампеном 1933-м году, в более общей ситуации, чем описано выше. Ван Кампен вычислил фундаментальную группу объединения двух топологических пространств, не предполагая связности и односвязности их пересечения. Аргумент, подобный вышеприведенному, в такой ситуации не работает, потому что если пересечение $X$ и $Y$ несвязно, то непонятно, куда поместить отмеченную точку.

Современная точка зрения на этот результат требует применения *фундаментального группоида*. **Группоидом** называется категория, все морфизмы которой – изоморфизмы. Пусть $M$ – топологическое пространство. **Фундаментальным группоидом** $M$ называется категория, объекты которой – точки $M$, а морфизмы из $x$ в $y$ – классы гомотопии путей из $x$ в $y$. Композиция морфизмов соответствует обычному

Egbert Rudolf van Kampen
(1908-1942)

умножению путей. Фундаментальный группоид содержит всю информацию о фундаментальной группе, но не требует неестественного выбора базовой точки. Гротендик по этому поводу сказал так:

*...люди привыкли работать с фундаментальной группой, ее образующими и соотношениями, и продолжают делать это даже в контексте, где такой подход абсолютно неадекватен, когда ясное описание группы образующими и соотношениями можно получить только работая одновременно с целой кучей базовых точек, правильно отобранных – либо получая эквивалентное описаниюе в алгебраическом контексте группоидов, а не групп. Выбор путей, соединяющих базовые точки, и сведение групоида к одной группе, безнадежно разрушает структуру и внутренние симметрии, присущие геометрической ситуации, приводя к безобразной куче образующих и соотношений, которые никто и не пытается выписать, потому что все понимают, что никакой пользы это не принесет, и запутает картину вместо того, чтобы прояснить ее. Я узнал об этой трудности много лет назад, в ситуациях типа ван Кампена, когда единственная осмысленная формулировка задачи может быть получена только в терминах амальгамы групоидов...*

Теорему Зейферта–ван Кампена можно сформулировать следующим образом. Пусть $U$ и $V$ – топологические пространства. Тогда фундаментальный группоид $U \cup V$ – это расслоенное копроизведение фундаментальных группоидов $U$ и $V$ (взятое в категории группоидов). В такой общности, доказательство теоремы Зейферта–ван Кампена получается значительно проще, чем доказательство ее более слабой версии, приведенное выше.

На странице Рональда Брауна (Ronald Brown)[1] выложены его обзоры теории групоидов и любопытная переписка с Гротендиком, который много пропагандировал применение групоидов в топологии.

Теорему Зейферта–ван Кампена довольно часто называют "теорема ван Кампена". Эгберт ван Кампен (1908-1942) получил образование в Нидерландах, но в 1931-м году уехал в Америку, где сотрудничал с Оскаром Зариским. Зариски пытался посчитать фундаментальную группу дополнения к алгебраической кривой, и совместно с ван Кампеном добился успеха. Теорема Зейферта–ван Кампена получилась как побочный продукт этого сотрудничества.

Ван Кампен был вундеркинд (он защитил диссертацию на 21-м году жизни), и умер весьма молодым, от рака.

[1] http://www.bangor.ac.uk/~mas010/topgpds.html

# 18. Топология, лекция 18: Фундаментальная группа графа и теорема Нильсена-Шрайера

## 18.1. Фундаментальная группа букета окружностей

**Определение 18.1.** **Графом** называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствует две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его **концами**, или **концом и началом**, причем каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, эти ребра называются **смежными**, а вершина – **общей вершиной** ребер. Граф называется **конечным**, если число его ребер и вершин конечно.

