Топология, лекция 17:

Свободные группы и теорема Зейферта–ван Кампена[3mm]

Миша Вербицкий

28 апреля, 2008

Независимый Университет

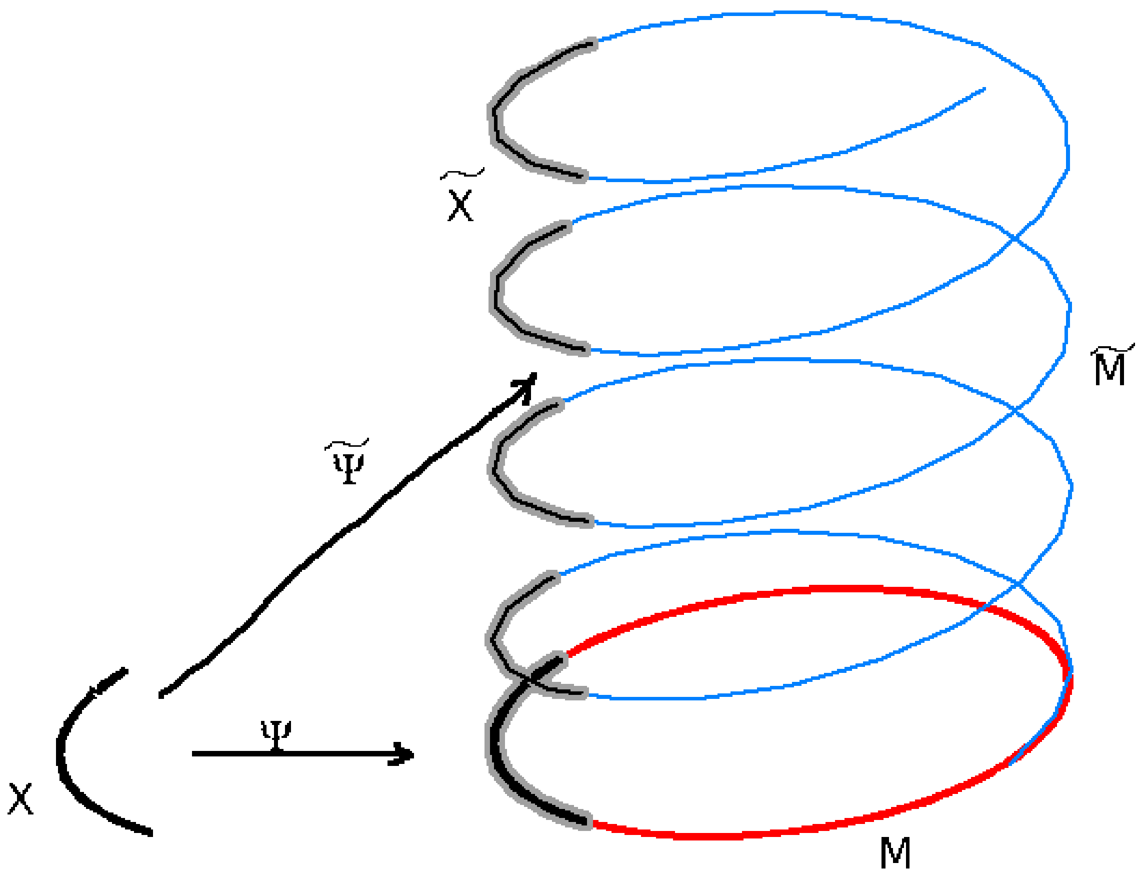
Универсальное накрытие (повторение)

Замечание: Накрытия пространства M образуют категорию. Объекты этой категории – накрытия, а морфизмы – отображения $\psi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}'$, коммутирующие с проекцией в M:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"] & \tilde{M}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Определение: Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие, причем M и $\tilde{M}$ связны, локально линейно связны, и $\tilde{M}$ односвязно, то есть имеет тривиальную фундаментальную группу. Тогда $[\tilde{M} : M]$ называется **универсальным накрытием**.

Замечание: Поскольку $\tilde{M}$ односвязно, любое накрытие $\tilde{M}' \xrightarrow{\pi} \tilde{M}$ расщепляется. Пусть $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ – любые точки, а γ – путь, который их соединяет. **Образ этого пути $\pi(\gamma)$ – петля в $\tilde{M}$, идущая из x в x,** но такая петля всегда стягиваема, поскольку $\pi_1(\tilde{M}, x) = 0$. Путь γ является поднятием петли $\pi(\gamma)$, и коль скоро $\pi(\gamma)$ стягиваема, γ – тоже петля. **Поэтому $y_1 = y_2$, и $\pi^{-1}(x)$ состоит из одного элемента.**



Поднятие отображения $X \xrightarrow{\psi} M$ на накрытие

Накрытие Галуа (повторение)

Определение: Пусть M_1, M_2 – топологические пространства, снабженные непрерывными отображениями ψ_1, ψ_2 в M. Напомним, что **расслоенным произведением** M_1 на M_2 над M называется подмножество $M_1 \times_M M_2$, состоящее из всех пар $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, таких, что $\psi_1(m_1) = \psi_2(m_2)$. Мы рассматриваем $M_1 \times_M M_2$ как подмножество в $M_1 \times M_2$, с индуцированной топологией.

