

Топология, лекция 3: Компакты в метрических пространствах

Миша Вербицкий

18 февраля, 2008

Независимый Университет

Компакты.

Определение: Набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$ в M называется **покрытием** M , если $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. **Подпокрытием** покрытия $\{U_\alpha\}$ называется такое подмножество $\{U_\alpha\}$, которое тоже является покрытием.

Определение: Пространство M называется **компактным**, если из любого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение: Пространство M называется **секвенциально компактным**, если любая последовательность точек $\{x_i\}$ в M имеет сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Гейне-Бореля: Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.

Липшицевы отображения

Определение: Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f : M_1 \rightarrow M_2$ называется **C -липшицевым** если для любых $x, y \in M_1$,

$$d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y).$$

Липшицевы отображения непрерывны.

Расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ - 1-липшицева функция из M в \mathbb{R} .



R. Lipschitz

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(1832 – 1903)

Теорема Гейне-Бореля: доказательство.

Шаг 1. Импликация «компактность» \Rightarrow «секвенциальная компактность» очевидна.

Шаг 2. Любая непрерывная функция **достигает максимума и минимума** на секвенциальном компакте.

Шаг 3. Пусть $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ - покрытие метрического пространства M . Определим функцию

$$\rho_{\mathcal{U}}(x) := \sup_{\rho} \{\rho \in \mathbb{R} \mid B_{\rho}(x) \text{ содержится}$$

в одном из элементов покрытия $\mathcal{U}\}$.

Тогда $\rho_{\mathcal{U}}$ 1-липшицева. Значит $\rho_{\mathcal{U}}$ **принимает минимум на каждом секвенциальном компакте.**

Шаг 4. Минимальное покрытие – покрытие, не содержащее меньшего подпокрытия. **У каждого покрытия есть подпокрытие, которое минимально.**

Теорема Гейне-Бореля: доказательство (окончание).

Шаг 5. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ – минимальное покрытие секвенциального компакта, а $r > 0$ – минимум $\rho_{\mathcal{U}}$ на M . В каждом $U_\alpha \in \mathcal{U}$, выберем $x_\alpha \in U_\alpha$, не принадлежащий никакому другому элементу покрытия. Тогда $d(x_\alpha, x_{\alpha'}) > r$. Если $\{x_\alpha\}$ бесконечна, у нее нет сходящихся подпоследовательностей.

Теорема Гейне-Бореля доказана.



Émile Borel
(1871 – 1956)

Топологические пространства.

Феликс Хаусдорф, “Grundzüge der Mengenlehre”

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда \mathcal{U} **задает топологию** на M , если

- Любое объединение открытых подмножеств открыто
- Конечное пересечение открытых подмножеств открыто
- M и пустое множество \emptyset открыты.

Такое M называется **топологическим пространством**.

Примеры: дискретная топология, кодискретная топология.

Простейшие понятия топологии.

Предел последовательности.

Непрерывные отображения. Секвенциальная непрерывность.

Замкнутое множество, замыкание.

Компакт. Секвенциальный компакт.

Предостережение 1:

Из секвенциальной компактности не следует обычная. Из секвенциальной непрерывности не следует обычная.

Предостережение 2:

Теорема Гейне-Бореля требует «аксиомы выбора».



Felix Hausdorff
(1868 – 1942)

Расстояние Хаусдорфа

Определение: Подмножество $Z \subset M$ называется **ограниченным**, если оно содержится в шаре $B_C(x)$.

Определение: ε -**окрестность** $Z \subset M$ - объединение всех $B_\varepsilon(x)$, для $x \in Z$. Обозначим ее за $Z(\varepsilon)$.

Определение: Пусть Z_1, Z_2 - замкнутые, ограниченные подмножества M . Определим **расстояние Хаусдорфа** $d_H(Z_1, Z_2)$ как инфимум всех ε таких, что $Z_1 \subset Z_2(\varepsilon)$, $Z_2 \subset Z_1(\varepsilon)$

Утверждение: d_H задает метрику на множестве замкнутых, ограниченных подмножеств.

ε -сети.

Определение: Пусть M - метрическое пространство, $\varepsilon > 0$. Подмножество $V \subset M$ называется **ε -сетью**, если верно любое из следующих равносильных утверждений.