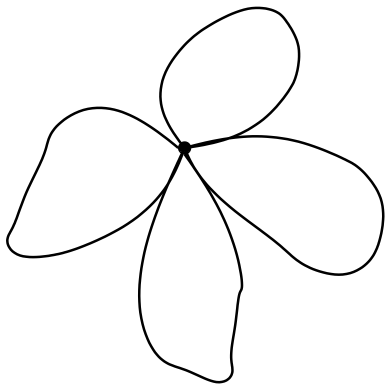
**Замечание 18.2.** Определение графа чисто комбинаторное: даны два множества (вершин $V$ и ребер $E$), и отображение $E \longrightarrow V \times V$ из множества ребер в множество пар вершин. Но для того, чтоб получить в голове какую-то геометрическую картинку, полезно представлять себе граф как совокупность отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин. Это интуитивное представление можно формализовать, получив понятие *топологического пространства графа.*

**Определение 18.3.** Пусть $\Gamma$ – граф, а $S$ – множество его ребер. Рассмотрим $S$ как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S\times[0,1]$ – несвязное объединение $S$ копий отрезка. В этом случае $s\times\{1\}$ и $s\times\{0\}$ – точки $X$, соответствующая началу или концу отрезка. Если у ребра $s_1$ и у ребра $s_2$ имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{0\}$ – соответствующие точки $X$. **Топологическим пространством графа** называется факторпространство $X/\sim$ по такому соотношению эквивалентности.

**Задача 18.4.** Докажите, что топологическое пространство графа всегда хаусдорфово и локально линейно связно.

**Замечание 18.5.** Злоупотребляя обозначениями, мы будем обозначать граф и его топологическое пространство одной и той же буквой.

**Определение 18.6.** Граф называется **связным**, если его топологическое пространство связно.



Букет четырех окружностей

**Определение 18.7.** Пусть $\Gamma$ – связный граф, у которого есть всего одна вершина и $|I|$ ребер. Его топологическое пространство называется **букетом $|I|$ окружностей**. Оно имеет вид ромашки сделанной из нескольких (возможно, бесконечного числа) окружностей.

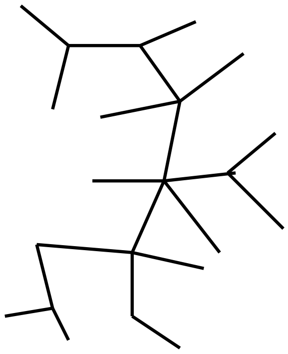
Чтобы вычислить фундаментальную группу графа, проще всего воспользоваться теоремой Зейферта–ван Кампена. Пусть $X$ – букет окружностей, а $X_1, X_2, ...$ – составляющие его окружности. Пересечение любой пары различных $X_i$ – единственная вершина графа, и она, очевидно, односвязна. Получаем, что $\pi_1(X) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) * = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * ....$ Мы доказали такую теорему.

**Теорема 18.8:** Фундаментальная группа букета окружностей свободна.

■

## 18.2. Деревья

**Определение 18.9.** Конечный связный граф называется **конечным деревом**, если у него $n$ вершин и $n - 1$ ребро.



Дерево с 22 вершинами и 21 ребром

Напомним, что топологическое пространство $X$ называется **деформационным ретрактом** $Y \supset X$, если задано непрерывное отображение $Y \xrightarrow{j} X$, тождественное на $X \subset Y$, причем $j$ гомотопно тождественному отображению $\mathsf{Id}_Y$ из $Y$ в себя.

Топологические пространства $X$ и $Y$ называются **гомотопически эквивалентными**, если заданы непрерывные отображения $X \xrightarrow{\varphi} Y$ и $Y \xrightarrow{\psi} X$, причем композиции $\psi\circ\varphi$ и $\varphi\circ\psi$ гомотопны тождественным.

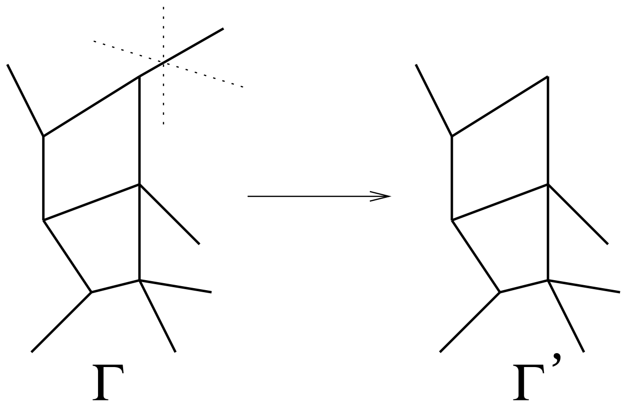
Нетрудно доказать (см. Лекцию 15), что любое пространство гомотопически эквивалентно своему деформационному ретракту, а фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

**Определение 18.10.** Пусть $\Gamma$ – граф, а $\Gamma'$ – граф, множества ребер и вершин которого являются подмножествами в множестве ребер и вершин $\Gamma$, причем концы сответсвующих ребер в $\Gamma$ и $\Gamma'$ те же. Тогда $\Gamma'$ называется **подграфом** $\Gamma$.

