Топология, лекция 4: Пространства с внутренней метрикой

Миша Вербицкий

25 февраля, 2008

Независимый Университет

Пути в метрическом пространстве.

Определение: Пусть M метрическое пространство, а $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ - непрерывное отображение. Тогда γ называется **путем из $\gamma(0)$ в $\gamma(\alpha)$**, а $\gamma(0)$ и $\gamma(\alpha)$ - **началом** и **концом**.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, \alpha]$ в объединение меньших отрезочков, $[0, \alpha] = [0, {}_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, \alpha]$. Обозначим $x_0 := 0, x_n := \alpha$. Пусть

$$L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Определение: **Длиной пути** γ называется супремум

$$L(\gamma) := \sup_{x_1, ..., x_{n-1}} L_\gamma(x_1, ... x_{n-1}),$$

взятый по всем разбиениям отрезка.

Замечание: $L(\gamma) \leqslant d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Для C-липшицева пути $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ длина γ не превосходит $C\alpha$.

Внутренняя метрика

Пусть M - метрическое пространство такое, что любые две точки могут быть соединены путем конечной длины. Тогда

$$d_{inner}(x, y) := \inf_{\gamma}\{L(\gamma) \quad | \quad \gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y\}$$

это метрика.

Определение: Такая метрика называется **внутренней метрикой на M**. **Пространство с внутренней метрикой** – такое пространство (M, d), что $d_{inner} = d$.

Замечание: Если d_{inner} определена, то (M, d_{inner}) - пространство с внутренней метрикой, потому что

$$L^{inner}(\gamma) = L(\gamma):$$

оба числа получены супремумом по одному и тому же множеству разбиений пути в отрезки.

Условие Хопфа-Ринова.

Утверждение: Пусть M - пространство с внутренней метрикой. Для любых точек $x, y \in M$, и любого положительного $r < d(x,y)$, имеем

$$d(y, B_r(x)) = d(x,y) - r.$$

Это равенство называется **условие Хопфа-Ринова**.

Доказательство:
Пусть $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ – путь из x в y, длины $d(x,y) + \varepsilon$. Тогда имеем

$$d(x,z) + d(z,y) \leqslant d(x,y) + \varepsilon, \qquad (*)$$

по определению $L(\gamma)$.

Возьмем t_0 такой, что $d(x,z) = r - \varepsilon$, для $z = \gamma(t_0)$. Получаем из (*):

$$d(z,y) \leqslant d(x,y) - r + 2\varepsilon.$$

Условие Хопфа-Ринова доказано.

Замечание:
В $\mathbb{Q}$ условие Хопфа-Ринова выполняется, а метрика не внутренняя.

Локально компактные метрические пространства

Определение

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in M \ \ | \ \ d(x,y) \leqslant r\}$$

называется **замкнутый шар**.

Свойства замкнутого шара:

1. **Он замкнут.**

2. Если выполнено условие Хопфа-Ринова, то
$\bar{B}_r(x)$ **– замыкание** $B_r(x)$.

Определение:
Метрическое пространство называется **локально компактным**, если для каждого $x \in M$ найдется $r > 0$ такое, что шар $\bar{B}_r(x)$ компактен.

Предостережение.
Не любое полное метрическое пространство локально компактно.

Теорема Хопфа-Ринова (часть 1).

Теорема: Пусть M - локально компактное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. **M полно.**

2. **Любое замкнутое, ограниченное подмножество M компактно.**

Замечание: Из условия 2 сразу следует полнота.

Докажем теорему.

Шаг 1. Достаточно доказать, что любой замкнутый шар в M компактен. Предположим, что есть некомпактный замкнутый шар.

Шаг 2. Рассмотрим функцию $\rho: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\rho(x) := \sup_\rho \{\rho \in \mathbb{R} \ \ | \ \ \bar{B}_\rho(x) \ \ \text{компактен}\}.$$

Она конечна и 1-липшицева, значит непрерывна.

Теорема Хопфа-Ринова, часть 1 (продолжение).

