6. Топология, лекция 6: Произведение пространств

6.1. Свойства произведения

Определение 6.1. Пусть M – топологическое пространство. Напомним, что **базой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение элементов U_α. **Предбазой топологии** на M называется такой набор открытых подмножеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, что любое открытое множество получается как объединение (возможно, бесконечное) и конечное пересечение элементов из набора $\{U_\alpha\}$.

Замечание 6.2. Любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, такой, что

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M,$$

является предбазой некоторой топологии на M. Определим топологию на M таким образом, что открытые множества получаются объединениями и конечными пересечениями элементов $\{U_\alpha\}$. Проверьте, что это топология.

Замечание 6.3. По той же самой причине, базой некоторой топологии на M является любой набор множеств $\{U_\alpha\} \subset 2^M$, который замкнут относительно конечных пересечений[1] и удовлетворяет $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ (проверьте).

Пусть M, M' – топологические пространства. Пусть $\mathcal{U} \subset 2^{M\times M'}$ - набор подмножеств $M \times M'$, состоящий из всех подмножеств вида $U \times U'$, где $U \subset M, U' \subset M'$ открыты. Очевидно, $\mathcal{U}$ замкнуто относительно взятия конечных пересечений (проверьте это). В силу вышеизложенного, оно является базой топологии на $M \times M'$.

Определение 6.4. Рассмотрим $M \times M'$ с топологией, заданной базой открытых множеств вида $U \times U'$, где $U \subset M$, $U' \subset M'$ открыты. Это топологическое пространство называется **произведением** M_1 **и** M_2.

[1] **Замкнутость** $\{U_\alpha\}$ **относительно конечных пересечений** означает, что для любого конечного набора $U_1, ...U_k \in \{U_\alpha\}$, пересечение $\bigcap_i U_i$ лежит в $\{U_\alpha\}$.

Задача 6.5. Докажите, что произведение пространств, удовлетворяющих первой (второй) аксиоме счетности, снова удовлетворяет первой (второй) аксиоме счетности.

Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство – такое пространство, что любые две точки его имеют непересекающиеся окрестности. Произведение хаусдорфовых топологических пространств снова хаусдорфово. Действительно, пусть (x, x') и (y, y') - две разные точки в $M \times M'$. Тогда ибо $x \neq y$, либо $x' \neq y'$. Предположим, что верно первое. Возьмем непересекающиеся окрестности U, V у x, y, тогда открытые множества $U \times M'$, $V \times M'$ содержат (x, x') и (y, y') и не пересекаются.

Определение 6.6. Отображение $M \longrightarrow M \times M, x \xrightarrow{\Delta} (x, x)$ называется **диагональным вложением**, а его образ - **диагональю**. Докажите, что Δ непрерывно.

Задача 6.7. Докажите, что пространство M является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда диагональ – замкнутое подмножество в $M \times M$.

Произведение нескольких топологических пространств определяется индуктивно: $(M_1 \times M_2) \times M_3 \times ....$ Докажите, что результат не зависит от порядка расстановки скобок.

6.2. Отображения в $M \times M'$

Определение 6.8. Пусть на множестве M заданы две топологии: $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Говорится, что $\mathcal{U}_1$ **слабее** $\mathcal{U}_2$, если тождественное отображение $(M, \mathcal{U}_2) \longrightarrow (M, \mathcal{U}_1)$ непрерывно.

Чем *слабее* топология, тем *больше* сходящихся последовательностей, и *меньше* открытых множеств; на каждом множестве, кодискретная топология – самая слабая, а дискретная – самая сильная.

Очевидно, топология произведения – слабейшая топология на $M \times M'$ такая, что проекции $M \times M' \xrightarrow{\pi} M$, $M \times M' \xrightarrow{\pi'} M'$ непрерывны. Действительно, предбаза топологии на $M \times M'$ порождена прообразами открытых множеств при этих проекциях.

Топологию произведения можно охарактеризовать следующим образом.