**Замечание 18.11.** Пусть $\Gamma'$ – подграф графа $\Gamma$. Легко видеть, что топологическое пространство $\Gamma'$ – замкнутое подмножество в топологическом пространстве $\Gamma$.

**Определение 18.12.** **Валентность** вершины графа – количество ребер, от 1 до $\infty$, которые с ней соединены. Вершина валентности 1 вместе с ее ребром называется **висячей**.

**Лемма 18.13:** Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ – подграф, полученный из $\Gamma$ выбрасыванием висячего ребра $l$ и одной вершины (см. рисунок). Тогда $\Gamma'$ является




Граф, полученный выкидыванием висячего ребра

деформационным ретрактом Γ.

**Доказательство:** Пусть $s$ – второй (невыкинутый) конец ребра $l$. Рассмотрим отображение $\psi :\ \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ переводящее $l$ в $s$, и тождественное на $\Gamma'$. Очевидно, оно непрерывно. Чтобы убедиться, что это ретракция, построим гомотопию из $\psi$ в $\mathsf{Id}_\Gamma$. Предположим, что 0 на $l$ соответствует $s$, а 1 соответствует выкинутой вершине. Пусть $\psi_t$ действует тождественно на $\Gamma'$, и переводит $\lambda \in [0,1] = l$ в $t\lambda \in l$. Легко видеть, что $\psi_t$ непрерывно, $\psi_0 = \psi$, а $\psi_1 = \mathsf{Id}_\Gamma$. Поэтому $\Gamma'$ – деформационный ретракт. ■

**Замечание 18.14.** Из этой леммы, мы получили, что любой граф гомотопически эквивалентен своему подграфу, полученному выкидыванием висячего ребра.

**Утверждение 18.15:** Конечное дерево стягиваемо (т.е. гомотопически эквивалентно точке).

**Доказательство:** Воспользуемся индукцией. Пусть Γ – дерево из $n+1$ вершин и $n$ ребер. Поскольку валентность каждой вершины $\geqslant 1$, а вершин больше, чем ребер, найдется вершина с валентностью 1 (проверьте это). Соответствующее ребро – висячее. Обозначим за $\Gamma'$ граф, полученный его выбрасыванием. У этого графа $n$ вершин и $n-1$ ребро, значит, это дерево. В силу предыдущей леммы, Γ гомотопически эквивалентно $\Gamma'$, а в силу предположения индукции, $\Gamma'$ стягиваемо. ■

**Определение 18.16.** Связный граф называется **деревом**, если любой его конечный, связный подграф является конечным деревом.

**Пример 18.17:** Пусть $\Gamma$ – граф, вершины которого – конечные последовательности натуральных чисел, а ребра соедниняют любую последовательность $A$ и $An$, где $An$ получено из $A$ добавлением $n$. Докажите, что $\Gamma$ – это дерево.

**Утверждение 18.18:** Пусть $\Gamma$ – дерево. Тогда $\Gamma$ односвязно.

**Доказательство. Шаг 0:** Отметим, что для любых двух точек $x, y$ в $\Gamma$, соединенных ребром $[x, y]$, такое ребро единственно. Действительно, иначе в $\Gamma$ был бы подграф с вершинами $x, y$ и двумя ребрами, соединяющими эти вершины, но такой граф имеет 2 вершины, 2 ребра, и не может быть деревом. Поэтому обозначение $[x, y]$ для соседних вершин $x, y$ однозначно задает ребро.