Шаг 3. Шар $Z := \bar{B}_{\rho(x)}(x)$ является пределом компактов в смысле метрики Громова-Хаусдорфа. Поэтому он компактен. Пусть 3ε – минимум функции ρ на Z.

Шаг 4. Возьмем в Z конечную ε-сеть $V = \{x_i\}$. Поскольку $V(\varepsilon) = Z$, имеем

$$V(2\varepsilon) = Z(\varepsilon) = \bar{B}_{\rho(x)+\varepsilon}(x).$$

Поэтому шар $B_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ лежит в конечном объединении компактных шаров $\bar{B}_{3\varepsilon}(x_i) \Rightarrow B_{\rho(x)+\varepsilon}(x)$ компактен.

Мы доказали Хопфа-Ринова, часть 1.

Геодезические в метрическом пространстве

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0, \alpha] \longrightarrow [0, \alpha]$ – гомеоморфизм, а γ - путь из x в y, композиция $\varphi \circ \gamma$ - тоже путь из x в y. Такой путь называется **репараметризацией** γ.

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация - **геодезической параметризацией**.

Существование геодезической параметризации.

Утверждение: Пусть $\gamma: [0, \alpha] \longrightarrow M$ - кратчайшая, соединяющая x и y, причем $d(x, y) = \alpha$. **Тогда у γ существует геодезическая параметризация.**

Эвристический аргумент. Представьте себе велосипедиста, который едет по дороге с переменной скоростью. Пусть $\gamma(t)$ - координата велосипедиста. Возьмем вместо t расстояние, которое велосипедист уже проехал.

Шаг 1. Лемма:
Непрерывная биекция из отрезка в отрезок – это гомеоморфизм.

Шаг 2. Рассмотрим отображение

$$\varphi: [0, \alpha] \longrightarrow [0, \alpha], \quad \varphi(t) = d(x, \gamma(t)).$$

Оно непрерывно.

Шаг 3. Оно монотоно растет (каждый отрезок кратчайшей - кратчайшая). Следовательно, биективно, а поэтому φ – гомеоморфизм.

Шаг 4. $\gamma' = \varphi^{-1} \circ \gamma$ - геодезическая параметризация.

Теорема Хопфа-Ринова, часть 2.

Отметим, что геодезическая кратчайшая задается изометрическим вложением из отрезка в M.

Теорема. Пусть M - локально компактное, полное метрическое пространство с условием Хопфа-Ринова, а $x_0, x_1 \in M$ произвольные точки, с $d(x_0, x_1) = \alpha$. Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1. В частности, M является пространством с внутренней метрикой.

Доказательство. В силу компактности, в шаре $\bar{B}_{\alpha/2}(x_1)$ есть точка $x_{1/2}$ такая, что

$$d(x_0, x_{1/2}) = d(x_{1/2}, x_1) = \alpha/2.$$

Воспользовавшись индукцией, для каждого двоично-рационального числа $\lambda = \frac{n}{2^k}$ в $[0,1]$ найдем точку x_λ, такую, что

$$d(x_\lambda, x_\mu) = \alpha|\lambda - \mu|.$$

Мы получили изометрическое вложение множества двоично-рациональных чисел в M. **Продолжим на пополнение, получим геодезическую.**

Heinz Hopf
(1894-1971)

Топология, лекция 5: основы общей топологии

Миша Вербицкий

25 февраля, 2008

Независимый Университет

Топологические пространства.

Феликс Хаусдорф, “Grundzüge der Mengenlehre”

Определение: Пусть M - множество, а $\mathcal{U} \subset 2^M$ набор подмножеств, называемых **открытыми**. Тогда $\mathcal{U}$ **задает топологию** на M, если

- **Любое объединение открытых подмножеств открыто**
- **Конечное пересечение открытых подмножеств открыто**
- M **и пустое множество** $\emptyset$ **открыты.**

Такое M называется **топологическим пространством**.

Определение: Замкнутым множеством называется множество, дополнение которого открыто.

Замечание: Можно было бы выбрать аксиомы, основанные на замкнутости. (i) “пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто”, (ii) “объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто", (iii) “M и пустое множество $\emptyset$ замкнуты".