Утверждение 6.9: Пусть M, M', X - топологические пространства, а $M \times M' \xrightarrow{\pi} M$, $M \times M' \xrightarrow{\pi'} M'$ – отображения проекции. Тогда отображение $X \xrightarrow{\varphi} M \times M'$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны композиции $\varphi \circ \pi$, $\varphi \circ \pi'$. Это задает биекцию между множествами

$$\left\{\begin{matrix}\text{пары непрерывных}\\ \text{отображений}\\ X \xrightarrow{\varphi} M,\ X \xrightarrow{\varphi'}\\ M'\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{непрерывные}\\ \text{отображения}\\ X \longrightarrow M \times M'\end{matrix}\right\} \qquad (6.2.1)$$

Доказательство:
Биекция (6.2.1) строится так: паре (φ, φ') ставится в соответствие отображение $x \xrightarrow{\Phi} (\varphi(x), \varphi'(x))$. Если Φ непрерывно, то φ, φ' тоже непрерывны, потому что они получены композицией Φ с проекцией. С другой стороны,

$$\Phi^{-1}(U \times U') = \varphi^{-1}(U) \cap {\varphi'}^{-1}(U')$$

(проверьте это). Следовательно, $\Phi^{-1}(V)$ открыто для любого открытого $V \subset M \times M'$, если φ, φ' непрерывны. ■

Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – любое отображение. **График** f $\Gamma_f \subset X \times Y$ - множество всех пар вида $(x, f(x)) \in X \times Y$. Диагональ является графиком тождественного отображения.

6.3. Произведение метрических пространств

Обозначим, как и раньше, за $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных чисел.

Утверждение 6.10: Пусть (M, d) и (M', d') - метрические пространства, а $\rho: (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

невырожденность: $\rho(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

субаддитивность: $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$

монотонность: $\rho(a, b) \geqslant \rho(a_1, b_1)$, если $a \geqslant a_1$, а $b \geqslant b_1$.

Тогда

$$d_\rho((x, x'), (y, y')) := \rho(d(x, y), d'(x', y'))$$

задает метрику на $M \times M'$.

Доказательство: Симметричность d_ρ следует прямо из определения, а невырожденность – из невырожденности ρ. Неравенство треугольника выводится так:

$$\begin{aligned} d_\rho((x,x'),(z,z')) &= \rho(d(x,z), d'(x',z')) \\ &\leqslant \rho(d(x,y)+d(y,z), d'(x',y')+d'(y',z')) \\ &\leqslant \rho(d(x,y), d'(x',y')) + \rho(d(y,z), d'(y',z')) \\ &= d_\rho((x,x'),(y,y')) + d_\rho((y,y'),(z,z')). \end{aligned}$$

(первое неравенство следует из монотонности, второе из субаддитивности). ■

Рассмотрим функцию $\rho_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Эта функция монотонна, субаддитивна и невырождена (проверьте), а поэтому задает метрику d_ρ на произведении метрических пространств. Такая метрика называется **метрикой произведения**. Легко видеть, что $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times...$ изометрично $\mathbb{R}^n$.

Вместо $\sqrt{x^2+y^2}$ можно рассматривать другие функции, например $\rho_\infty(x,y) := \max(x,y)$ и $\rho_1(x,y) := x+y$. Проверьте, что эти функции тоже задают метрику на $M \times M'$.

Задача 6.11. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Докажите следующие неравенства.

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b \leqslant 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$\max(a,b) \leqslant a+b \leqslant 2\max(a,b).$$

Из первого неравенства следует, что тождественное отображение

$$(M \times M', d_{\rho_2}) \longrightarrow (M \times M', d_{\rho_1}) \tag{6.3.1}$$

липшицево, и обратное ему тоже липшицево. Значит, (6.3.1) является гомеоморфизмом. Из второго неравенства следует, что тождественное отображение $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \longrightarrow (M \times M', d_{\rho_1})$ тоже является гомеоморфизмом.

Задача 6.12 (*). Будет ли тождественное отображение

$$(M \times M', d_{\rho_2}) \longrightarrow (M \times M', d_\rho)$$

липшицевым для любой функции $\rho : (\mathbb{R}^{\geqslant 0})^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, которая монотонна, выпукла и невырождена? Будет ли оно всегда гомеоморфизмом?

Из определения ясно, что открытые шары в $(M \times M', d_{\rho_\infty})$ имеют вид $B_r(x) \times B_r(x')$. Такие шары, очевидно, открыты в топологии произведения, и поэтому тождественное отображение

$$M \times M' \longrightarrow (M \times M', d_{\rho_\infty})$$

является непрерывным. Обратное отображение непрерывно в силу Утверждения 6.9, поскольку непрерывны проекции $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \longrightarrow M$ и $(M \times M', d_{\rho_\infty}) \longrightarrow M'$ (обе эти проекции липшицевы).

