3. Топология, лекция 3: Компакты в метрических пространствах

3.1. Теорема Гейне-Бореля

Пусть M – метрическое пространство. Напомним, что открытое подмножество M –это объединение любого числа открытых шаров. Ясно, что объединение любого числа открытых подмножеств открыто.

Определение 3.1. Набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в M называется **покрытием** M, если $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. **Подпокрытием** покрытия $\{U_\alpha\}$ называется такое подмножество $\{U_\alpha\}$, которое тоже является покрытием.

Определение 3.2. Пространство M называется **компактным**, если из любого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение 3.3. Пространство M называется **секвенциально компактным**, если любая последовательность точек $\{x_i\}$ в M имеет сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 3.4: (Теорема Гейне-Бореля)
Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Доказательство
Вывести из обычной компактности секвенциальную ничего не стоит. Напомним, что **окрестностью** точки $x \in M$ называется любое открытое множество, содержащее x. Точка x является предельной точкой последовательности $\{x_i\}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности x содержится элемент $\{x_i\}$. Пусть $\{x_i\}$ - последовательность, не имеющая предельных точек.

Для каждого $x \notin \{x_i\}$, некоторая окрестность x не содержит элементов $\{x_i\}$. Объединение U всех таких окрестностей открыто, и совпадает с дополнением $M\backslash\{x_i\}$. Взяв у каждого x_i окрестность U_i, которая не содержит других элементов $\{x_i\}$, получим покрытие $\{U, U_i\}$, которое не содержит конечного подпокрытия.

Доказательство импликации[1]

$$\text{(секвекциальная компактность)} \Rightarrow \text{(обычная компактность)}$$

более трудоемко.

Лемма 3.5: Пусть M - секвенциально компактное метрическое пространство, а $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. Тогда супремум и инфимум f на M конечен. Более того, есть точки x, y такие, что

$$f(x) = \sup_{z \in M} f(z), \qquad f(y) = \inf_{z \in M} f(z).$$

Доказательство: Пусть $\{x_i\}$ последовательность точек таких, что

$$\lim f(x_i) = \sup_{z \in M} f(z).$$

Из секвенциальной компактности следует, что $\{x_i\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_i'\}$. Обозначим ее предел за x. Поскольку f непрерывно, f сохраняет пределы последовательностей, и поэтому $\lim f(x_i') = f(x)$. Мы доказали, что $f(x) = \sup_{z \in M} f(z)$. Доказательство для инфимума аналогично. ■

В метрической геометрии весьма полезно следующее понятие.

Определение 3.6. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f: \ M_1 \longrightarrow M_2$ называется C**-липшицевым** (C-Lipshitz map) если для любых $x, y \in M_1$, имеет место неравенство

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Функция $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется C**-липшицевой**, если она C-липшицева как отображение из M в $\mathbb{R}$ с обычной метрикой. Отображения, которые являются липшицевыми для какой-то константы C, называюстя **липшицевыми**, или **непрерывными по Липшицу** (Lipschitz continuous).

Липшицевы отображения называются липшицевыми в честь немецкого математика Рудольфа Липшица, ученика Дирихле. Легко видеть, что они непрерывны (докажите).

[1]Заключение вида "из утверждения A следует утверждение B" называется импликацией.

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(1832 – 1903)

Расстояние $d_z(x) := d(z,x)$ до фиксированной точки $z \in M$ является одним из примеров липшицевой функции. Действительно, $|d_z(x) - d_z(y)| \leqslant d(x,y)$, что следует из неравенства треугольника (докажите это).

Другим примером C-липшицевой функции является дифференцируемая функция $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$, с $|f'| \leqslant C$ (докажите).

Напомним, что $B_\rho(x)$ обозначает открытый шар радиуса ρ с центром в x.

Лемма 3.7: Пусть M - метрическое пространство, а $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ его покрытие. Рассмотрим функцию

$$\rho_{\mathcal{U}}(x) := \sup_\rho \{\rho \in \mathbb{R} \ \mid \ B_\rho(x) \ \text{ содержится}$$
$$\text{в одном из элементов покрытия } \mathcal{U}\}.$$

Тогда $\rho_{\mathcal{U}}$ 1-липшицева.

Доказательство: Пусть $y \in M$ - точка, отстоящая от x на ε, а $\rho_{\mathcal{U}}(x) > \rho_0$. В этом случае, открытый шар $B_{\rho_0}(x)$ целиком содержится в одном из элементов покрытия $\mathcal{U}$. Из неравенства треугольника следует, что $B_{\rho_0 - \varepsilon}(y) \subset B_{\rho_0}(x)$ (докажите). Поэтому

$$\rho_{\mathcal{U}}(y) \geqslant \rho_{\mathcal{U}}(x) - d(x, y)$$

Выписывая аналогичное неравенство для пары (y, x), получаем

$$d(x, y) \geqslant |\rho_{\mathcal{U}}(y) - \rho_{\mathcal{U}}(x)|.$$

■

Следующее понятие также чрезвычайно полезно.