Простейшие понятия топологии.

Определение: **Окрестностью** подмножества $Z \subset M$ называется любое открытое множество, содержащее Z. **Замыканием** подмножества $Z \subset M$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств, содержащих Z.

Определение: Подмножество M называется **всюду плотным**, если замыкание его совпадает с . Оно называется **нигде не плотным**, если его замыкание не содержит непустых открытых подмножеств M.

Определение: Отображение $\varphi: \ M \longrightarrow N$ называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого множества открыт.

Определение: **Пределом** $\{x_i\}$ называется такая точка $x \in M$, что в любой окрестности x содержатся почти все элементы $\{x_i\}$.

Предостережение: Предел может быть не единственным.

Определение: **Базой топологии** на M называется набор $\mathcal{U} \subset 2^M$ подмножеств M, состоящий из открытых множеств, и такой, что любое открытое подмножество M получено из элементов $\mathcal{U}$ взятием объединений и конечных пересечений.

Аксиома Хаусдорфа

Определение: Топологическое пространство M называется **отделимым**, или **Хаусдорфовым**, если любые две точки $x \neq y \in M$ имеют непересекающиеся окрестности $U \ni x, V \ni y$.

Замечание: В хаусдорфовом топологическом пространстве предел последовательности единственен.

Пример.
Пусть R - кольцо, $\operatorname{Spec}(R)$ - множество его простых идеалов, а $f \in R$ – любой элемент. Обозначим за A_f подмножество в $\operatorname{Spec}(R)$, состоящее из всех идеалов, которые не содержат f. Рассмотрим на $\operatorname{Spec}(R)$ топологию, где база открытых множеств состоит из A_f, для всех $f \in R$. Эта топология называется **топологией Зариского**, а $\operatorname{Spec}(R)$ - **спектром** кольца.

Пространство $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ с топологией Зариского нехаусдорфово.

Oscar Zariski
(1899 – 1986)

Аксиомы Хаусдорфа

[T_0] (Аксиома Колмогорова) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у одной есть окрестность, не содержащая другую точку.

[T_1] (Аксиома Фреше) Для любых двух точек $x \neq y \in M$, у x есть окрестность, не содержащая y. Равносильная формулировка: все точки M являются замкнутыми множествами.

[T_2] (Аксиома Хаусдорфа) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть непересекающиеся окрестности.

[$T_{2\frac{1}{2}}$] (аксиома Урысона) У любых двух точек $x \neq y \in M$ есть окрестности, замыкания которых не пересекаются.

Аксиомы Хаусдорфа (продолжение)

[T_3] В M выполняется аксиома T_0. К тому же, для любого замкнутого множества $Z \subset M$, и любой точки $x \notin Z$, у Z и x есть непересекающиеся окрестности.

[T_4] В M выполняется аксиома T_1. К тому же, любые два непересекающихся замкнутых подмножества M имеют непересекающиеся окрестности.

[T_5] В любом подмножестве M, взятом с индуцированной топологией, выполняется аксиома T_4.

[T_6] В M выполняется аксиома T_4. К тому же, каждое замкнутое множество можно получить как счетное пересечение открытых.

Замечание:
В любом метрическом пространстве M выполняется T_6.

Аксиомы счетности

Определение: Пусть M - топологическое пространство, а $x \in M$ - точка. Набор окрестностей $\{U_\alpha \ni x\}$ называется **базой окрестностей в точке**, если каждая окрестность x содержит какой-то элемент $\{U_\alpha\}$.

Определение: Топологическое пространство **обладает счетной базой в точке**, если у каждой точки есть счетная база окрестностей. Это условие также называется **первой аксиомой счетности**

Замечание:
Для пространств со счетной базой окрестностей в точке, секвенциальная непрерывность равносильна обычной.

Определение: Топологическое пространство **обладает счетной базой**, если у него есть счетная база открытых множеств. Это условие также называется **второй аксиомой счетности**.

Утверждение:
Пространство со счетной базой в точке содержит плотное, счетное подмножество тогда и только тогда, когда у него есть счетная база.