**Шаг 1:** Пусть $\gamma \in \Omega(\Gamma, m)$ – петля в $\Gamma$, а $v_1, v_2, v_3, ...$ – различные вершины графа, которые последовательно обходит $\gamma$. Пусть $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_2 < ... \leqslant 1$ – последовательность чисел таких, что $\gamma(v_i) = t_i$. Поскольку последовательность $\{t_i\}$ монотонна, она сходится к пределу $t$, но тогда

$$\gamma(\lim t_i) = \gamma(t) = \lim v_i,$$

в силу непрерывности $\gamma$. Это возможно, только если последовательность $v_i$ конечна.

**Шаг 2:** Легко видеть, что путь, идущий по дереву из вершины $x$ в вершину $y$, не заходя ни в какую другую вершину, гомотопен пути, идущему по ребру $[x, y]$. И в самом деле, пусть $\Gamma_{x,y}$ – граф, состоящий из всех ребер $\Gamma$ с концом в $x$ и в $y$. Поскольку $\Gamma$ это дерево, $\Gamma_{x,y}$ – тоже дерево, и все его ребра, кроме $[x, y]$, висячие. Поэтому $[x, y]$ – деформационный ретракт $\Gamma_{x,y}$. Взяв композицию $\gamma$ с ретракцией, получим путь, идущий по ребру $[x, y]$, и гомотопный $\gamma$.

**Шаг 3:** Мы получили, что любая петля по $\Gamma$ гомотопически эквивалентна петле, которая обходит вершины $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ по ребрам $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, ... Значит, любая петля гомотопна петле, которая обходит конечный подграф $\Gamma$. Но конечные, связные подграфы $\Gamma$ стягиваемы, значит, все такие петли тоже стягиваемы. ■

## 18.3. Унициклические графы

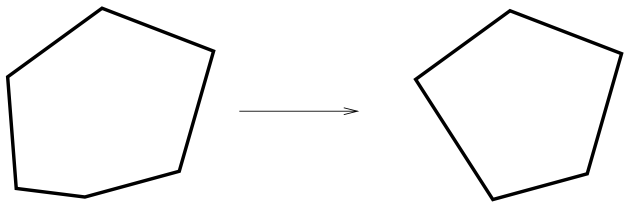
**Определение 18.19.** Конечный, связный граф $\Gamma$ называется **унициклическим**, если у него $n$ вершин и $n$ ребер.

**Замечание 18.20.** Пусть $\Gamma$ – связный граф без висячих вершин, имеющий $n$ ребер и $m$ вершин. Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, и к каждой вершине присоединяются как минимум два ребра, имеем $n \geqslant m$, причем равенство имеет место, только если все вершины $\Gamma$ имеют валентность 2.

Мы получили следующую лемму

**Лемма 18.21:** Пусть $\Gamma$ – конечный унициклический граф без висячих вершин. Тогда все вершины $\Gamma$ двухвалентные. Более того, $\Gamma$ гомеоморфен окружности.

**Доказательство:** Воспользуемся индукцией. Пусть $\Gamma$ – унициклический граф без висячих вершин, а $s$ – его вершина, к которой примыкают ребра $[x, s]$ и $[s, y]$. Легко видеть, что $\Gamma$ гомеоморфен графу, полученному из $\Gamma$ выкидыванием вершины $s$ и заменой ребер $[x, s]$ и $[s, y]$ на $[x, y]$ (см. картинку).



Унициклический граф без висячих ребер из $n$ ребер, $n$ вершин гомеоморфен унициклическому графу из $n-1$ ребер, $n-1$ вершин

Воспользовавшись индукцией, получим, что $\Gamma$ гомеоморфен унициклическому графу с одной вершиной и одним ребром, то есть окружности. ∎

**Следствие 18.22:** Пусть $\Gamma$ – конечный унициклический граф. Тогда $\Gamma$ гомотопически эквивалентентен окружности.

**Доказательство:** Пусть $\Gamma'$ получен из $\Gamma$ выкидыванием висячего ребра. Тогда $\Gamma'$ является деформационным ретрактом $\Gamma$, значит, гомотопически эквивалентен $\Gamma$. Будем выкидывать висячие ребра, пока они не кончатся, получим унициклический граф, гомеоморфный окружности. ■

**Замечание 18.23.** Аналогичный аргумент доказывает, что связный граф, у которого $n$ вершин и $n+k$ ребер, гомотопически эквивалентен букету $k+1$ окружностей.