Замечание: Обозначим за $\Psi: M_1 \times M_2 \longrightarrow M \times M$ отображение $\Psi(m_1, m_2) = (\psi_1(m_1), \psi_2(m_2))$. Легко видеть, что $M_1 \times_M M_2 = \Psi^{-1}(\Delta)$, где $\Delta \subset M \times M$ – диагональ. Поэтому, для M хаусдорфова, **расслоенное произведение – замкнутое подмножество в $M_1 \times M_2$.**

Определение: Произведение накрытий $\tilde M \times_M \tilde M$ – снова накрытие M. **Легко видеть, что проекция $\tilde M \times_M \tilde M$ на $\tilde M$ – тоже накрытие.** Напомним, что накрытие $[\tilde M : M]$ называется **накрытием Галуа**, если $\tilde M \times_M \tilde M$ расщепляется как накрытие $\tilde M$.

Замечание: Пусть $[\tilde M : M]$ – универсальное накрытие. **Тогда $\tilde M \times_M \tilde M$ расщепляется, и $\tilde M$ – накрытие Галуа.**

Группа Галуа накрытия (повторение)

Замечание: Пусть $[\tilde M : M]$ – универсальное накрытие. Поскольку $\tilde M$ локально связно, любое его накрытие локально связно. Локально связное пространство состоит из несвязного объединения своих компонент связности. **Поскольку все компоненты связности $\tilde M \times_M \tilde M$ являются связными накрытиями $\tilde M$, они ему изоморфны.**

Утверждение: Мы получили, что проекция каждой из компонент связности в $\tilde M \times_M \tilde M$ в $\tilde M$ – гомеоморфизм, что по первому аргументу, что по второму. **Следовательно, каждая из этих компонент является графиком автоморфизма накрытия $\tilde M$ над M.**

Доказательство: Пусть X – такая компонента, тогда проекции на первый и второй аргумент $\sigma_1, \sigma_2 : \ X \longrightarrow \tilde M$ это гомеоморфизм. **В этом случае, X – это график автоморфизма $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 : \ \tilde M \longrightarrow \tilde M$.**

Определение: Группа $\operatorname{Aut}[\tilde M : M]$ автоморфизмов накрытия $\tilde M$ над M называется **группой Галуа накрытия**.

Действие группы Галуа (повторение)

Замечание: Пусть $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ – накрытие Галуа. Мы только что получили, что **$\tilde{M} \times_M \tilde{M}$ – объединение графиков ν, для всех $\nu \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$.**

Следствие: Для каждого $m \in M$, и любой пары точек $x, y \in \pi^{-1}(m)$, найдется автоморфизм ν, графику которого Γ_ν принадлежит точка $(x, y) \in \tilde{M} \times_M \tilde{M}$. В силу того, что ν переводит $x \in \tilde{M}$ в $\sigma_2(\sigma_1^{-1}(x, y))$, имеем $\nu(x) = y$

Замечание: Мы получили, что **$G = \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ транзитивно действует на множестве $\pi^{-1}(m)$.** Поэтому $M = \tilde{M}/G$.

Пусть теперь $[\tilde{M} : M]$ – универсальное накрытие, а $g \in \mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ переводит $x \in \tilde{M}$ в $g(x)$. Рассмотрим путь γ, соединяющий x и $g(x)$. Такой путь – единственный, с точностью до гомотопии, поскольку $\tilde{M}$ односвязно. Поскольку $\mathsf{Aut}[\tilde{M} : M]$ действует на $\pi^{-1}(m)$ транзитивно, класс гомотопии $\pi(\gamma)$ в $\pi_1(M)$ определен однозначно. **Это задает гомоморфизм $G \longrightarrow \pi_1(M, \pi(x))$.**

Утверждение: Этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Группа Галуа фундаментального накрытия (повторение)

Теорема: Пусть $\tilde{M} \longrightarrow M$ – универсальное накрытие, причем M и $\tilde{M}$ связны, локально линейно связны, и $\tilde{M}$ односвязно. Рассмотрим группу Галуа этого накрытия, $G = Aut[\tilde{M} : M]$. **Тогда $M = \tilde{M}/G$, причем фундаментальная группа M изоморфна G.**

Пример: Мы немедленно получаем, что **фундаментальная группа окружности S^1 равна $\mathbb{Z}$.** Действительно, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, но $\pi_1(\mathbb{R}) = \{1\}$, так как $\mathbb{R}$ стягиваемо. Аналогичный аргумент показывает, что $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$, где $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ – n-мерный тор.

Пример: Пусть G – группа верхнетреугольных матриц, а $G_{\mathbb{Z}}$ – группа верхнетреугольных матриц с целочисленными коэффициентами. Тогда $\pi_1(G/G_{\mathbb{Z}}) \cong G_{\mathbb{Z}}$.

Пример: $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$.

Категория множеств с действием группы

Определение: Пусть G – группа, а $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ – категория, объекты которой – множества с действием G, а морфизмы – отображения множеств, совместимые с действием G. Эта категория называется **категорией множеств с действием G**.