Определение 3.8. **ε-сетью** в метрическом пространстве M называется такое подмножество $V \subset M$, что M лежит в объединении всех ε-шаров с центрами в V. ε-сеть называется **конечной**, если V конечно.

Легко убедиться, что в секвенциальном компакте есть конечная ε-сеть, для каждого $\varepsilon > 0$. Действительно, если такой сети нет, найдется бесконечная последовательность точек $\{x_i\}$ таких, что никакой x_i не лежит в объединении ε-шаров с центрами во всех предыдущих. Но такая последовательность не может содержать сходящейся подпоследовательности, потому что $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$.

Вернемся к доказательству теоремы Гейне-Бореля.

Пусть M - секвенциально компактное метрическое пространство, а $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ некоторое покрытие. Для доказательства Гейне-Бореля, нужно показать, что $\mathcal{U}$ конечно.

Рассмотрим функцию $\rho_{\mathcal{U}}: M \longrightarrow \mathbb{R}$, определенную выше. Поскольку непрерывная функция на секвенциальном компакте принимает минимум, а $\rho_{\mathcal{U}}$ во всех точках положительна, имеем $\rho_{\mathcal{U}} \geqslant \rho_{\min} > 0$. Это значит, что для каждой точки $x \in M$, $\rho_{\min}$-шар с центром в x содержится в одном из элементов покрытия $\mathcal{U}$.

Возьмем в M конечную $\rho_{\min}$-сеть V и пусть $\{B_i\}$ - шары с центрами в точках V, радиуса $\rho_{\min}$. По определению $\rho_{\min}$, каждый из этих шаров содержится в некотором элементе U_i покрытия $\mathcal{U}$. Мы получаем

$$M = \bigcup B_i \subset \bigcup U_i,$$

а значит, $\{U_i\}$ – конечное подпокрытие $\mathcal{U}$. Мы доказали теорему Гейне-Бореля. ■

Исторически, теорему Гейне-Бореля формулировали так: “каждое замкнутое, ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ компактно”. Обобщение ее на метрические пространства принадлежит, вероятно, Александрову и Урысону, определившим компактные пространства (они называли их “бикомпактные”) в терминах покрытий и подпокрытий.

Émile Borel
(1871 – 1956)

Самое раннее доказательство теоремы Гейне-Бореля принадлежит Дирихле (1862), для подмножеств прямой $\mathbb{R}$. Ученик Дирихле Генрих Эдуард Гейне (Heinrich Eduard Heine, 1821-1881) опубликовал доказательство (для подмножеств прямой) в 1872-м году. В 1895-м году Эмиль Борель доказал, что любое *счетное* покрытие замкнутого, ограниченного подмножества $\mathbb{R}^n$ имеет конечное подпокрытие. Для несчетных покрытий, доказательство было получено пятью годами позже Шенфлисом (Arthur Moritz Schönflies, 1900) и Лебегом (1898, опубликовано в 1904). Во франкоязычной литературе теорему Гейне-Бореля называют “теорема Бореля-Лебега” (Théorème de Borel-Lebesgue).

3.2. Историческое отступление: работы Хаусдорфа

Метрические пространства были изобретены Фреше в 1906-м году для изучения топологических свойств пространств функций, но на эвристическом уровне понятия топологического пространства и непрерывности встречались еще у Римана. Риман и Фреше понимали, что к пространствам функций можно применять те же геометрические приемы, что и к геометрическим объектам. Фреше надеялся, что теория метрических пространств станет удобным фундаментом для объединения геометрии и теории функций. В работах Банаха по функциональному анализу эта надежда вполне оправдалась, но в геометрии понятие метрического пространства было не слишком употребительно вплоть до 1980-х.

В конце XIX века, топологическую природу подмножеств прямой изучал Кантор. Ему принадлежат понятия замкнутого и открытого множества, и ряд полезных классификационных теорем.

В 1914-м году Феликс Хаусдорф опубликовал книгу "Grundzüge der Mengenlehre" (Основы теории множеств). Развивая достижения Фреше и Рисса, Хаусдорф определил понятие топологического пространства, набором чрезвычайно простых и удобных аксиом, подчерпнутых в аксиоматике Гильберта, придуманной тем для евклидовой геометрии взамен недостаточно строгой аксиоматики Евклида.

Напомним, что 2^M обозначает множество всех подмножеств в M.

Определение 3.9. Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Мы говорим, что $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

(i) Любое объединение открытых подмножеств открыто

(ii) Конечное пересечение открытых подмножеств открыто

(iii) M и пустое множество $\emptyset$ открыты.

В такой ситуации M называется **топологическим пространством**.

Оказалось, что этой простой формальной структуры вполне достаточно для определения ключевых понятий топологии множеств: непрерывного отображения, предела, замыкания, точек концентрации и так далее. Подробнее об этом я расскажу в следующих лекциях.

Felix Hausdorff
(1868 – 1942)

В первой половине XX века математики весьма интересовались формальными следствиями простых аксиоматических систем, и изучение топологии на много лет свелось к изучению общих (как правило, весьма экзотических) топологических пространств. Эту деятельность называют "общая топология" (point-set topology). В arxiv.org "общей топологии" посвящена отдельная категория math.GN; там можно посмотреть все статьи за какой-нибудь год, например `http://arxiv.org/list/math.GN/07` .