6.4. Полуметрики и полунормы

Определение 6.13. Пусть $d: \ M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям

Рефлексивность: $d(x,x) = 0$

Симметричность: $d(x,y) = d(y,x)$

Неравенство треугольника: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

для любых точек $x, y, z \in M$. Тогда d называется **полуметрикой** ("semimetric").

От определения метрики это отличается только отсутствием условия невырожденности: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Отметим, что условие $d(x,y) = 0$ задает на M отношение эквивалентности, что следует из неравенства треугольника (проверьте). Более того, если $d(x,y) = 0$, то

$$d(z,x) + d(x,y) \geqslant d(y,z), \quad d(z,y) + d(y,x) \geqslant d(z,x),$$

в силу неравенства треугольника. Первое неравенство дает $d(z,x) \geqslant d(y,z)$, а второе – дает $d(z,x) \leqslant d(y,z)$, поскольку $d(x,y) = 0$. Получаем, что d корректно определена на множестве $\underline{M}$ классов эквивалентности по отношению $d(x,y) = 0$. Эта функция является метрикой (проверьте). Мы получили следующее утверждение

Утверждение 6.14: каждое пространство (M, d) с полуметрикой наделено сюрьективным отображением $\pi: \ M \longrightarrow \underline{M}$ в метрическое пространство $(\underline{M}, \underline{d})$, при этом

$$d(x,y) = \underline{d}(\pi(x), \pi(y)). \tag{6.4.1}$$

■

Начав с произвольного отображения $\pi : M \longrightarrow \underline{M}$ из множества M в метрическое пространство $(\underline{M}, \underline{d})$, определим на M функцию d по формуле (6.4.1). Это будет полуметрика (проверьте). Из Утверждения 6.14 следует, что любая полуметрика получается таким образом.

В геометрии линейных пространств, похожим образом определяются полунормы.

Определение 6.15. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ функция со значениями в неотрицательных числах. Функция ν называется **полунормой** на V, если имеет место следующее

Неравенство треугольника: $\nu(v + v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.

Инвариантность относительно гомотетии: $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$,

для любых v, $v' \in V$, и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Векторное пространство с полунормой наделено полуметрикой, по формуле $d(x, y) = \nu(x - y)$. Множество векторов, удовлетворяющих $\nu(x) = 0$, называется **нуль-пространством** полунормы (nullspace). Применив конструкцию, описанную в Утверждении 6.14, мы получим, что отображение $V \longrightarrow \underline{V}$ это отображение V в его факторпространство по нуль-пространству, а $\underline{V}$ - нормированное векторное пространство.

Определение 6.16. Пусть M – множество, наделенное семейством полуметрик $\{d_\alpha\}$. **Открытым шаром в полуметрике** d_α называется множество

$$B_{r,d_\alpha}(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}.$$

Топология, заданная семейством полуметрик - это топология, построенная по предбазе $B_{r,d_\alpha}(x)$, для всех $x \in M, d_\alpha \in \{d_\alpha\}, r \in \mathbb{R}^{>0}$.

6.5. Тихоновская топология

Обозначим за $\operatorname{Map}(A, B)$ множество всех отображений из множества A в B.

Пусть M - некоторое множество, а $\mathfrak{I}$ – набор индексов (не обязательно конечный или счетный), а $M^{\mathfrak{I}}$ - произведение M на себя $\mathfrak{I}$ раз. Можно думать про $M^{\mathfrak{I}}$ как про множество последовательностей, индексированных элементами из $\mathcal{I}$, или как про множество отображений $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$.

Пусть M топологическое пространство, $\mathfrak{I}$ – набор индексов, $\alpha \in \mathfrak{I}$, а $\pi_\alpha : \ M^{\mathfrak{I}} \longrightarrow M$ – проекция из $M^{\mathfrak{I}}$ на компонент с индексом α. Если мы отождествим $M^{\mathfrak{I}}$ с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$, то π_α переводит отображение $f : \mathfrak{I} \longrightarrow M$ в $f(\alpha)$.