Конструкция функтора $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$.
Предположим, что $G = Aut[\tilde{M} : M]$, где $[\tilde{M} : M]$ – универсальное накрытие M. Для каждого множества S с действием G, рассмотрим произведение $\tilde{M} \times S$, где G действует по формуле $g(m, s) = (g(m), g(s))$. Взяв дискретную топологию на S, можно считать, что $\tilde{M} \times S$ – топологическое пространство, а $(\tilde{M} \times S)/G$ снабжено топологией фактора.

Утверждение: Это задает функтор $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ в категорию $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий .

Категория накрытий

Теорема: $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ **это эквивалентность категорий.**

Доказательство: Возьмем точку $m \in M$. Пусть $M' \xrightarrow{\sigma} M$ – накрытие M, а $S_{M'} := \sigma^{-1}(m)$ – его слой над m. Пусть $x \in S_{M'}$ – любая точка, а $g \in G$ – элемент фундаментальной группы. Возьмем петлю $\gamma_g \in \Omega(M, m)$, представляющую g, и пусть $\tilde{\gamma}_g$ – ее поднятие в m', с начальной точкой в x. Поскольку конечная точка $\tilde{\gamma}_g(1)$ однозначно определяется x и g, отображение $g, x \longrightarrow \gamma_g(1)$ корректно определено. **Таким образом задается действие G на $S_{M'}$.**

Полученное соответствие $M' \longrightarrow S_{M'}$ задает функтор из $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ в $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, обратный Ψ.

Докажем это.

Шаг 1: Композиция $\Psi \circ \Phi$ переводит множество с действием G в то же самое множество, что ясно из определения.

Категория накрытий (продолжение)

Шаг 2: Чтобы убедиться, что композиция $\Phi \circ \Psi$ переводит накрытие в эквивалентное ему, **достаточно проверить это на связных накрытиях.** Связные накрытия имеют вид $\tilde{M}/G'$, для подгрупп $G' \subset G$ ("основная теорема теории Галуа для накрытий").

Шаг 3: Применение функтора Φ к M/G' дает множество $\Phi(\tilde{M}/G') = G/G'$, а $\Psi(G/G') = (\tilde{M} \times G/G')/G = \tilde{M}/G'$.

Значит, функтор $\Phi \circ \Psi$ эквивалентен тождественному. Мы доказали, что категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, $Cov(M)$ эквивалентны.

Замечание. Каждое накрытие изоморфно факторнакрытию несвязной суммы нескольких копий универсального: $M' = \coprod_i \tilde{M}/G_i$

В соответствие такому накрытию можно поставить множество $S = \coprod_i G/G_i$ с естественным действием G. Это задает эквивалентность $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \longrightarrow \mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ чуть более явно.

Как восстановить фундаментальную группу по категории накрытий

Утверждение.
Пусть G – группа, а $\mathcal{R}\text{ep}(G, \mathcal{S}\text{ets})$ – категория множеств с действием G. Рассмотрим G как объект $\mathcal{R}\text{ep}(G, \mathcal{S}\text{ets})$, то есть множество с действием G, определенным формулой $(g, x) \longrightarrow gx$. **Тогда все морфизмы из G в себя обратимы, и группа $\text{Aut}(G) = \mathcal{M}\text{or}(G, G)$ изоморфна G.**

Доказательство:
Пусть $\nu_x \in \mathcal{M}\text{or}(G, G)$ переводит 1 в x. Тогда $\nu_x(g1) = g(\nu_x(1)) = gx$. **Такой морфизм, очевидно, биективен, а композиция $\nu_x\nu_y$ равна ν_{xy}.**

Теорема.
Группа G однозначно восстанавливается по категории $\mathcal{R}\text{ep}(G, \mathcal{S}\text{ets})$: если категории $\mathcal{R}\text{ep}(G_1, \mathcal{S}\text{ets})$, $\mathcal{R}\text{ep}(G_2, \mathcal{S}\text{ets})$ эквивалентны, то группы G_1, G_2 изоморфны.

Как восстановить фундаментальную группу по категории накрытий (продолжение)

Лемма.
Пусть $\bar{G} \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}))$ – объект $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$, который обладает следующими свойствами.

1. Все морфизмы из $\bar{G}$ в себя являются изоморфизмами.

2. Для любого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets}))$, множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(\bar{G}, X)$ непусто.

Тогда $\bar{G}$ изоморфен G как объект $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$.

Замечание: Из этой леммы сразу следует, что группу G можно однозначно восстановить по категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$.

Доказательство леммы.
Шаг 1: Все объекты $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ получены объединением непересекающихся орбит действия G. Каждая такая орбита имеет вид G/G', где G' – стабилизатор точки. **Нетривиальные морфизмы между орбитами G/G_1 и G/G_2 возможны, только если $G_2 \supset G_1$.**

Как восстановить фундаментальную группу по категории накрытий (доказательство леммы)

Шаг 2: Поскольку $\mathcal{M}\mathrm{or}(\bar{G}, X)$ всегда непусто, **$\bar{G}$ – объединение орбит вида G/G_i, среди которых хотя бы одна изоморфна G.**

Шаг 3: Пусть $\bar{G}$ содержит две орбиты X_1, X_2, причем X_1 изоморфна G. Рассмотрим морфизм из $\bar{G}$ в себя, тождественный на всех орбитах, кроме X_1, и отображающий X_1 в $X_2 = G/G'$ (такой морфизм существует в силу Шага 1). Такой морфизм не биективен, значит, он не может быть изоморфизмом.