Их немного: мало кто занимается сейчас общей топологией.

Метрика на пространстве задает топологию на нем (открытые множества можно определить как объединения открытых шаров). Топологическое пространство, которое получается таким образом, называется **метризуемым**. Далеко не все теоремы, которые верны в метризуемых пространствах, верны в общей ситуации.

В частности, неверна теоремма Гейне-Бореля (равносильность секвенциальной компактности и обычной). Также неверна равносильность непрерывности и секвенциальной непрерывности: даже если отображение сохраняет пределы последовательностей (это называется "секвенциальная непрерывность"), прообраз открытого множества не обязательно открыт. Из обычной компактности можно вывести секвенциальную, и из обычной непрерывности (прообраз открытых множеств открыт) можно вывести секвенциальную, но не наоборот.

В такой ситуации довольно часто говорят "обычная компактность *сильнее* секвенциальной," "обычная непрерывность *сильнее* секвенциальной." "Одно предположение сильнее другого" значит "из первого предположения можно вывести второе".

3.3. Расстояние Хаусдорфа

Пусть M – метрическое пространство. Напомним, что подмножество $Z \subset M$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто, и **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$, для какого-то $C > 0$.

Расстояние от точки до множества определяется так:

$$d(x, Z) = \inf_{z \in Z} d(x, z).$$

Это непрерывная, 1-липшицева функция на M. Для замкнутого $Z \subset M$, $d(x, Z) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in Z$ (докажите).

Для двух замкнутых, ограниченных подмножеств Z_1, Z_2 в метрическом пространстве M, определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(X, Y)$ формулой

$$d_H(Z_1, Z_2) := \max\left(\sup_{x \in Z_1} d(x, Z_2), \sup_{x \in Z_2} d(x, Z_1)\right).$$

Утверждение 3.10: d_H задает метрику на множестве всех замкнутых, ограниченных подмножеств M.

Доказательство: Супремум $\sup_{x \in Z_1} d(x, Z_2)$ конечен, потому что Z_1 и Z_2 содержатся в некотором шаре $B_C(z)$, а расстояние между точками $B_C(z)$ ограничено $2C$ (докажите). Если этот супремум равен нулю, это значит, что все точки Z_1 лежат в Z_2 и наоборот; это доказывает положительность метрики. Симметричность очевидна. Осталось доказать неравенство треугольника.

Для подмножества $Z \subset M$, и $\varepsilon > 0$, определим $Z(\varepsilon)$ (**ε-окрестность** Z) как объединение всех ε-шаров с центром в $z \in Z$. Определение расстояния Хаусдорфа можно переписать так:

$$d(Z_1, Z_2) := \inf_{\varepsilon} \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid Z_1 \subset Z_2(\varepsilon), Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)\}.$$

"расстояние Хаусдорфа от Z_1 до Z_2 есть инфимум всех ε таких, что Z_1 лежит в ε-окрестности Z_2, а Z_2 - в ε-окрестности Z_1".

Легко видеть, что

$$Z(\varepsilon)(\varepsilon') \subset Z(\varepsilon + \varepsilon'). \tag{3.3.1}$$

Если $d_H(Z_1, Z_2) < \varepsilon$ и $d_H(Z_2, Z_3) < \varepsilon'$, то Z_1 лежит в ε-окрестности Z_2, а Z_2 в ε'-окрестности Z_3. Из $Z_2 \subset Z_3(\varepsilon')$, неравенства треугольника и (3.3.1) следует $Z_2(\varepsilon) \subset Z_3(\varepsilon' + \varepsilon)$. Получаем:

$$Z_1 \subset Z_2(\varepsilon) \subset Z_3(\varepsilon' + \varepsilon).$$

Тот же самый аргумент, примененный к Z_3, Z_2 и Z_1, дает

$$Z_1 \subset Z_2(\varepsilon) \subset Z_3(\varepsilon' + \varepsilon)$$

Поэтому из $d_H(Z_1, Z_2) < \varepsilon$ и $d_H(Z_2, Z_3) < \varepsilon'$ следует $d_H(Z_1, Z_3) < \varepsilon' + \varepsilon$. Это и есть неравенство треугольника для d_H. Мы доказали, что расстояние Хаусдорфа - метрика. ■

3.4. ε-сети

Весьма удобный критерий компактности можно получить, воспользовавшись понятием ε-сети.

Напомним, что **ε-сетью** в метрическом пространстве M называется такое подмножество $V \subset M$, что M лежит в объединении всех ε-шаров с центрами в V. ε-сеть называется **конечной**, если V конечно.

Замечание 3.11. Пусть M - метрическое пространство, а $\varepsilon > 0$ - вещественное число. Подмножество $V \subset M$ называется **ε-сетью**, если верно любое из следующих равносильных утверждений (докажите равносильность)

(i) $V(\varepsilon) \supset M$

(ii) $d_H(M, V) < \varepsilon$

(iii)] V - это ε-сеть.