Для какого-то набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}$, обозначим за

$$\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n} : \ M^{\mathfrak{I}} \longrightarrow M^n$$

проекцию $M^{\mathfrak{I}}$ на произведение элементов с номерами $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Утверждение 6.17: В этих условиях, пусть $\mathcal{U}$ - слабейшая топология на $M^{\mathfrak{I}}$, в которой непрерывны все отображения π_α. Тогда $\mathcal{U}$ задается предбазой вида

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U) \ \mid \ \alpha \in \mathfrak{I}, U \subset M, \ \ U \text{ открыто}\}.$$

Кроме того, $\mathcal{U}$ задается базой вида

$$\{\pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n) \ \mid \ \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathfrak{I}, \ \ U_i \subset M, \ \ U_i \text{ открыты}\}.$$

Доказательство: Множества $\pi_\alpha^{-1}(U)$ открыты в силу непрерывности π_α, и порождают слабейшую топологию, в которой все π_α непрерывны. Пересечение таких множеств имеет вид

$$\bigcap_i \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i) = \pi_{\alpha_1,...,\alpha_n}^{-1}(U_1 \times U_2 \times ... \times U_n),$$

а конечные пересечения множеств из предбазы образуют базу (докажите это). ■

Определение 6.18. Построенная выше топология на $M^{\mathfrak{I}}$ называется **тихоновской топологией**, или **топологией произведения**.

Задача 6.19. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. Докажите, что $M^{\mathfrak{I}}$ хаусдорфово.

Утверждение 6.20: Пусть (M, d) – метрическое пространство. Для каждого индекса $\alpha \in \mathfrak{I}$, определим полуметрику d_α на $M^\mathfrak{I}$ по формуле $d_\alpha(x, y) = d(\pi_\alpha(x), \pi_\alpha(y))$. Рассмотрим топологию $\mathcal{U}_1$, определенную на M системой полунорм d_α. Тогда эта топология совпадает с тихоновской.

Доказательство: Предбазой для топологии $\mathcal{U}_1$ являются множество открытых шаров вида $B_{r,d_\alpha}(x)$. Очевидно,

$$B_{r,d_\alpha}(x) = \pi_\alpha^{-1}(U),$$

где $U = B_r(\pi_\alpha(x))$ – это открытый шар в M (докажите это). Поэтому предбаза для топологии $\mathcal{U}_1$ является предбазой для тихоновской топологии, и эти две топологии совпадают. ■

Определение 6.21. Пусть $(M, \{d_\alpha\})$ пространство с семейством полуметрик, а $\{x_i\}$ – последовательность точек в M. Мы говорим, что $\{x_i\}$ – **последовательность Коши относительно этого семейства полуметрик**, если для каждого индекса α, и для каждого $\varepsilon > 0$, почти все элементы $\{x_i\}$ лежат в ε-шаре $B_{\varepsilon,d_\alpha}(x)$. Мы говорим, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.

Теорема 6.22: Пусть M – полное метрическое пространство, а $\mathfrak{I}$ - некоторый набор индексов. Рассмотрим $M^\mathfrak{I}$ с тихоновской топологией, и полуметриками, заданными выше. Тогда $M^\mathfrak{I}$ полно.

Доказательство: Пусть $\{x_i\} \in M^\mathfrak{I}$ - последовательность Коши. Отождествляя $M^\mathfrak{I}$ с $\operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$, как выше, мы можем рассматривать x_i как отображения $\mathfrak{I} \xrightarrow{x_i} M$. По определению, $\{x_i\}$ является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда для каждого индекса $\alpha \in \mathfrak{I}$, образы $\{x_i(\alpha)\}$ задают последовательность Коши в M. Поскольку M полно, последовательность Коши $\{x_i(\alpha)\}$ сходится к элементу $x(\alpha) \in M$. Это задает отображение $\mathfrak{I} \xrightarrow{x} M$, которое и будет пределом $\{x_i\}$. ■

Из этого доказательства ясно, что последовательность

$$\{x_i\} \in \operatorname{Map}(\mathfrak{I}, M)$$

сходится к $\mathfrak{I} \xrightarrow{x} M$ в тихоновской топологии тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_i(\alpha)\}$ сходится для любого индекса α. Поэтому тихоновскую топологию называют еще **топологией поточечной сходимости**, и **топологией почленной сходимости**.

Когда $M = \mathbb{R}$, а $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), $M^{\mathfrak{I}}$ – это множество последовательностей вещественных чисел, с топологией почленной сходимости. Эту топологию часто называют **слабой топологией**.

Слабую топологию открыл венгерский математик Фридьеш Рисс.