Шаг 4: Мы получили, что $\bar{G}$ состоит из одной орбиты (шаг 3), причем эта орбита изоморфна G (шаг 2). Это доказывает, что $\bar{G}$ изоморфно G.

Свободное произведение групп

Пусть $\{G_\alpha\} = \{G_1, G_2, ...\}$ – набор групп. Рассмотрим множество, состоящее из последовательностей (слов) вида $g_1 g_2 g_3 ... g_n$, составленных из букв $g_i \in G_\alpha$.

Пусть $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ получено из этого множества факторизацией по соотношениям вида

$$g_1 g_2 \cdots g_i g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_n \sim g_1 g_2 \cdots g_i g_{i+2} \cdots g_n$$

если $g_{i+1} = 1$
(можно выкинуть из слова букву g_{i+1}, если g_{i+1} равно 1), и

$$g_1 g_2 \cdots g_{i-1} g_i g_{i+1} g_{i+2} \cdots g_n \sim g_1 g_2 \cdots g_{i-1} (g_i g_{i+1}) g_{i+2} \cdots g_n$$

если $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ **(можно сгруппировать последовательно идущие буквы g_i, g_{i+1} в $(g_i g_{i+1})$, если они обе принадлежат одной и той же группе G_α).**

Свободная группа

Элементы $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ можно умножать: $g_1 g_2 ... g_n \cdot g'_1 g'_2 ... g'_{n'} := g_1 g_2 ... g_n g'_1 g'_2 ... g'_{n'}$.
Такое умножение, очевидно, ассоциативно.

Легко видеть, что $g_1 g_2 ... g_n g_n^{-1} ... g_2^{-1} g_1^{-1} = 1$.
Значит, $G_1 * G_2 * G_3 * ...$ это группа.

Определение: Группа $\coprod_\alpha G_\alpha = G_1 * G_2 * G_3 * ...$ называется **свободным произведением**, или же **амальгамой**, или же **копроизведением** групп $\{G_\alpha\} = \{G_1, G_2, ...\}$

Замечание: Легко видеть, что естественное отображение любого сомножителя в свободное произведение, $G_0 \longrightarrow \coprod_\alpha G_\alpha$, $g_0 \longrightarrow g_0$ является вложением.

Определение: Копроизведение $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * ... * \mathbb{Z}$ (n раз) называется **свободной группой от n образующих**. Копроизведение вида $\coprod_\alpha G_\alpha$, где все $G_\alpha \cong \mathbb{Z}$, называется **свободной группой**.

Универсальное свойство свободного произведения

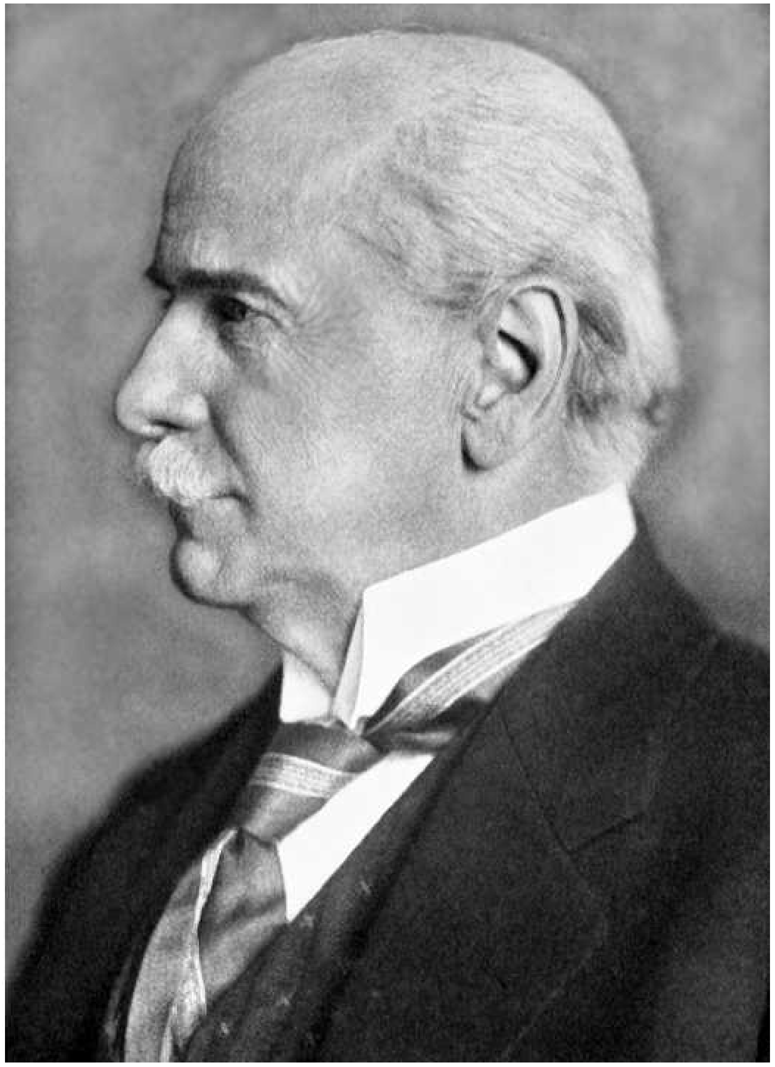
Универсальное свойство свободного произведения: Пусть G, H – группы, $G*H$ их свободное произведение, а $G \overset{\iota}{\hookrightarrow} G*H$, $H \overset{\iota}{\hookrightarrow} G*H$ – естественные вложения. **Тогда каждая пара гомоморфизмов $G \xrightarrow{\varphi} P$, $H \xrightarrow{\psi} P$ в группу P продолжается до гомоморфизма $G*H \xrightarrow{\varphi*\psi} P$ таким образом, что следующая диаграмма коммутативна:**