Утверждение 3.12: Пусть M - полное метрическое пространство. Тогда M компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

Доказательство:
Наличие конечной ε-сети в каждом компакте M очевидно. Возьмем в качестве покрытия M множество всех ε-шаров. У него есть конечное подпокрытие $\{B_\varepsilon(x_i)\}$. По определению, множество $\{x_i\}$ образует конечную ε-сеть.

Пусть, наоборот, в M найдется конечная 2^{-N}-сеть, для любого N. Возьмем произвольную последовательность $\{x_i\}$, и пусть V_1 - конечная 2^0-сеть. Тогда бесконечное множество элементов $\{x_i\}$ лежат в некотором 2^0-шаре. Выкинем из $\{x_i\}$ все, которые там не лежат. Перейдем к конечной 2^{-1}-сети, и выкинем из $\{x_i\}$ все элементы, которые не лежат в некотором 2^{-1}-шаре, кроме первого. Поступим так же для всех i: на i-м шаге выкинем из $\{x_i\}$ все элементы, не лежащие в некотором 2^{-i}-шаре, кроме первых i. Этот процесс стабилизируется: начиная от N-го шага, все элементы последовательности вплоть до N-го выбраны и не меняются. Полученная таким образом последовательность является, последовательностью Коши (докажите), а значит – сходится. ■

В доказательстве теоремы Хопфа-Ринова в лекции 4 нам понадобится следующий простой результат. Заметим, что любое компактное подмножество метрического пространства замкнуто и ограничено (докажите). А значит, метрика Хаусдорфа определена на компактных подмножествах.

Утверждение 3.13: Пусть $\{Z_i\}$ - последовательность компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M. Предположим, что $\{Z_i\}$ - последовательность Коши в метрике Хаусдорфа, а Z ее предел. Тогда Z тоже компактно.

Доказательство:
Поскольку Z замкнутое подмножество M, оно полно. Для доказательства компактности Z, мы построим в Z конечную 3ε-сеть, для любого наперед заданного значения ε. Возьмем конечную ε-сеть $x_0, ..., x_k$ в Z_i, для $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$, и пусть $z_1, ..., z_k$ точки в Z такие, что $d(z_i, x_i) < \varepsilon$

(такие точки существуют, потому что $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$). Обозначим за V множество $\{x_0, ..., x_k\}$. Тогда $V(\varepsilon)$ содержит $x_0, ..., x_k$. По определению ε-сети, из этого следует, что $V(2\varepsilon)$ содержит Z_i. А коль скоро $d_H(Z_i, Z) < \varepsilon$, $Z_i(\varepsilon) \supset Z$, и значит, $V(3\varepsilon) \supset Z$ Мы получили, что V есть 3ε-сеть. ■

3.5. Историческое отступление: расстояние Громова-Хаусдорфа

В 1920-е годы, общую топологию немало изучали в Москве П. С. Урысон (рано погибший, к сожалению), П. С. Александров и их школа, в Польше Казимир Куратовский (Kazimierz Kuratowski), Альфред Тарский (Alfred Tarski) и Вацлав Серпинский (Wacław Sierpiński). Среди прочего, их интересовала **проблема метризации**: найти, какие топологические пространства получаются из метрических забыванием метрики. Довольно скоро эти исследования исчерпали себя, и метрическими пространствами (вне функционального анализа) практически не занимались.

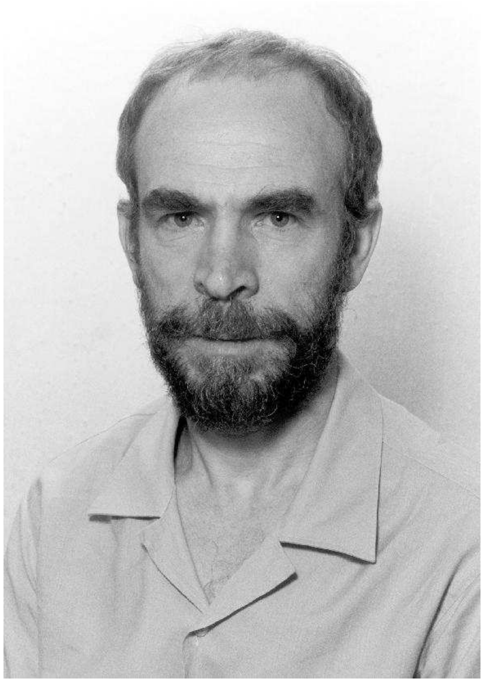
В дифференциальной геометрии много изучали геометрию римановых многообразий (метрических пространств, локально гомеоморфных $\mathbb{R}^n$, и с метрикой, которая в первом приближении евклидова, и гладко зависит от точки). Более общими пространствами дифференциальные геометры практически не интересовались.

Замечательным исключением были работы А. Д. Александрова и его школы, среди которых наиболее знаменит Михаил Громов, ученик В. А. Рохлина.