**Утверждение 18.24:** Пусть $\Gamma_1$ – дерево, полученное из графа $\Gamma$ выкидыванием одного ребра. Предположим, что $\Gamma$ – не дерево. Тогда $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{Z}$.

**Доказательство:** Поскольку $\Gamma$ – не дерево, в $\Gamma$ содержится конечный подграф $\Gamma_1$, у которого $n$ вершин и $n+k$ ребер, $k \geqslant 0$. Поскольку выкидывание одного ребра $l$ превращает $\Gamma_1$ в дерево, $k = 0$, и граф $\Gamma_1$ – унициклический. Пусть $\Gamma\backslash l$, $\Gamma_1\backslash l$ – графы, полученные из $\Gamma$, $\Gamma_1$ выкидыванием $l$. Тогда $\Gamma$ получен объединением $\Gamma_1$ и $\Gamma\backslash l$, причем их пересечение $\Gamma_1\backslash l$ является деревом, следовательно, односвязно. Применив теорему Зейферта–ван Кампена, получим, что $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma_1) * \pi_1(\Gamma\backslash l)$. Поскольку $\Gamma\backslash l$ дерево, оно односвязно, значит, $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma_1) = \mathbb{Z}$. ■

**Определение 18.25.** Будем называть связный граф $\Gamma$ **унициклическим**, если $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{Z}$.

## 18.4. Фундаментальная группа графа

**Определение 18.26.** Пусть $\Gamma$ – связный граф. **Остовом** $\Gamma$ называют максимальный подграф $\Gamma' \subset \Gamma$, который является деревом.

**Замечание 18.27.** Слово **максимальный** в этом определении надо понимать так: при добавлении любого ребра из $\Gamma\backslash\Gamma'$ к $\Gamma'$, он перестает быть деревом. Применив лемму Цорна, легко убедиться, что у каждого графа есть остов (проверьте это).

**Теорема 18.28:** Пусть $\Gamma$ – связный граф. Тогда группа $\pi_1(\Gamma)$ свободна.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ – остов $\Gamma$, полученный из $\Gamma$ выкидыванием ребер $l_\alpha$, проиндексированными индексами $\alpha \in I$, а $\Gamma_{l_\alpha}$ – объединение $\Gamma'$ и $l_\alpha$. В силу Утверждения 18.24, $\pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \mathbb{Z}$.

**Шаг 2:** $\Gamma = \bigcup_{\alpha\in I}\Gamma_{l_\alpha}$, причем пересечение $\Gamma_{l_\alpha}\cap\Gamma_{l_{\alpha'}}$ для любых $\alpha\neq\alpha'$ равно $\Gamma'$, следовательно, односвязно. Применяя теорему Зейферта–ван Кампена, получаем

$$\pi_1(\Gamma) = \coprod_{\alpha\in I}\pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \coprod_{\alpha\in I}\mathbb{Z}.$$

■

**Замечание 18.29.** Поскольку конечный граф $\Gamma$ гомотопически эквивалентен букету сфер, свободность $\pi_1(\Gamma)$ для конечного графа немедленно следует из подсчета фундаментальной группы букера сфер, проведенного выше.

Из приведенного выше подсчета фундаментальной группы графа вытекает следующая важная теорема.

**Теорема 18.30:** (теорема Нильсена-Шрайера, "Nielsen-Schreier theorem") Пусть $F$ – свободная группа, а $G\subset F$ – ее подгруппа. Тогда $G$ свободна.

**Доказательство:** Группу $F$ можно получить как фундаментальную группу пространства $M$, гомеоморфного букету окружностей. Пусть $\tilde M$ – универсальное накрытие $M$, снабженное естественным действием $F$, а $M_G = \tilde M/G$ его фактор по $G$. Легко видеть, что $M_G$ это граф (проверьте это). Поскольку $\tilde M \longrightarrow M_G$ – универсальное накрытие, $\pi_1(M_G) = G$. Значит $G$ – фундаментальная группа графа, а такая группа свободна по предыдущей теореме. ■