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "\varphi"'] & & H \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\
& G*H \arrow[d, "\varphi*\psi"] & \\
& P &
\end{tikzcd}$$

Более того, гомоморфизм $\varphi*\psi$ определяется отображениями ψ и ψ однозначно.

Доказательство: $\varphi*\psi(g_1h_1g_2h_2...g_nh_n) = \varphi(g_1)\psi(h_1)\varphi(g_2)\psi(h_2)...\varphi(g_n)\psi(h_n)$.

Замечание: Универсальное свойство свободного произведения можно взять в качестве определения $G*H$.



Walther Franz Anton von Dyck
(1856-1934)

Теорема Зейферта–ван Кампена

Теорема Зейферта–ван Кампена.
Пусть $M = X \cup Y$ – объединение топологических пространств X и Y, причем X, Y локально связные, локально односвязные, замкнутые в M и связные, а $X \cap Y$ связно и односвязно. Тогда $\pi_1(M)$ изоморфно свободному произведению $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

Доказательство. Шаг 1: Категория $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G * H, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств, на которых задано действие G и H (априори, никак не согласованное). Функтор из $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G * H, \mathcal{S}\mathrm{ets})$ в $\mathcal{C}$ переводит S в то же самое множество S, где действие G и H определяется из вложений $G \hookrightarrow G * H$, $H \hookrightarrow G * H$. Обратный функтор определяется из того, что для каждого множества I с действием G и H заданы гомоморфизмы $G, H \longrightarrow \Sigma_I$, где Σ_I – группа биективных отображений из I в I. В силу универсального свойства $G * H$, такие гомоморфизмы однозначно продолжаются до гомоморфизма $G * H \longrightarrow \Sigma_I$.

Теорема Зейферта–ван Кампена (продолжение)

Шаг 2: Группа G однозначно задается своей категорией $\mathcal{R}\mathrm{ep}(G, \mathcal{S}\mathrm{ets})$. Поэтому для изоморфизма $\pi_1(M) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, достаточно убедиться, что категория накрытий M эквивалентна $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. В силу предыдущего шага, эта категория эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. **Таким образом, теорема Зейферта–ван Кампена будет доказана, если мы докажем, что категория $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий M эквивалентна $\mathcal{C}$.**

Шаг 3: Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\sigma} M$ – накрытие M. Соответствующие накрытия $\tilde{X} = \sigma^{-1}(X) \longrightarrow X$, $\tilde{Y} = \sigma^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ называются **ограничениями $\tilde{M}$ на X и Y**. Для каждой точки $m \in X \cap Y$, прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \tilde{X}$ наделен действием $\pi_1(X)$ Прообраз $\sigma^{-1}(m) \subset \tilde{Y}$ наделен действием $\pi_1(Y)$, по той же самой причине. **Мы получили, что $\tilde{M} \longrightarrow \sigma^{-1}(m)$ задает функтор $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}$.** Осталось доказать, что это эквивалентность.

Теорема Зейферта–ван Кампена (окончание)

Шаг 4: Пусть $S \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ – множество с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$, а $\tilde X \xrightarrow{\sigma_X} X$, $\tilde Y \xrightarrow{\sigma_Y} Y$ – соответствующие накрытия. Поскольку $X \cap Y$ связно, локально связно и односвязно,

$$\sigma_X^{-1}(X\cap Y) = \sigma_Y^{-1}(X\cap Y) = X\cap Y \times S,$$

где S – множество связных компонент $\tilde S$. Пусть $x \in \tilde X, y \in \tilde Y$, причем $x \in \sigma_X^{-1}(X\cap Y)$ равен $y \in \sigma_Y^{-1}(X\cap Y)$ при этом отождествлении. В таком случае мы напишем $x \sim y$. Пусть $\tilde M = \tilde X \coprod \tilde Y / \sim$ – фактор по отношению эквивалентности, определенному таким способом. Прообраз $\sigma^{-1}(U)$ по построению гомеоморфен $U \times S$, если σ_X, σ_Y расщепляется над $U \cap X$, $U \cap Y$. **Поэтому $\tilde M$ – накрытие. Мы построили функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$, который обратен $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}$.**