- Для любой точки $m \in M$, есть $v \in V$ такая, что $d(v, m) < \varepsilon$.
- $V(\varepsilon) = M$

$$d_H(M, V) < \varepsilon$$

Теорема

Пусть M - полное метрическое пространство. **M компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ в M есть конечная ε -сеть.**

Предел компактов в полном метрическом пространстве

Теорема: Пусть $\{Z_i\}$ - последовательность компактных подмножеств в полном метрическом пространстве M . Предположим, что $\{Z_i\}$ - последовательность Коши в метрике Хаусдорфа, а Z ее предел. **Тогда Z тоже компактно.**

Доказательство: Построим в Z конечную 3ε -сеть, для любого наперед заданного значения ε .

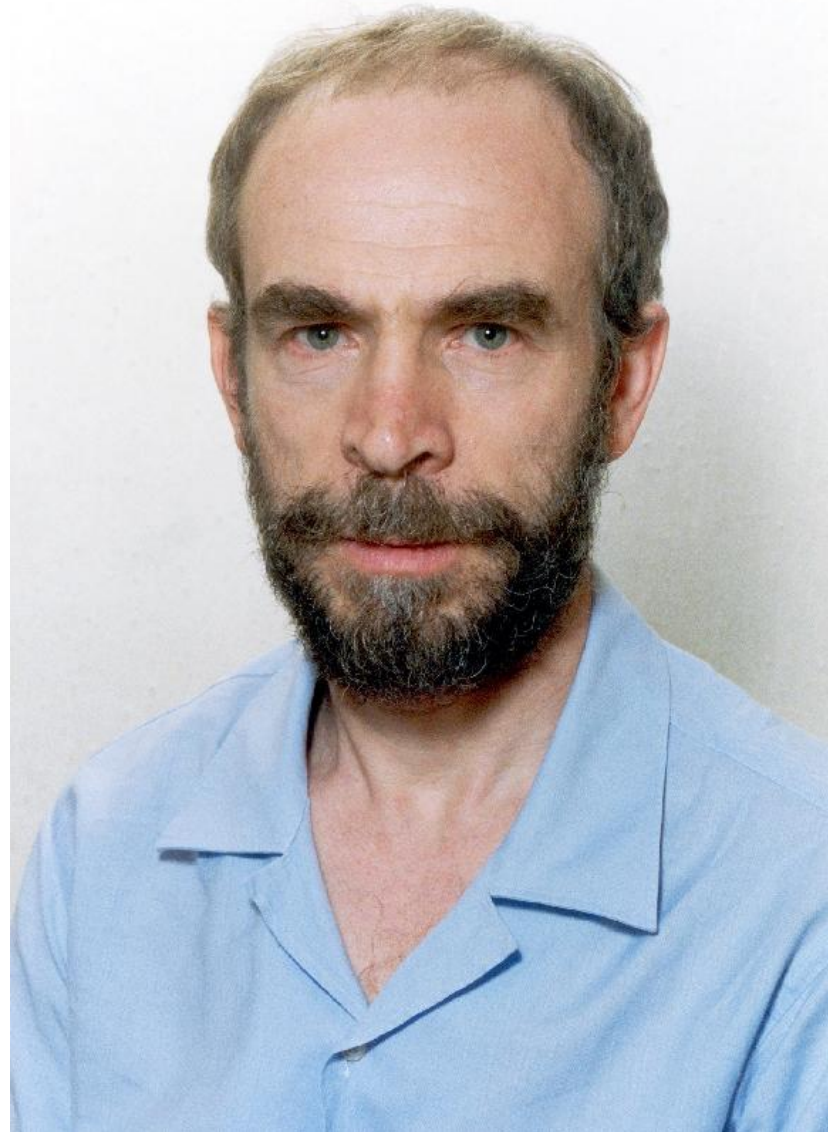
Шаг 1. Пусть x_0, \dots, x_k - конечная ε -сеть в Z_i , а $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$. Возьмем в Z точки z_0, \dots, z_k такие, что $d(x_i, z_i) < \varepsilon$ (они существуют, потому что $d_H(Z, Z_i) < \varepsilon$).

Мы докажем, что $V := \{z_i\}$ это 3ε -сеть.

Шаг 2. $V(\varepsilon)$ содержит $\{x_0, \dots, x_k\}$

Шаг 3. $V(2\varepsilon) \supset V(\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит Z_i .

Шаг 4. $V(3\varepsilon) \supset V(2\varepsilon)(\varepsilon)$ содержит $Z_i(\varepsilon) \supset Z$. **Мы доказали, что V – это конечная 3ε -сеть.**



Михаил Громов
(р. 23 декабря 1943)