Frigyes Riesz
(1880 – 1956)

Довольно рано стало ясно, что ее невозможно задать никакой нормой. Обнаружив это, Рисс придумал в 1909-м году определение топологического пространства (независимое от нормы и метрики), основанное на понятии замыкания. Таким образом появилось первое определение топологического пространства. Впоследствии идеи Рисса развил Хаусдорф, получив современное определение топологического пространства.

6.6. Пространства Фреше

Определение 6.23. Пусть V векторное пространство, на котором задана топология $\mathcal{U}$. Пространство $(V,\mathcal{U})$ называется **топологическим векторным пространством**, если $x, y \longrightarrow x+y$ непрерывно как отображение $V \times V \longrightarrow V$, и для любого ненулевого $\lambda \in \mathbb{R}$, отображение $x \longrightarrow \lambda x$ задает гомеоморфизм из V в V.

Топология на топологическом векторном пространстве не обязательно задается нормой (даже если у пространства есть счетная база). Во многих случаях, топология задается не нормой, а системой полунорм. Есть и более экзотические способы задания топологии.

Определение 6.24. Пространство V с системой полунорм $\{d_\alpha\}$ называется **пространством Фреше** ("Fréchet space"), если эта система задает на V хаусдорфову топологию, и V полно как пространство с семейством полунорм.

Напомним, что векторное пространство с нормой называется **банаховым**, если оно полно как метрическое пространство. Банахово пространство является (дурацким) примером пространства Фреше. Другим примером пространства Фреше является пространство $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ последовательностей вещественных чисел, с топологией почленной сходимости (оно полно, как следует из Теоремы 6.22). Можно доказать, что эта топология на $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ не может быть задана никакой нормой.

6.7. Тихоновский куб и гильбертов куб

Рассмотрим отрезок $[0,1]$, и пусть $[0,1]^\mathbb{N}$ – множество последовательностей точек из $[0,1]$. Для $\{x_i\}, \{y_i\} \in [0,1]^\mathbb{N}$, определим

$$d_h(\{x_i\}, \{y_i\}) := \sum_{i=1}^\infty \frac{|x_i - y_i|}{i^2}$$

Легко видеть, что d_h задает метрику на $[0,1]^\mathbb{N}$ (докажите).

Определение 6.25. Построенное таким образом метрическое пространство $([0,1]^\mathbb{N}, d_h)$ называется **гильбертов куб** ("Hilbert cube").

Определение 6.26. Пространство $[0,1]^\mathbb{N}$ с топологией произведения называется **тихоновский куб** ("Tychonoff cube").

Теорема 6.27: Тождественное отображение задает гомеоморфизм между тихоновским кубом и гильбертовым кубом.

Доказательство:
Шаг 1. Пусть I_h – это гильбертов куб, I_t – тихоновский куб. Обозначим за $\pi_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ проекцию $\{x_i\} \longrightarrow x_n$. Поскольку отображение

$$\pi_n : I_h \longrightarrow [0,1]$$

n^2-липшицево (докажите), проекции π_n непрерывны на I_h.

Шаг 2. Для любого топологического пространства X, отображение $X \xrightarrow{\varphi} I_t$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\varphi \circ \pi_i$ непрерывна для всех i (это следует из определения тихоновского куба; см. также доказательство Утверждения 6.9).

Поскольку проекции $\pi_n : I_h \longrightarrow [0,1]$ непрерывны (Шаг 1), тождественное отображение $I_h \longrightarrow I_t$ непрерывно.

Шаг 3.
Лемма: Пусть $(M, \{d_\alpha\})$ - пространство с топологией, заданной системой полуметрик $\{d_\alpha\}$, а $d_\alpha(x,\cdot) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ функция, которая переводит y в $d_\alpha(x,y)$. Тогда функция $d_\alpha(x,\cdot)$ непрерывна.

Доказательство: Открытый шар $B_{r,d_\alpha}(x)$ открыт по определению. Замкнутый шар

$$\bar{B}_{r,d_\alpha}(x) = \{y \in M \quad | \quad d_\alpha(x,y) \leqslant r\}$$

замкнут, поскольку каждая точка y, которая ему не принадлежит, принадлежит открытому шару $B_{\varepsilon,d_\alpha}(x)$, для любого $\varepsilon < d(y,x) - r$, который не пересекается с $\bar{B}_{r,d_\alpha}(x)$. Поэтому прообраз любого открытого отрезка

$$d_\alpha(x,\cdot)^{-1}(]\alpha,\beta[)$$

открыт (это дополнение открытого шара до замкнутого).