Мы доказали, что категория $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ накрытий M эквивалентна категории $\mathcal{C}$ множеств с действием $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. На шаге 1 было доказано, что $\mathcal{C}$ эквивалентна категории $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(X) * \pi_1(Y), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. С другой стороны, $\mathcal{C}\mathrm{ov}(M)$ эквивалентна $\mathcal{R}\mathrm{ep}(\pi_1(M), \mathcal{S}\mathrm{ets})$. **Значит, группы $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ и $\pi_1(M)$ изоморфны.**

Теорема Зейферта–ван Кампена (обобщение)

Замечание.
В аналогичных предположениях, если $M = \bigcup M_i$, причем все частичные пересечения $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap ...$ односвязны, имеем $\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2) * ...$ Это доказывается точно так же.

Egbert Rudolf van Kampen
(1908-1942)

Топология, лекция 18: Фундаментальная группа графа и теорема Нильсена-Шрайера

Миша Вербицкий

28 апреля, 2008

Независимый Университет

Топологическое пространство графа

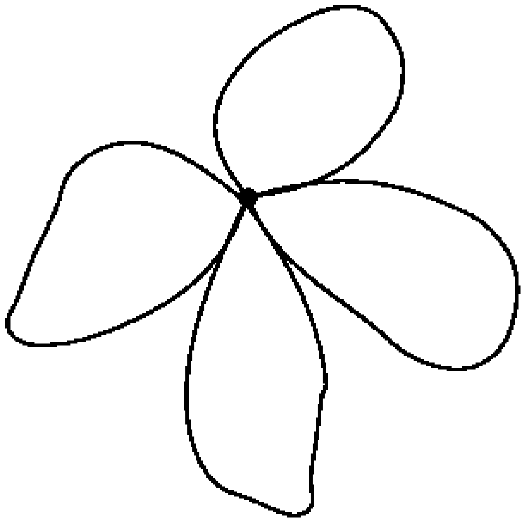
Определение: **Графом** называется набор вершин и набор ребер, причем каждому ребру соответствует две вершины (возможно, одинаковые), которые называются его **концами**, или **концом и началом**, причем каждая вершина является концом хотя бы одного из ребер. Если двум ребрам соответствует одна и та же вершина, эти ребра называются **смежными**, а вершина – **общей вершиной** ребер. Граф называется **конечным**, если число его ребер и вершин конечно.

Замечание: С каждым графом ассоциировано топологическое пространство: набор отрезков, соединяющих набор отмеченных точек – вершин.

Определение: Пусть Γ – граф, а S – множество его ребер. Рассмотрим S как пространство с дискретной топологией, и пусть $X := S \times [0, 1]$ – несвязное объединение S копий отрезка. В этом случае $x = s \times \{1\}$ или $x = s \times \{0\}$ – точки X, соответствующая началу или концу отрезка. Если у ребра s_1 и у ребра s_2 имеется общий конец, напишем $x_1 \sim x_2$, где $x_i = s_i \times \{1\}$ или $x_i = s_i \times \{1\}$ соответствующие точки X. **Топологическим пространством графа** называется факторпространство $X/\sim$ по такому соотношению эквивалентности.

Букет окружностей

Определение: Пусть Γ – связный граф, у которого есть всего одна вершина и $|I|$ ребер. Его топологическое пространство называется **букетом $|I|$ окружностей**. Оно имеет вид ромашки сделанной из нескольких (возможно, бесконечного числа) окружностей.



Букет четырех окружностей

Из теоремы Зейферта–ван Кампена немедленно получаем

Теорема: Фундаментальная группа букета окружностей свободна.

Гомотопическая эквивалентность и ретракты

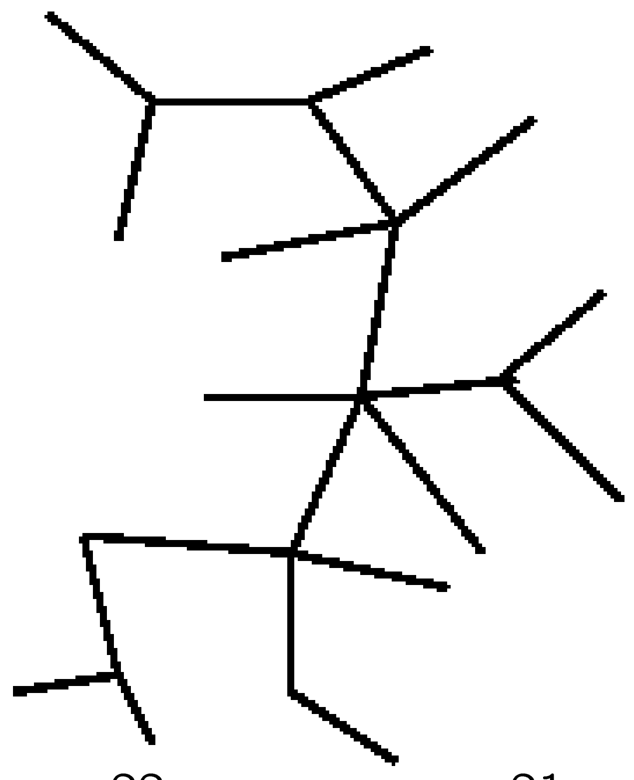
Определение: Напомним, что топологическое пространство X называется **деформационным ретрактом** $Y \supset X$, если задано непрерывное отображение $Y \xrightarrow{j} X$, тождественное на $X \subset Y$, причем j гомотопно тождественному отображению Id_Y из Y в себя.