Громов определил метрику на множестве всех компактных метрических пространств. Пусть Z_1, Z_2 - компактные метрические пространства, изометрически вложенные в третье метрическое пространство M (такие вложения существуют по теореме Урысона). Рассмотрим инфимум $\inf d_H(Z_1, Z_2)$ для всех таких вложений. Немножко повозившись, можно доказать, что это действительно метрика.

В такой ситуации можно говорить о сходимости и пределе метрических пространств ("предел Громова-Хаусдорфа"). Эта идея оказалась неожиданно полезной в топологии и дифференциальной геометрии. Довольно большие классы пространств оказались компактными в метрике, заданной Громовым-Хаусдорфом; из этого удалось вывести много важных ограничений на топологические инварианты многообразий.

В 2000-е годы геометрия метрических пространств получила дополнительный толчок. Изучая эволюцию сложного дифференциально-



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)

геометрического уравнения ("потока Риччи"), Григорию Перельману удалось разрешить проблему вырождения решений этого уравнения. Перельман обнаружил, что в громовском пределе пространство, на котором оно определено, становится из многообразия негладким метрическим пространством. Оказалось, что это предельное метрическое пространство устроено довольно просто. Вырезав из него особые точки и доклеив их пленкой, Перельман снова получил гладкое многообразие, и продолжил на нем эволюцию потока Риччи, получив в пределе многообразие, где этот поток стабилен. Такие пространства ("с постоянной кривизной Риччи") были давно классифицированы. Таким образом Перельман доказал гипотезу Пуанкаре, и получил классификацию трехмерных многообразий.

4. Топология, лекция 4: Внутренняя метрика

4.1. Пространство с внутренней метрикой

Пусть M метрическое пространство, а $\gamma: \ [0,\alpha] \longrightarrow M$ - непрерывное отображение из отрезка. Такое отображение называется **путем из** $\gamma(0)$ **в** $\gamma(\alpha)$, а $\gamma(0)$ и $\gamma(\alpha)$ - **началом** и **концом** пути γ, а также его **концами**.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0,\alpha]$ в объединение меньших отрезочков,

$$[0,\alpha] = [0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},\alpha].$$

Для простоты обозначим $x_0 := 0, x_n := \alpha$. Пусть

$$L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определение 4.1. **Длиной** пути γ называется супремум

$$L(\gamma) := \sup_{x_1,...,x_{n-1}} L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}),$$

взятый по всем разбиениям отрезка.

Конечно, такой супремум может быть равен бесконечности, но для C-липшицева пути $\gamma: \ [0,\alpha] \longrightarrow M$ длина γ не превосходит $C\alpha$ (докажите). Также ясно, что $L(\gamma) \geqslant d(x,y)$, где x,y - концы пути γ (выведите это из неравенства треугольника).

Предположим, что для любых точек x,y метрического пространства M, найдется путь γ конечной длины, соединяющий x и y. Легко видеть, что в таком случае инфимум $L(\gamma)$ ("длина кратчайшего пути от x до y") по всем таким путям задает метрику на M (докажите). Такая метрика называется **внутренней метрикой** ("intrinsic metric").

Внутренняя метрика отличается следующим свойством.

Условие Хопфа-Ринова:
Пусть M - пространство с внутренней метрикой. Для любых точек $x,y \in M$, и любого положительного $r < d(x,y)$, имеем

$$d(y, B_r(x)) = d(x,y) - r.$$

Докажем это равенство.

Заметим, что неравенство $d(y, B_r(x)) \geqslant d(x,y) - r$ имеет место в произвольном метрическом пространстве, и следует из неравенства треугольника (докажите). Поэтому для доказательства условия Хопфа-Ринова нужно доказать неравенство $d(y, B_r(x)) \leqslant d(x,y) - r$.

Пусть $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ – путь из x в y, длины $d(x,y)+\varepsilon$. Такой путь существует, потому что метрика внутренняя. Из определения $L(\gamma)$ ясно, что

$$d(x,z) + d(z,y) \leqslant d(x,y) + \varepsilon. \tag{4.1.1}$$

для любого z в образе γ (докажите).

Рассмотрим функцию $d_\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d_\gamma(t) := d(x, \gamma(t))$. Поскольку d_γ непрерывна, и $d_\gamma(0) = 0, d_\gamma(1) = d(x,y) + \varepsilon$, каждая точка отрезка $[0, d(x,y)+\varepsilon]$ имеет прообраз. Возьмем t_0 такой, что $d_\gamma(t_0) = r - \varepsilon$. Тогда $z := \gamma(t_0)$ лежит в шаре $B_r(x)$. В силу (4.1.1), имеем

$$d(y,z) \leqslant d(x,y) + \varepsilon - d(x,z) = d(x,y) + \varepsilon - d_\gamma(t_0) = d(x,y) - r + 2\varepsilon.$$

Поэтому $d(y, B_r(x)) \leqslant d(x,y) - r + 2\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$. Мы доказали условие Хопфа-Ринова. ■

Заметим, что не любое метрическое пространство, удовлетворяющее условию Хопфа-Ринова, обладает внутренней метрикой. Легко видеть, что никаких непостоянных непрерывных отображений из отрезка в рациональные числа нет, между тем рациональные числа с обычной метрикой удовлетворяют условию Хопфа-Ринова (докажите это).