Шаг 4. Пусть $\mathfrak{v} = \{x_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ – любая последовательность. Рассмотрим функцию $\mu_{\mathfrak{v}} : I_t \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\mu_{\mathfrak{v}}(\{y_i\}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\{x_i\},\{y_i\})}{k^2}$$

где $d_k(\{x_i\},\{y_i\}) = |x_k - y_k|$. Поскольку d_k это k-я полуметрика, используемая для определения тихоновской топологии, функция

$$\{y_i\} \longrightarrow d_k(\{x_i\},\{y_i\})$$

непрерывна в силу леммы, доказанной в Шаге 3. Поэтому функция $\mu_{\mathfrak{v}}$ тоже непрерывна.

Шаг 5.
Лемма: Пусть $f: X \longrightarrow M$ – отображение из топологического пространства в метрическое пространство (M,d). Для любой точки $z \in M$, рассмотрим функцию $d_z: M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, $d_z(x) := d(z,x)$. Тогда f непрерывна тогда и только тогда, когда композиции $f \circ d_z: Z \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны для всех z.

Доказательство: Функции d_z непрерывны, ибо они 1-липшицевы. Поэтому если f непрерывна, то композиции $f \circ d_z$ тоже непрерывны. С другой стороны,

$$(f \circ d_z)^{-1}([0,\alpha[) = f^{-1}(B_\alpha(z)),$$

поэтому из непрерывности $f \circ d_z$ следует открытость $f^{-1}(B_\alpha(z))$, что влечет непрерывность f.

Шаг 6. Рассмотрим тождественное отображение $I_t \xrightarrow{\iota} I_h$. Непрерывность ι^{-1} доказана на шаге 1, поэтому чтобы убедиться, что ι это гомеоморфизм, достаточно доказать, что это отображение непрерывно. В силу леммы из Шага 5, для этого достаточно доказать, что функция $d_h(\mathfrak{v},\cdot): I_t \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, для любого $\mathfrak{v} = \{x_i\} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Эта функция может быть явно записана как

$$\mu_{\mathfrak{v}}(\{y_i\}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(\{x_i\},\{y_i\})}{k^2}$$

и на шаге 4 мы доказали, что она непрерывна. Теорема 6.27 доказана. Тихоновский куб гомеоморфен гильбертову! ■

6.8. История, замечания

Я называл "тихоновским кубом" пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ – произведение счетного числа интервалов. Но никто не мешает нам взять в качестве множества индексов любое множество A, например несчетное. Пространство $[0,1]^A$ с тихоновской топологией тоже называется тихоновским кубом. Оно компактно.

Для $[0,1]^{\mathbb{N}}$ этот удивительный факт, который называется теоремой Тихонова, можно вывести из гомеоморфизма $[0,1]^{\mathbb{N}}$ и гильбертова куба. Но для общего A доказательство компактности $[0,1]^A$ имеет другую природу, и кажется совершенно неправдоподобным.

Андрей Николаевич Тихонов
(1906 – 1993)

Тихонов доказал свою теорему в 1924-м году (ему было тогда 18 лет). В том же 1924-м году он доказал теорему о метризации – любое хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, которое нормально (то есть удовлетворяет аксиоме Хаусдорфа T4) метризуемо. Этот результат был немедленно (в 1925-м году) опубликован в Mathematische Annalen, тогда же вошел в переиздание учебника Хаусдорфа и стал широко известен.

Теорема Тихонова не была опубликована вплоть до 1930-го года, а ее полная версия (любое произведение компактов компактно), также известная Тихонову, не была опубликована им никогда: ее доказал независимо от Тихонова чешский математик Эдуард Чех (Eduard Čech) в 1937-м году.

Дело в том, что среди старших товарищей Тихонова много лет никто не верил, что подобное утверждение может быть вообще верно. Теорема Тихонова (и его работа 1930-го года с публикацией) - самая цитируемая и знаменитая теорема общей топологии. Но в 1920-х и начале 1930-х, когда Тихонов занимался чистой математикой, он был знаменит в основном работами о метризации.

Причина этого, видимо, лежит в парадоксальности самого понятия тихоновской топологии на произведении топологических пространств. Сейчас свежесть и необычность этого определения не ощущается, но в 1924-м году оно было в полной мере революционным.