Определение: Напомним, что топологические пространства X и Y называются **гомотопически эквивалентными**, если заданы непрерывные отображения $X \xrightarrow{\varphi} Y$ и $Y \xrightarrow{\psi} X$, причем композиции $\psi \circ \varphi$ и $\varphi \circ \psi$ гомотопны тождественным.

Замечание: Любое пространство гомотопически эквивалентно своему деформационному ретракту, а фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Конечные деревья

Определение: Граф называется **связным**, если его топологическое пространство связно. Конечный связный граф называется **конечным деревом**, если у него n вершин и $n-1$ ребер.



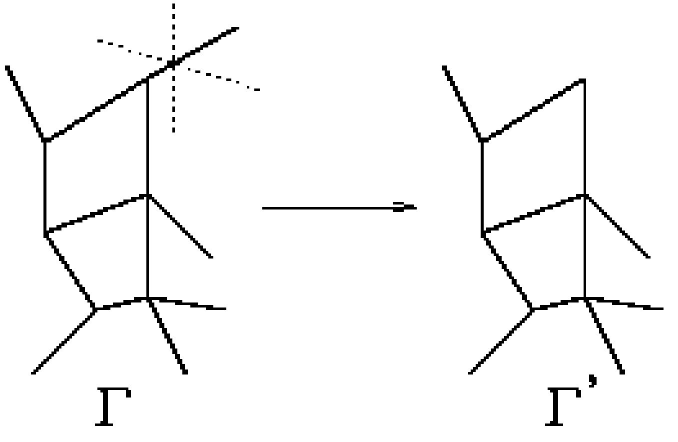
Дерево с 22 вершинами и 21 ребром

Подграфы

Определение: Пусть Γ – граф, а Γ' – граф, множества ребер и вершин которого являются подмножествами в множестве ребер и вершин Γ, причем концы сответсвующих ребер в Γ и Γ' те же. Тогда Γ' называется **подграфом** Γ.

Определение: **Валентность** вершины графа – количество ребер, которые с ней соединены. Вершина валентности 1 вместе с ее ребром называется **висячей**.

Лемма: Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ – подграф, полученный из Γ выбрасыванием висячего ребра l и одной вершины. **Тогда Γ' является деформационным ретрактом Γ.**



Выбрасывание висячего ребра

Доказательство: Пусть s – второй (невыкинутый) конец ребра l. Рассмотрим отображение $\psi: \Gamma \longrightarrow \Gamma'$, переводящее l в s, и тождественное на Γ'. Пусть ψ_t действует тождественно на Γ', и переводит $\lambda \in [0,1] = l$ в $t\lambda \in l$. **Легко видеть, что ψ_t непрерывно, $\psi_0 = \psi$, а $\psi_1 = \mathrm{Id}_\Gamma$.** Поэтому Γ' – деформационный ретракт.

Утверждение: **Конечное дерево стягиваемо**
(т.е. гомотопически эквивалентно точке).

Доказательство: Поскольку валентность каждой вершины $\geqslant 1$, а вершин больше, чем ребер, найдется вершина с валентностью 1. Выкинем ее, получим дерево, гомотопически эквивалентное исходному, воспользуемся индукцией.

Деревья

Определение: Связный граф называется **деревом**, если любой его конечный, связный подграф является конечным деревом.

Утверждение: Пусть Γ – дерево. Тогда Γ односвязно.

Доказательство. Шаг 1: Путь, идущий по дереву из вершины x в вершину y, не заходя ни в какую другую вершину, гомотопен пути, идущему по ребру $[x, y]$. В самом деле, пусть $\Gamma_{x,y}$ – граф, состоящий из всех ребер Γ с концом в x и в y. Поскольку Γ это дерево, $\Gamma_{x,y}$ – тоже дерево, и все его ребра, кроме $[x, y]$, висячие. Поэтому $[x, y]$ – деформационный ретракт $\Gamma_{x,y}$. Взяв композицию γ с ретракцией, получим путь, идущий по ребру $[x, y]$, и гомотопный γ.

Шаг 2: Мы получили, что любая петля в Γ гомотопически эквивалентна петле, которая обходит вершин $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ по ребрам $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, ... **Значит, любая петля гомотопна петле, которая обходит конечный подграф $\Gamma' \subset \Gamma$. Но конечные, связные подграфы Γ стягиваемы, значит, все такие петли тоже стягиваемы.**

Конечные унициклические графы

Определение: Конечный, связный граф называется **унициклическим**, если у него n вершин и n ребер.