4.2. Локально компактные метрические пространства

Напомним, что **открытыми множествами** в метрическом пространстве называются произвольные объединения открытых шаров, а **замкнутыми множествами** - их дополнения.

Пусть M - метрическое пространство, $x \in M$ точка, $r > 0$ вещественное число. Множество

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in M \ \mid \ d(x,y) \leqslant r\}$$

называется **замкнутым шаром радиуса** r **с центром в** x. Это множество замкнуто. Действительно, для каждой точки $y \notin \bar{B}_r(x)$,

$d(x, y) > r$, и открытый шар $B_\varepsilon(y)$ не пересекается с $\bar{B}_r(x)$ для любого $\varepsilon \leqslant d(x, y) - r$ (выведите это из неравенства треугольника).

Напомним, что **замыканием** множества Z называется множество предельных точек всех последовательностей, лежащих в Z. Легко видеть, что замыкание множества замкнуто (докажите).

Вообще говоря, замыкание открытого шара $B_r(x)$ не равно замкнутому шару $\bar{B}_r(x)$. Возьмем в качестве M пространство с метрикой $d(x, y) = 1$ для всех $x \neq y$; тогда открытый шар $B_1(x)$ это точка x, а замкнутый шар – все M.

Если M удовлетворяет условию Хопфа-Ринова, то замыкание $B_r(x)$ - это $\bar{B}_r(x)$. Действительно, возьмем любую точку $y \in \bar{B}_r(x)$. Из условия Хопфа-Ринова легко вывести, что $d(y, B_r(x)) = 0$ (выведите это). Но тогда некоторая последовательность точек $B_r(x)$ сходится к y, а значит, y лежит в замыкании $B_r(x)$.

Определение 4.2. Метрическое пространство M называется **локально компактным**, если для каждой точки $x \in M$ найдется число $r > 0$ такое, что замкнутый шар $\bar{B}_r(x)$ компактен.

Напомним, что **ограниченным подмножеством** метрического пространства называется подмножество, которое содержится в каком-то шаре $B_C(x)$.

Теорема 4.3: (теорема Хопфа-Ринова, часть 1) Пусть M - локально компактное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова. Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) M полно

(ii) Любое замкнутое, ограниченное подмножество M компактно.

Доказательство:
Следствие (ii) $\Rightarrow$ (i) вполне очевидно. Действительно, любая последовательность Коши $\{x_i\}$ содержится в замкнутом шаре, который компактен по условию (ii), значит $\{x_i\}$ сходится.

Осталось доказать, что в полном локально компактном метрическом пространстве с условием Хопфа-Ринова любое замкнутое, ограниченное подмножество компактно.

Шаг 1.
Поскольку замкнутое подмножество компакта компактно (докажите),

для утверждения теоремы Хопфа-Ринова достаточно доказать, что любой замкнутый шар в M компактен.

Шаг 2.
Рассмотрим функцию $\rho: M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\rho(x) := \sup_\rho\{\rho \in \mathbb{R} \ \mid \ \bar{B}_\rho(x) \ \text{ компактен}\}.$$

Если ρ бесконечно в одной точке x, это значит, что любой замкнутый шар с центром в x компактен. Из этого легко следует, что все замкнутые шары в M компактны (докажите это). Поэтому можно считать, что функция ρ везде конечна.

Легко видеть, что ρ 1-липшицева, а следовательно непрерывна. Действительно, $\bar{B}_{\rho-d(x,y)}(y) \subset \bar{B}_\rho(x)$ (выведите это из неравенства треугольника). Поэтому $|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant d(x,y)$.

Шаг 3.
Докажем теперь, что замкнутый шар $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен. А приори, это может быть и не так, ведь в определении $\rho(x)$ используется супремум, поэтому из этого определения следует лишь то, что $\bar{B}_r(x)$ компактен для всех $r < \rho(x)$.

Из условия Хопфа-Ринова вытекает $B_r(x)(\varepsilon) = B_{r+\varepsilon}(x)$, где $Z(\varepsilon)$ обозначает объединение вселх открытых ε-шаров с центрами в Z. Это позволяет вычислить расстояние Хаусдорфа между шарами $\bar{B}_r(x)$ и $\bar{B}_{r+\varepsilon}(x)$:

$$d_H(\bar{B}_r(x), \bar{B}_{r+\varepsilon}(x)) = \varepsilon.$$

Из этого очевидно, что для каждой последовательности $\{r_i\}$, сходящейся к r, последовательность замкнутых шаров $\bar{B}_{r_i}(x)$ является последовательностью Коши (в смысле метрики Хаусдорфа), и сходится к $\bar{B}_r(x)$.

Возьмем последовательность $r_i < \rho(x)$, сходящуюся к $\rho(x)$.
Замкнутый шар $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$ получается как предел последовательности Коши $\bar{B}_{r_i}(x)$ компактных шаров. По утверждению, доказанному в предыдущей лекции с помощью ε-сетей, такой предел всегда компактен.