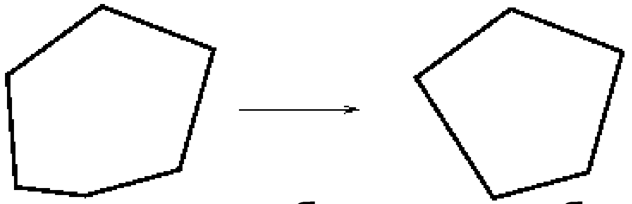
Замечание: Пусть Γ – связный граф без висячих вершин, имеющий n ребер и m вершин. Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, и к каждой вершине присоединяются как минимум два ребра, имеем $n \geqslant m$, причем равенство имеет место, только если все вершины Γ имеют валентность 2.

Следствие: Пусть Γ – конечный унициклический граф без висячих вершин. Тогда все вершины Γ двухвалентные. Более того, **Γ гомеоморфен окружности.**

Доказательство: Пусть s – вершина, к которой примыкают ребра $[x, s]$ и $[s, y]$. **Легко видеть, что Γ гомеоморфен графу, полученному из Γ выкидыванием вершины s и заменой ребер $[x, s]$ и $[s, y]$ на $[x, y]$.**

Воспользовавшись индукцией, получим, что Γ гомеоморфен унициклическому графу с одной вершиной и одним ребром, то есть окружности.

Конечные унициклические графы (продолжение)



Унициклический граф без висячих ребер из n ребер, n вершин гомеоморфен унициклическому графу из $n-1$ ребер, $n-1$ вершин

Следствие: **Пусть Γ – конечный унициклический граф. Тогда Γ гомотопически эквивалентентен окружности.**

Доказательство: Пусть Γ' получен из Γ выкидыванием висячего ребра. Тогда Γ' является деформационным ретрактом Γ, значит, гомотопический эквивалентен Γ. Будем выкидывать висячие ребра, пока они не кончатся, получим унициклический граф без висячих ребер, гомеоморфный окружности.

Замечание: Аналогичный аргумент доказывает, что **любой связный граф, у которого n вершин и $n+k$ ребер, гомотопически эквивалентен букету $k+1$ окружностей.** В частности, фундаментальная группа конечного графа всегда свободна.

Бесконечные унициклические графы

Утверждение: Пусть Γ_1 – дерево, полученное из графа Γ выкидыванием одного ребра. Предположим, что Γ – не дерево. **Тогда $\pi_1(\Gamma) = \mathbb{Z}$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку Γ – не дерево, в Γ содержится конечный подграф Γ_1, у которого n вершин и $n+k$ ребер, $k \geqslant 0$. Поскольку выкидывание одного ребра l превращает Γ_1 в дерево, $k = 0$, и **граф Γ_1 – унициклический.**

Шаг 2: Пусть $\Gamma\backslash l$, $\Gamma_1\backslash l$ – графы, полученные из Γ, Γ_1 выкидыванием l. Тогда Γ получен объединением Γ_1 и $\Gamma\backslash l$, причем их пересечение $\Gamma_1\backslash l$ является деревом, следовательно, односвязно.

Применив теорему Зейферта–ван Кампена, получим, что $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma_1) * \pi_1(\Gamma\backslash l)$.

Шаг 3: Поскольку $\Gamma\backslash l$ дерево, оно односвязно, значит, $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Gamma_1) = \mathbb{Z}$.

Остов графа

Определение: Пусть Γ – связный граф. **Остовом** Γ называют максимальный подграф $\Gamma' \subset \Gamma$, который является деревом.

Замечание: Слово **максимальный** в этом определении надо понимать так: при добавлении любого ребра к Γ', он перестает быть деревом. Применив лемму Цорна, **легко убедиться, что у каждого графа есть остов.**

Теорема: Пусть Γ – связный граф. **Тогда группа $\pi_1(\Gamma)$ свободна.**

Доказательство.
Шаг 1: Пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ – остов Γ, полученный из Γ выкидыванием ребер l_α, $\alpha \in I$, а Γ_{l_α} – объединение Γ' и l_α. **Тогда $\pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \mathbb{Z}$.**

Шаг 2:Применяя теорему Зейферта–ван Кампена, получаем

$$\pi_1(\Gamma) = \coprod_{\alpha\in I} \pi_1(\Gamma_{l_\alpha}) = \coprod_{\alpha\in I} \mathbb{Z}.$$

Теорема Нильсена-Шрайера

Теорема Нильсена-Шрайера: **Пусть F – свободная группа, а $G \subset F$ – ее подгруппа. Тогда G свободна.**

Доказательство: Группу F можно получить как фундаментальную группу пространства M, гомеоморфного букету окружностей. Пусть $\tilde{M}$ – универсальное накрытие M, снабженное естественным действием F, а $M_G = \tilde{M}/G$ – его фактор по G. Легко видеть, что M_G это граф (проверьте это). Поскольку $\tilde{M} \longrightarrow M_G$ – универсальное накрытие, $\pi_1(M_G) = G$. **Значит G – фундаментальная группа графа, а такая группа свободна.**