Шаг 4.
Воспользовавшись компактностью $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$, мы докажем, что шар $\bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ компактен для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Таким образом мы придем к противоречию.

Рассмотрим ограничение функции ρ на $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$. Поскольку ρ непрерывна и положительна, а шар $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен,

$$\rho\Big|_{\bar{B}_{\rho(x)}(x)} \geqslant 2\varepsilon > 0,$$

для какого-то положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Поэтому каждый замкнутый 2ε-шар с центром в $z \in \bar{B}_{\rho(x)}(x)$ компактен.

Пусть V – конечная ε-сеть в $\bar{B}_{\rho(x)}(x)$. Тогда $\bar{B}_{\rho(x)}(x) \subset V(\varepsilon)$, а

$$\bar{B}_{\rho(x)}(x)(\varepsilon) \subset V(\varepsilon)(\varepsilon) = V(2\varepsilon).$$

Мы получили, что шар $\bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ лежит в объединении замкнутых 2ε-шаров с центрами в точках V. Эти шары компактны, а поскольку конечное объединение компактов компактно (докажите это), $\bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ является замкнутым подмножеством компакта. Значит, $\rho(x)$ – не супремум всех ρ, для которых $\bar{B}_\rho(x)$ компактно: мы пришли к противоречию. Теорема 4.3 доказана. ■

4.3. Геодезические в метрическом пространстве

Определение 4.4. Пусть M - метрическое пространство с внутренней метрикой. Непрерывное отображение $\gamma: [0,\alpha] \longrightarrow M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая. Действительно, если $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ можно соединить путем γ', более коротким, чем γ, тогда $\gamma(0), \gamma(\alpha)$ можно соединить путем, идущим от 0 до t_1 по γ, от t_1 до t_2 по γ' и от t_2 до α по γ; этот путь будет, очевидно, короче исходного.

Напомним, что гомеоморфизмом метрических пространств называется непрерывная биекция, обратное отображение к которому - тоже непрерывно.

Если $\phi: [0,\alpha] \longrightarrow [0,\alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\phi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. В такой ситуации, $\phi \circ \gamma$ называется **репараметризацией** пути γ. Легко видеть, что длина пути не меняется при его репараметризации (докажите). Поэтому репараметризация кратчайшей - снова кратчайшая.

Пути, которые получены посредством репараметризации, называются **эквивалентными с точностью до репараметризации**, а выбор пути в классе эквивалентности - **параметризацией**.

Определение 4.5. Пусть $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|$ для любых x, y. Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**. Очевидно, кратчайшая геодезическая задает изометрическое вложение $[0, \alpha] \longrightarrow M$.

Утверждение 4.6: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(x, y) = \alpha$. Тогда у γ существует геодезическая параметризация.

Доказательство: Утверждение 4.6 легко увидеть из простых физических соображений. Представьте себе велосипедиста, который едет по дороге с переменной скоростью. Пусть $\gamma(t)$ - координата велосипедиста. Возьмем вместо t расстояние, которое велосипедист уже проехал; полученная траектория (зависящая уже не от времени, а от параметра "расстояние от начала") и является кратчайшей геодезической.

Для доказательства Утверждения 4.6, нам понадобится несколько предварительных замечаний.

Лемма 4.7: Пусть $M \xrightarrow{\phi} N$ - непрерывное отображение. Тогда образ компактного подмножества Z - компакт.

Доказательство: Возьмем покрытие $\phi(Z)$ открытыми подмножествами; его прообраз дает открытое покрытие Z, и там можно выбрать конечное подпокрытие в силу компактности. ■

Если M компактно, то любая непрерывная биекция из M в N является гомеоморфизмом. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что образ открытого множества является открытым; в силу биективности, это эквивалентно тому, что образ замкнутого множества замкнут. Но образ компакта при непрерывном отображении всегда компактен, значит образ замкнутых подмножеств замкнут.

Вернемся к доказательству Утверждения 4.6. Рассмотрим отображение $\phi : [0, \alpha] \longrightarrow [0, \alpha]$, $\phi(t) = d(x, \gamma(t))$. Это отображение непрерывно, потому что функция $d_x(y) = d(x, y)$ непрерывна (она липшицева; проверьте это). Поскольку каждый отрезок кратчайшей - кратчайшая, оно биективно: действительно, $d(x, \gamma(t))$ равен длине пути $\gamma\Big|_{[0,t]}$, а значит эта функция монотонно возрастает. Непрерывное, биективное отображение из компакта в компакт - гомеоморфизм, как мы только что доказали. Поэтому $\gamma' = \phi^{-1} \circ \gamma$ является репараметризацией γ. Для $t \in [0, \alpha]$,

$$d(x, \gamma(\phi^{-1}(t))) = \phi(\phi^{-1}(t)) = t,$$

а значит, γ' – геодезическая.

Теоремой Хопфа-Ринова называется утверждение о компактности ограниченного замкнутого подмножества в локально компактном пространстве с внутренней метрикой (Теорема 4.3). Также теоремой Хопфа-Ринова называется утверждение о наличии геодезических в полном, локально компактном пространстве с внутренней метрикой.

Теорема 4.8: (теорема Хопфа-Ринова, часть 2) Пусть M - локально компактное, полное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова, а $x_0, x_1 \in M$ произвольные точки, с $d(x_0, x_1) = \alpha$. Тогда существует кратчайшая геодезическая $\gamma: \ [0, \alpha] \longrightarrow M$, соединяющая x_0 и x_1. В частности, M является пространством с внутренней метрикой.

Доказательство: В силу условия Хопфа-Ринова, $d(x_0, \bar{B}_{\alpha/2}(x_1)) = \alpha/2$. Функция $d_{x_0}(y) := d(x_o, y)$ непрерывна, а шар $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ компактен по уже доказанной теореме Хопфа-Ринова. Поэтому в $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{\frac{1}{2}}$ такая, что $d(x_0, x_{\frac{1}{2}}) = d(x_{\frac{1}{2}}, x_1) = \alpha/2$. Аналогичный арумент, примененный к паре $x_0, x_{\frac{1}{2}}$, доказывает, что найдется точка $x_{\frac{1}{4}}$ такая, что $d(x_0, x_{\frac{1}{4}}) = d(x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{1}{2}}) = \alpha/4$. Повторяя это до бесконечности, мы получим для каждого рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$,[1] $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ точку $x_\lambda \in M$, причем $d(x_\lambda, x_{\lambda'}) = |\lambda - \lambda'|\alpha$. Это задает изометрическое отображение из множества чисел вида $\lambda\alpha$ (λ двоично-рациональное) на отрезке $[0, \alpha]$ в M. Поскольку M полно, можно продолжить это отображение до отображения пополнений. Получим изометрическое отображение из отрезка $[0, \alpha]$ в M. Это и есть кратчайшая геодезическая. Мы доказали Теорему 4.8.

4.4. История, терминология, литература

Пространства с внутренней метрикой возникли в работах Хайнца Хопфа в 1930-е годы. Хопф изучал топологию римановых многообразий,

[1] Такие рациональные числа называются **двоично-рациональными**.

и обнаружил, что многие локальные результаты, полученные из анализа (существование геодезических, локальная компактность и так далее) верны глобально, и позволяют получить много информации о топологии многообразия.

Heinz Hopf
(1894-1971)

Многообразие есть топологическое пространство, локально (в окрестности каждой точки) гомеоморфное $\mathbb{R}^n$. Такие гомеоморфизмы называются **картами**, совокупность всех карт – **атласом** на многообразии. С каждым атласом связаны отображения перехода от одной карты к многообразию и к другой карте; все это отображения из открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ в открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Если они все гладкие (бесконечно дифференцируемые), многообразие называется **гладким**. Гладкое многообразие называется **римановым**, если в каждом касательном пространстве задана метрика (положительно определенное скалярное произведение). Интегрируя эту метрику по гладкому пути, можно получить функционал длины гладкого пути; расстояние между точками x, y риманова многообразия определяется как инфинум длины по всем гладким путям из x в y. Эта метрика по построению внутренняя, а $\mathbb{R}^n$ очевидно локально компактно. Таким образом, доказанные выше теоремы можно применить к римановым многообразиям.

В последние 20-30 лет основные результаты в топологии (доказательство гипотезы Пуанкаре, инварианты Дональдсона и Сайберга-Уиттена) происходят из римановой геометрии, то есть геометрии римановых многообразий.

Хопф и его ученик Вилли Ринов (Willi Rinow, 1907-1979) получили теорему Хопфа-Ринова в 1931-м году, для римановых многообразий. Ее обобщение для локально компактных метрических пространств принадлежит Стефану Кон-Фоссену (Stephan Cohn-Vossen, 1902-1936).

По римановой геометрии есть огромное количество литературы, по большей части совершенно нечитабельной. Лично мне была полезна книжка Милнора “Теория Морса”, и “Эйнштейновы многообразия” Артура Бессе. Геометрия пространств с внутренней метрикой восходит, по большей части, к Громову, и к математикам школы А. Д. Александрова (Ю. Бураго, Г. Перельман, Д. Бураго, С. Иванов).

Вот небольшой список литературы, которая может оказаться полезной.

- Милнор, Дж., *Теория Морса*, М.: Мир, 1965 г.
- Бессе, А., *Многообразия Эйнштейна*, М.: Наука, 1990.
- Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., *Курс метрической геометрии*, Ижевск: издательство "Институт компьютерных исследований," 2004.
- Громов М. *Гиперболические группы*, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 стр.
- Громов М. *Знак и геометрический смысл кривизны*, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000, 128 стр.
- Gromov M. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces,* Progress in Math., 152, Birkhäuser (1999).
- Труды Г. Перельмана, А. Петрунина и других авторов на странице А. Петрунина
`http://www.math.psu.edu/petrunin/papers/papers.html`